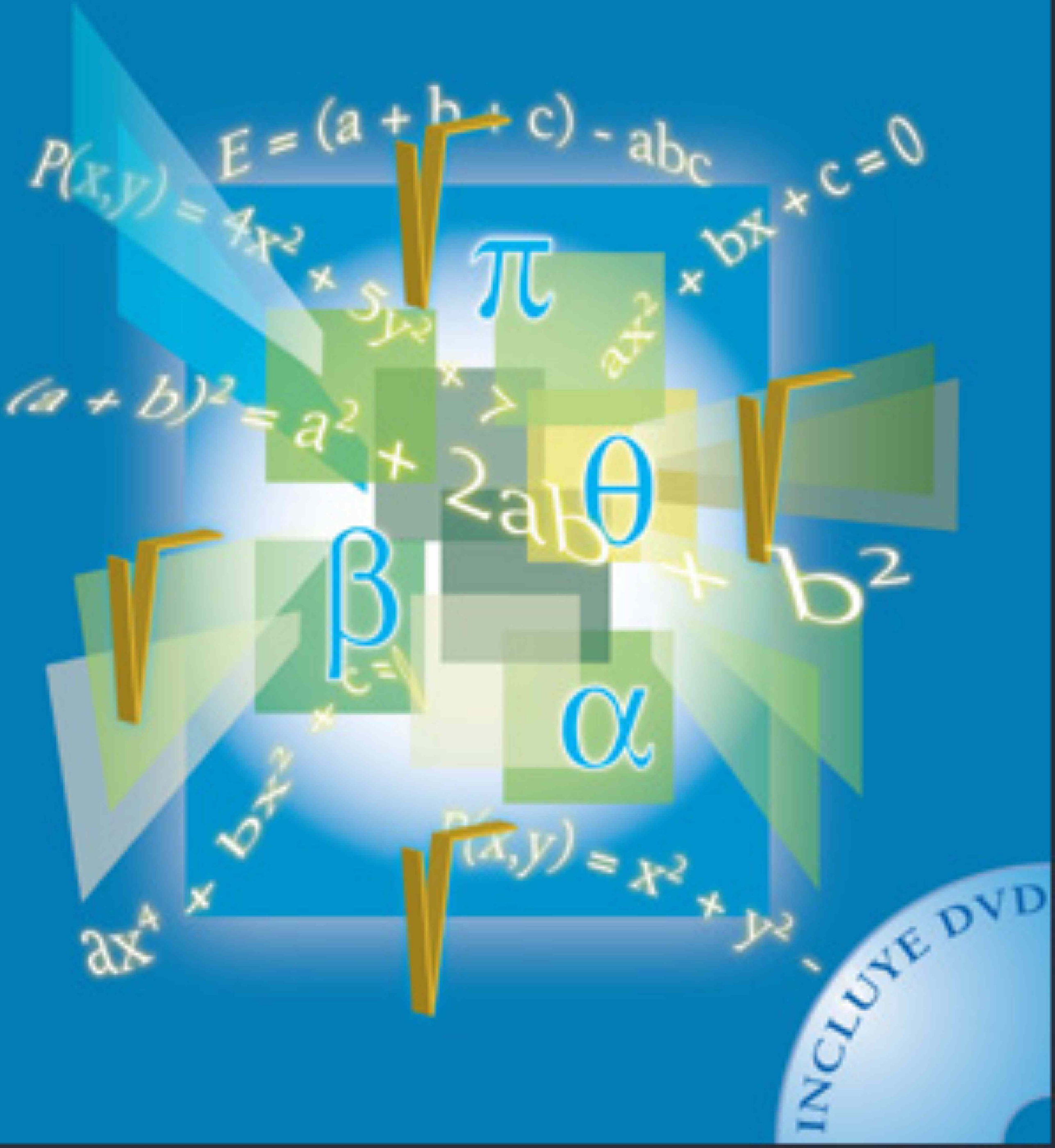
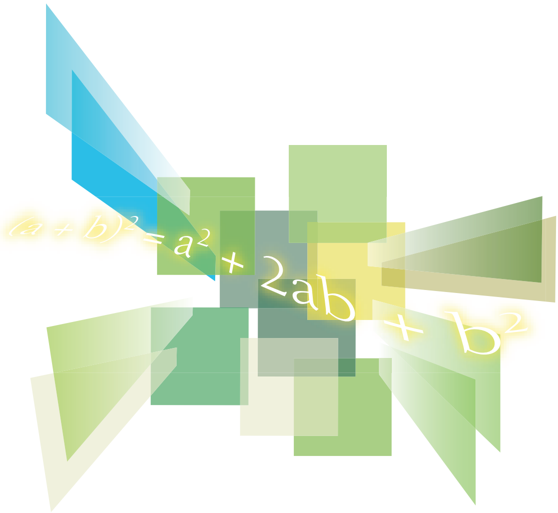
MANUAL DE PREPARACIÓN PRE-UNIVERSITARIA

ÁLGEBRA

TEORÍA, CONCEPTOS, EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS



ÁLGEBRA



LEXUS

ÁLGEBRA MANUAL DE PREPARACIÓN PRE-UNIVERSITARIA

IDEA, DISEÑO Y REALIZACIÓN
Departamento de Creación Editorial de Lexus Editores

Av. Del Ejército 305 Miraflores, Lima-Perú
www.lexuseditores.com

Primera edición, febrero 2008

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca
Nacional del Perú: 2008-01600

ISBN: 978-9972-209-44-4

EDICIÓN 2008

PRESENTACIÓN

Si usted, estimado lector, considera que la matemática es una de las materias de mayor complejidad en los planes de estudio escolar, pre-universitario y superior, o desea profundizar y repasar temas y ejercicios que le permitirán el dominio progresivo y la maestría avanzada en el tema, ha abierto el libro apropiado.

Desde siempre Lexus Editores ha desarrollado recursos metodológicos tendientes a mejorar la articulación teórica y práctica entre el nivel secundario y la universidad. Esta vez, ha deseado crear un manual educativo que sirva como herramienta de auto-evaluación para los alumnos que se encuentran en etapa pre-universitaria. De esta manera, ellos mismos serán capaces de juzgar sus capacidades con vista a iniciar sus estudios superiores.

Se ha tenido el especial cuidado de seleccionar un grupo altamente calificado para la redacción de esta obra, conformado por estudiantes universitarios y docentes especializados, a fin de lograr un manual de preparación pre-universitaria en Álgebra en la que se destaca el desarrollo de complejos ejercicios, usando métodos apropiados, fáciles y amigables.

Este manual conduce al lector de una manera didáctica a lo largo de la asignatura, pasando de lo más sencillo a lo más complejo, con numerosos ejercicios resueltos y propuestos, brindándole de esta manera una base muy sólida para que destaque durante su paso por las aulas universitarias, al ostentar adecuado conocimiento y dominio de la materia.

Un DVD, producido con la más alta tecnología digital e infográfica, acompaña esta obra, para demostrar al estudiante que lo dificultoso puede verse siempre en términos entendibles y amenos. Es prácticamente como tener un profesor en casa a tiempo completo.

Los Editores

SUMARIO

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

El álgebra es la parte de la matemática que estudia a la cantidad en su forma más general obteniendo generalizaciones sobre el comportamiento operacional de los números. Estudia de esta manera, funciones numéricas; para lo cual se emplea números, letras y signos de operación.

Como el estudio de una función conduce finalmente al planteamiento de una ecuación o igualdad, se dice también que el álgebra es la ciencia que estudia las ecuaciones. Utiliza conceptos y leyes propias. Estos son analizados a continuación:

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es el conjunto de números y letras unidos entre sí por los signos de operación de la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación.(*)

Ejemplos:

Son expresiones algebraicas las siguientes:

i) x

ii) $4x$

iii) $4x^2 + 5y^2 + 7z^2$

iv) $\dfrac{3x^5 + 7\sqrt{x^2 - 5xy^4}}{3x^2y - 3xy^7}$

No son expresiones algebraicas:

i) 5^x

ii) $\log_a x$

iii) sen x

(*)Las letras son empleadas tanto para representar valores conocidos o datos (en este caso; por convención, se usa las primeras letras del alfabeto) como valores desconocidos (se usa las últimas letras del alfabeto).

Es necesario aclarar que todas las expresiones que tienen números y letras son expresiones algebraicas; a excepción de las últimas tres, que reciben el nombre de funciones trascendentes y que son utilizadas muy a menudo en el cálculo superior. Para una mayor ilustración, indicaremos la definición de las siguientes funciones trascendentes:

Función exponencial.- Representada por una base numérica y un exponente literal, como por ejemplo: 7^x (base = 7, exponente = x).

Función logarítmica.- Representada por el símbolo "log." y que se toma en una cierta base a un determinado número. Ejemplo: $\log_b N$ y se lee logaritmo en base **b** del número **N**.

Función trigonométrica.- Representada por las funciones seno, coseno, tangente y sus complementos aplicados sobre un número real. Ejemplo: sen x, que se lee: "seno de x".

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Según el tipo de número o variable de sus exponentes, radicales o denominadores las expresiones algebraicas pueden clasificarse en:

$$\text{Expresiones Algebraicas} \begin{cases} \text{Racionales} \begin{cases} \text{Enteras} \\ \text{Fraccionarias} \end{cases} \\ \\ \text{Irracionales} \end{cases}$$

a) Expresión algebraica racional

Es aquella que se caracteriza porque tiene *exponentes enteros* o no tiene letras en su *cantidad subradical* (es decir, al interior de la raíz).

Ejemplos:

i) $4ax^2 + 5y^3 + 7z^4$

ii) $4x^{-7} + 2y^{-3} + 11z^{-7}$

iii) $\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^8 + \frac{1}{3}x^4$

iv) $\frac{x^2}{3yz} + \frac{4z^2}{7xy^2} + \frac{2z^3}{9y^4}$

NOTA:
Se entiende por cantidad subradical a la parte de una raíz que se encuentra en el interior del radical. De este modo:

$\sqrt[n]{A}$, se lee "raíz n de A"

Donde n = índice, A = cantidad subradical

a.1) Expresión algebraica racional entera

Es aquella que se caracteriza porque tiene exponentes enteros positivos o no tiene letras en su denominador.

Ejemplos:

i) $2x^2 + 5y^7 + 12y^{15}$

ii) $\frac{1}{3x} + \frac{1}{5y} + \frac{1}{4}z^4$

iii) $4x^2 y^3 z^4 - 8w^4 t^5$

a.2) Expresión algebraica racional fraccionaria

Es aquella que se caracteriza porque tiene exponentes negativos o tiene letras en su denominador.

Ejemplos:

i) $4x^{-3} + 7y^{-9} + 12z^{-4}$

ii) $\frac{1}{3x} + \frac{2}{5y} + \frac{7}{4z^2}$

iii) $\frac{4x^2 + 3y^3 + 7z^4}{4x^5 + 5yz}$

iv) $4x^4 + 5y^3 + 8z^5 + 9t^{-2}$

b) Expresión algebraica irracional

Es aquella que se caracteriza porque tiene exponentes fraccionarios o tiene letras en su cantidad subradical.

Ejemplos:

i) $5x^{1/2} + 7y^{1/3} + 8z^{1/5}$

ii) $4x^{-1/3} + 8y^{-1/5} + 7z^{-1/8}$

iii) $\sqrt{4x^2 + 5y^2} + 8\sqrt{z}$

iv) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{\sqrt{y}} + \frac{8}{\sqrt{z}}$

v) $4x^{20} + 5y^8 + 7x^{14} + 9\sqrt{xyz}$

Resumen de las características de las expresiones algebraicas.

Expresiones Algebraica
- Racionales
  Exponente entero
  Subradical sin letras
  - Enteras
    Exponente entero positivo
    Denominador sin letras
  - Fraccionarias
    Exponente entero negativo
    Denominador con letras
- Irracionales
  Exponente fracción
  Subradical con letras

TÉRMINO ALGEBRAICO

Es aquella expresión algebraica cuyas partes no están separadas ni por el signo más ni por el signo menos. En otras palabras, un *término algebraico* es un monomio.

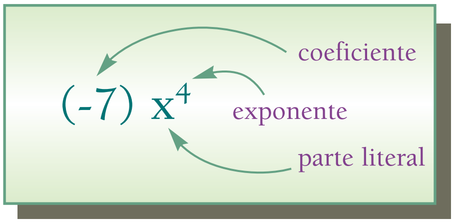
Ejemplos:

i) $4x^2$

ii) $+5y^3z^4$

iii) $-3x^4y^5z^8$

Partes de un Término Algebraico



TEORIA DE EXPONENTES

La Teoría de Exponentes tiene por objeto estudiar todas las clases de exponentes que existen y las relaciones que se dan entre ellos.

La operación que permite la presencia del exponente es la potenciación, la cual se define así:

POTENCIACIÓN

Es la operación que consiste en repetir un número llamado *base* tantas veces como factor, como lo indique otro llamado *exponente*; al resultado de esta operación se le denomina *potencia*, y se representa así:

$$\text{Potencia} = (\text{base})^{\text{exponente}}$$

Ejemplos:

i) $2^7 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{7 factores 2}} = 128$

ii) $5^5 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{5 factores 5}} = 3\,125$

iii) $4^6 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{6 factores 4}} = 4\,096$

En general:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \;\ldots\; \cdot a}_{\text{"n" factores a}}$$

NOTA:

Recuerdese que para efectos del estudio algebraico, la base es literal y el exponente es numérico:

x^5, y^4, z^8, etc.

LEYES QUE RIGEN A LOS EXPONENTES

Multiplicación de Potencias de Bases Iguales.

Se escribe la base común y como exponente se escribe la suma de ellos.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

i) $x^5 \cdot x^7 = x^{5+7} = x^{12}$

ii) $x^8 \cdot x^6 \cdot x^{-3} \cdot x^{-8} \cdot x^{12} = x^{8+6-3-8+12} = x^{15}$

iii) $2^{m+3} \cdot 2^{m+4} \cdot 2^{4-2m} = 2^{m+3+m+4+4-2m} = 2^{11} = 2\,048$

División de Potencias de Bases Iguales.

Se escribe la base común y como exponente se escribe la diferencia de dichos exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos:

i) $\dfrac{x^8}{x^3} = x^{8-3}$

ii) $\dfrac{x^{12}}{x^{-3}} = x^{12-(-3)} = x^{12+3} = x^{15}$

iii) $\dfrac{2^{m+3}}{2^{m-3}} = 2^{m+3-(m-3)} = 2^{m+3-m+3} = 2^6 = 64$

iv) $\dfrac{5^{x+2} \cdot 5^{x+3}}{5^{2x+1}} = \dfrac{5^{x+2+x+3}}{5^{2x+1}} = \dfrac{5^{2x+5}}{5^{2x+1}}$

$= 5^{2x+5-(2x+1)} = 5^4 = 625$

Exponente Cero.

Toda cantidad diferente de cero, con exponente cero, es igual a la unidad. Así:

$$a^0 = 1, \text{ donde: } a \neq 0$$

Ejemplos:

i) $5^{7^0} = 5^1 = 5$

ii) $4^{2^{9^0}} = 4^{2^1} = 4^2 = 16$

iii) $2^{4^0} + 5^{7^0} + 8^{7^0} = 2 + 5 + 8 = 15$

Exponente Negativo

Toda cantidad diferente de cero, elevada a un exponente negativo, es igual a una fracción cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es igual a la misma expresión pero con el signo del exponente cambiado a positivo. Así:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ , \quad \text{donde: } a \neq 0$$

Ejemplos:

i) $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ *ii)* $\dfrac{a^2}{b^4} = a^2b^4$

iii) $2^{-1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ *iv)* $\dfrac{a^{-3}}{b^{-5}} = \dfrac{b^5}{a^3}$

Potencia de un Producto.

Es igual a elevar cada factor a dicha potencia.

$$(a.b)^n = a^n.\ b^n$$

Ejemplos:

i) $(a\ .\ b)^5 = a^5.b^5$

ii) $\left(\sqrt{3x}\right)^2 = 3x^2$

iii) $x^4y^4 = (xy)^4$

iv) $\dfrac{3x\ .\ 2x}{6^x} = \dfrac{(3\ .\ 2)x}{6^x} = \dfrac{6^x}{6^x}$

Potencia de un Cociente.

Se eleva tanto el numerador como el denominador a dicha potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

i) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^4 = \dfrac{x^4}{y^4}$ *ii)* $\dfrac{x^7}{y^7} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^7$

iii) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = \dfrac{3^3}{5^3} = \dfrac{27}{125}$ iv) $\dfrac{8^n}{2^n} = \left(\dfrac{8}{2}\right)^n = 4^n$

Potencia Negativa de un Cociente.

Se invierte el cociente y la potencia se transforma en positiva. Luego, puede procederse como en el caso anterior.

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{-n}{b^n}\right)$$

Ejemplos:

i) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5^2}{2^2} = \dfrac{25}{4}$

ii) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\dfrac{5}{1}\right)^3 = 5^3 = 125$

iii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-4} = \left(\dfrac{2}{1}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{1}\right)^3 + \left(\dfrac{5}{1}\right)^4$

$= 4 + 27 + 625 = 656$

Potencia de Potencia.

Se escribe la misma base y el nuevo exponente es igual al producto de los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m\ .\ n}$$

Ejemplos:

i) $(x^2)^3 = x^{(2)(3)} = x^6$

ii) $[(x^3)^4]^5 = x^{(3)(4)(5)} = x^{60}$

iii) $(x^{-3})^{-4} = x^{12}$

iv) $(x^{-2})^5 = x^{-10}$

Nota:

Para el caso de tener muchos exponentes, se puede generalizar la regla como sigue:

$$\{\ [(a^m)^n]^r\ \}^s = a^{m\,.\,n\,.\,r\,.\,s}$$

RAÍZ DE UNA POTENCIA

Se escribe la base y como nuevo exponente, la división del exponente de la potencia entre el índice del radical.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

Ejemplos:

i) $\sqrt[5]{x^{10}} = x^{\frac{10}{5}} = x^2$

ii) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{48}}} = \sqrt{x^{\frac{48}{4}}} = 3\sqrt{x^{12}} = x^{\frac{12}{3}} = x^4$

iii) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{64}}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{32}}}} = \sqrt{\sqrt{x^{16}}} = x^8 = x^4$

Nota:

Cuando se tiene muchos radicales, se puede gene-ralizar la regla como sigue:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}} = \sqrt[mnsr]{a} = a^{\frac{1}{mnsr}}$$

Exponente Fraccionario

Toda cantidad elevada a un exponente fraccionario es igual a la raíz de dicha cantidad, cuyo índice es el denominador de la fracción y el numerador permanece como exponente. Por lo tanto:

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Ejemplos:

i) $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$

ii) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

iii) $64^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = (4)^2 = 16$

RAÍZ DE UN PRODUCTO

Es igual a extraer la raíz de cada factor, y luego efectuar el producto.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo:

i) $\sqrt[5]{x^{10}y^{25}} = \sqrt[5]{x^{10}} \,.\, \sqrt[5]{y^{25}} = x^2y^5$

ii) $\sqrt[7]{xy} = \sqrt[7]{x} \,.\, \sqrt[7]{y}$

Raíz de un Cociente.

Se extrae la raíz tanto del numerador como del denominador, y luego se procede a dividir estas raíces resultantes.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos:

i) $\sqrt[5]{\frac{x^{20}}{y^{35}}} = \frac{\sqrt[5]{x^{20}}}{\sqrt[5]{x^{20}}} = \frac{x^4}{y^7}$

ii) $\sqrt[4]{\frac{16}{y^{35}}} = \frac{\sqrt[4]{x^{20}}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{2}{5}$

Introducción de un Factor en un Radical.

Se multiplica el exponente del factor por el índice del radical, de la siguiente forma.

$$a^p \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{pn} \,.\, b}$$

Ejemplos:

i) $x^2 \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{x^{(2)(5)}y} = \sqrt[5]{x^{10}y}$

i) $x^2 \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{x^{(5)(3)}y^2} = \sqrt[3]{x^{15}y^2}$

LEYES DE LOS SIGNOS EN LAS OPERACIONES ALGEBRAICAS

MULTIPLICACIÓN

El producto de dos términos de signos iguales es positivo, y de signos diferentes es negativo.

a) [+] . [+] = [+]

b) [-] . [-] = [+]

c) [+] . [-] = [-]

d) [-] . [+] = [-]

DIVISIÓN

La división de dos términos de signos iguales es positivo, y de signos diferentes es negativo:

a) $\frac{[+]}{[+]} = [+]$ b) $\frac{[+]}{[-]} = [-]$

c) $\frac{[-]}{[-]} = [+]$ d) $\frac{[-]}{[+]} = [-]$

POTENCIACIÓN

La potencia de una base con exponente par, siempre es positiva; pero la potencia de una base con exponente impar, depende del signo de la base:

a) $[+]^{par} = [+]$

b) $[+]^{impar} = [+]$

c) $[-]^{par} = [+]$

d) $[-]^{impar} = [-]$

RADICACIÓN

Si el índice es **impar**, el resultado tendrá el mismo signo que la cantidad subradical. Si el índice es **par** y la cantidad subradical es **positivo**, el resultado tendrá *doble signo*; positivo y negativo;pero, si la cantidad subradical es **negativa** el resultado será una cantidad imaginaria, que no existirá en el campo real.

a) $\sqrt[impar]{[+]} = [+]$

b) $\sqrt[impar]{[-]} = [-]$

c) $\sqrt[par]{[+]} = [\pm]$

d) $\sqrt[par]{[+]}$ = cantidad imaginaria

Nota:

Para efectos de estudio, se empleará, en el caso (c), raíces de índice par y cantidad subradical positivas; el signo aritmético de la raíz; es decir, el valor positivo.

EJERCICIO RESUELTOS

Sobre las leyes de la teoría de exponentes y los signos en las operaciones algebráicas.

1.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{2^{x+4} + 36(2^{x-2})}{2^{x+5} - 2(2^{x+3}) - 4(2^{x+1}) - 6(2^{x-1})}$$

Solución:

Por la ley de la teoría de exponentes se conoce que:

$$a^{m+n} = a^m \,.\, a^n \quad ; \quad a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

Aplicando al ejercicio:

$$E = \frac{2^x \,.\, 2^4 + 36\left(\frac{2^x}{2^2}\right)}{2^x \,.\, 2^5 - 2(2^x \,.\, 2^3) - 4(2^x \,.\, 2^1) - 6\left(\frac{2^x}{2}\right)}$$

Operando apropiadamente:

$$E = \frac{16 \,.\, 2^x + 9 \,.\, 2^x}{32 \,.\, 2^x - 16 \,.\, 2^x - 8 \,.\, 2^x - 3 \,.\, 2^x}$$

Se hace el cambio de $2^x = a$, para hacer más simple las operaciones:

$$E = \frac{16a + 9a}{32a - 16a - 8a - 3a} = \frac{25a}{5a} = 5$$

Rpta.: = 5

2.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{4^3\left(8^{\frac{4}{3}}\right)^{-n}}{[4(4^{-1})^n]^2}$$

Solución:

Transformemos el numerador, para escribir con base 4:

$$\left(8^{\frac{4}{3}}\right)^{-n} = \left[(2^3)^{\frac{4}{3}}\right]^{-n} = (2^4)^n = \left[(2^2)^2\right]^{-n} = 4$$

Reemplazando en la expresión original:

$$E = \frac{4^3 \,.\, 4^{-2n}}{(4^1 \,.\, 4^{-n})^2} = \frac{4^3 \,.\, 4^{-2n}}{(4^{1-n})^2} = \frac{4^{3-2n}}{4^{2-2n}}$$

$$E = 4^{3-2n(2-2n)} = 4^{3-2n-2+2n} = 4^1 = 4$$

Rpta.: = 4

3.- Hallar el valor de la expresión:

$$E = \sqrt[n]{\frac{20^{n+1}}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$$

Solución:

Transformando el denominador:

$$\begin{aligned} 4^{n+2} + 2^{2n+2} &= 4^{n+2} + 2^{2(n+1)} \\ &= 4^{n+2} + (2^2)^{n+1} \\ &= 4^{n+2} + 4^{n+1} \\ &= 4^{n+1}\,(4^1+1) \\ &= 4^{n+1} \,.\, 5 \end{aligned}$$

reemplazando en la expresión, y transformando el numerador:

$$E = \sqrt[n]{\frac{(4\,.\,5)^{n+1}}{4^{n+1}\,.\,5}}$$

operando en el numerador:

$$E = \sqrt[n]{\frac{4^{n+1}\,.\,5^{n+1}}{4^{n+1}\,.\,5^1}}$$

simplificando y descomponiendo la potencia:

$$E = \sqrt[n]{\frac{5^n\,.\,5^1}{4^1}} = \sqrt[n]{5^n} = 5^n = 5$$

Rpta.: 5

4.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{21^6\,.\,35^3\,.\,80^3}{15^4\,.\,14^9\,.\,30^2}$$

Solución:

Se sabe que: $(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$

descomponemos en factores primos, para aplicar esta ley:

$$E = \frac{(3\,.\,7)^6\,(7\,.\,5)^3\,(2^4\,.\,5)^3}{(3\,.\,5)^4\,(2\,.\,7)^9\,(2\,.\,3\,.\,5)^2}$$

aplicando la ley anterior:

$$E = \frac{3^6\,.\,7^6\,.\,73\,.\,5^3\,.\,2^{12}\,.\,5^3}{3^4\,.\,5^4\,.\,2^9\,.\,7^9\,.\,2^2\,.\,3^3\,.\,5^2}$$

multiplicando potencias de bases iguales:

$$E = \frac{3^6\,.\,7^9\,.\,5^6\,.\,2^{12}}{3^6\,.\,7^9\,.\,5^6\,.\,2^{11}}$$

simplificando:

$$E = \frac{2^{12}}{2^{11}} = 2^{12-11} = 2^1 = 2$$

Rpta.: 2

5.- Calcular el valor de:

$$E = \left[\sqrt[\sqrt[3]{3}]{3^{\sqrt{3}}}\right]^{\sqrt[-6]{3}}$$

Solución:

Escribimos la raíz principal en la forma exponencial:

$$E = \left[3^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}}\right]^{\sqrt[-6]{3}}$$

luego, transformamos los exponentes:

$$E = \left[(3)^{\frac{3^{1/2}}{3^{1/3}}}\right]^{3^{-1/6}} = \left[(3)^{3^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}}\right]^{3^{-1/6}}$$

$$= \left[3^{3^{\frac{1}{6}}}\right]^{3^{-\frac{1}{6}}} = (3)^{3^{\frac{1}{6}}\,.\,3^{-\frac{1}{6}}} = (3)^{3^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}} = 3^{3^0} = 3^1 = 3$$

Rpta.: 3

6.- Simplificar la expresión:

$$E = \left\{ m^{-1}\left[m(m^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^{-2}$$

Solución:

Efectuando operaciones:

$$E = (m^{-1})^{-2}\left[(m^1)^{\frac{1}{5}}\right]^{-2}\left\{\left[(m^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^{-2}$$

$$E = m^2\;.\;m^{-\frac{2}{5}}\;.\;m^{-\frac{3}{5}} = m^{2-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}}$$

$$E = m^{2 - \frac{2+3}{5}} = m^{2 - \frac{5}{5}} = m^{2-1} = m^1 = m$$

Rpta.: m

7.- Calcular:

$$E = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n+2]{4\sqrt{4^n}}}}$$

Solución:

Trabajando con el denominador:

$$\sqrt[n+2]{4\sqrt{4^n}} = \sqrt[n+2]{4 \,.\, 4^{n/2}}$$

$$= \sqrt[n+2]{4^{1+\frac{n}{2}}} = \sqrt[n+2]{4^{\frac{n+2}{2}}}$$

$$= \sqrt[n+2]{(2)^{2\frac{n+2}{2}}} = \sqrt[n+2]{2^{n+2}} = 2^{\frac{n+2}{n+2}} = 2$$

reemplazando, descomponiendo y simplificando:

$$E = \sqrt[n]{\frac{2^n \,.\, 2^1}{2}} = \sqrt[n]{2^n} = 2^{\frac{n}{n}} = 2^1 = 2$$

Rpta.: 2

8.- Calcular:

$$E = \sqrt[n]{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{5^{-2} + 2^{-n} + 3^{-n}}}$$

Solución:

En primer lugar transformemos el denominador:

$$E = \sqrt[n]{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{\frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}}$$

Dando común denominador en el denominador de la raíz:

$$E = \sqrt[n]{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{\left(\frac{6^n + 15^n + 10^n}{5^n \,.\, 2^n \,.\, 3^n}\right)}}$$

Luego:

$$E = \sqrt[n]{\frac{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{1}}{\left[\frac{10^n + 15^n + 6^n}{(5\,.\,2\,.\,3)^n}\right]}} = \sqrt[n]{\frac{(5\,.\,2\,.\,3)^n}{1}}$$

Simplificando:

$$E = \sqrt[n]{(30)^n} = 30^{\frac{n}{n}} = 30^1 = 30$$

Rpta.: 30

9.- Calcular:

$$E = \left[\frac{2^{n+1} \,.\, 5^{n+1} - 2^n \,.\, 5^n}{2^3 \,.\, 5^2 + 5^n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

Solución:

Separemos los exponentes que aparecen sumados:

$$E = \left[\frac{2^n \,.\, 2^1 \,.\, 5^n \,.\, 5^1 - 2^n \,.\, 5^n}{2^3 \,.\, 5^2 + 5^n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

Hagamos que: $2^n = a$; $5^n = b$:

$$E = \left[\frac{10ab - ab}{8b + b}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{9ab}{9b}\right]^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$$

reponiendo: $E = (2^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{n}{n}} = 2^1 = 2$

Rpta.: 2

10.- Calcular:

$$E = \left[\frac{\overbrace{x\,.\,x\,.\,x\,.\,\ldots\,.\,x}^{(3n+6)\text{ veces}}}{\underbrace{x\,.\,x\,.\,x\,.\,\ldots\,.\,x}_{(4n-2)\text{ veces}}}\right]\left[\frac{\overbrace{x\,.\,x\,.\,x\,\ldots\,.\,x}^{(2n+3)\text{ veces}}}{x^6}\right]\left[\frac{1}{x^{n+2}}\right]$$

Solución:

Cada expresión se reduce:

$$E = \left[\frac{x^{3n+6}}{x^{4n-2}}\right]\left[\frac{x^{2n+3}}{x^6}\right]\left[\frac{1}{x^{n+2}}\right]$$

Que se puede escribir así:

$$E = \frac{x^{3n}\,x^6}{x^{4n}\,x^{-2}} \cdot \frac{x^{2n}\,x^3}{x^6} \cdot \frac{1}{x^n\,x^2} = \frac{x^{3n+2n}\;.\;x^{6+3}}{x^{4n+n}\;.\;x^{-2+6+2}}$$

$$E = \frac{x^{3n}\,x^6}{x^{4n}\,x^{-2}} = \frac{x^{2n}\,x^3}{x^6} = x^{9-6} = x^3$$

Rpta.: x^3

11.- Resolver:

$$\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$$

Solución:

Transpongamos términos:

$$\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} = \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0$$

$$2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} = (2^3)^{\frac{x-3}{3x-7}}$$

$$2^{\frac{3x-1}{3x-3}} = 2^{\frac{x-3}{3x-7}}$$

Si igualamos los exponentes (dado que son funciones exponenciales):

$$\frac{3x-1}{3x-3} = \frac{3x-9}{3x-7}$$

$$(3x - 1)(3x - 7) = (3x - 3)\,(3x - 9)$$

$$9x^2 - 21x - 3x + 7 = 9x^2 - 27x - 9x + 27$$

simplificando:

$$-21x - 3x + 27x + 9x = 27 - 7$$

$$12x = 20$$

Rpta.: $x = \frac{5}{3}$

12.- Resolver:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}$$

Solución:

Transformemos buscando una base común:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{-1/2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

igualando los exponentes:

$$\frac{x-1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{1}$$

eliminado los denominadores:

$$2x - 2 - 1 = 4$$

$$2x = 7$$

Rpta.: $x = 7/2$

13.- Hallar el valor de:

$$E = \sqrt[n]{\frac{256^{n+1}\;\sqrt[n+1]{4^{n^2-1}}}{64^{n+1}\;\sqrt[\frac{1}{n}]{4^{-1}}}}$$

Solución:

Previamente se opera en forma parcial:

- $256^{n+1} = (64\;.\;4)^{n+1}$
  $= 64^{n+1}\;.\;4^{n+1}$

- $\sqrt[n+1]{4^{n^2-1}} = 4^{\frac{n^2-1}{n+1}} = 4^{\frac{n^2-1^2}{n+1}} = 4^{\frac{(n+1)(n-1)}{n+1}} = 4^{n-1}$

- $\sqrt[\frac{1}{n}]{4^{-1}} = 4^{\frac{-1}{\frac{1}{n}}} = 4^{-\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{n}}} = 4^{-n}$

Reemplazando las expresiones transformadas, en la expresión inicial:

$$E = \sqrt[n]{\frac{64^{n+1}\;.\;4^{n+1}\;.\;4^{n-1}}{64^{n+1}\;.\;4^{-n}}}$$

simplificando y efectuando:

$$E = \sqrt[n]{\frac{4^{n+1+n-1}}{4^{-n}}}$$

$$E = \sqrt[n]{4^{2n-(-n)}} = \sqrt[n]{4^{2n+n}} = \sqrt[n]{4^{3n}}$$

$$E = 4^{\frac{3n}{n}} = 4^3 = 64$$

Rpta.: 64

14.- Calcular el valor de:

$$R = \frac{4^{\frac{2a}{a-b}} + 12 \,.\, 4^{\frac{2b}{a-b}}}{\sqrt[a-b]{4^{a+b}}}$$

Solución:

La expresión se puede escribir así:

$$R = \frac{4^{\frac{2a}{a-b}} + 12 \,.\, 4^{\frac{2b}{a-b}}}{4^{\frac{a+b}{a-b}}} = \frac{4^{\frac{2a}{a-b}}}{4^{\frac{a+b}{a-b}}} + \frac{12 \,.\, 4^{\frac{2b}{a-b}}}{4^{\frac{a+b}{a-b}}}$$

Operando convenientemente:

$$R = 4^{\frac{2a}{a-b} - \frac{a+b}{a-b}} + \frac{12}{4^{\frac{a+b}{a-b} - \frac{2b}{a-b}}}$$

y, efectuando los exponentes:

$$R = 4^{\frac{2a-a-b}{a-b}} + \frac{12}{4^{\frac{a+b-2b}{a-b}}}$$

Simplificando:

$$R = 4^{\frac{a-b}{a-b}} + \frac{12}{4^{\frac{a-b}{a-b}}} = 4 + 3 = 7$$

Rpta.: 7

15.- Calcular el valor de:

$$E = \sqrt[81^{3^n}]{\left[\sqrt[3]{216^{3^{n+1}}}\right]^{3^{3^n}}}$$

Solución:

Por convenir, se realiza las siguientes equivalencias:

- $3^{3^n} \;=\; x$
- $81^{3^n} \;=\; (3^4)^{3^n} + (3^{3^n})^4 = x^4$
- $3^{3^{n+1}} \;=\; 3^{(3^n \,.\, 3^1)} = 3^{(3^n \,.\, 3)} = (3^{3^n})^3 = x^3$
- $216 \;=\; 6^3$

Reemplazando los equivalentes en la expresión propuesta:

$$E = \sqrt[x^4]{\left[\sqrt[3]{(6^3)^{x^3}}\right]^x}$$

Efectuando operaciones, de adentro hacia afuera:

$$E = \sqrt[x^4]{\left[\sqrt[3]{(6^3)^{x^3}}\right]^x} = \sqrt[x^4]{\left[6^{\frac{3x^3}{3}}\right]^x} = \sqrt[x^4]{\left[6^{x^3}\right]^{x^1}}$$

$$E = \sqrt[x^4]{6^{x^4}} = 6^{\frac{x^4}{x^4}} = 6$$

Rpta.: 6

16.- Calcular el valor de:

$$E = \sqrt[n-1]{\frac{4^{n-1}+1}{4^{1-n}+1}} + \sqrt[n-1]{\frac{5^{n-1}+1}{5^{1-n}+1}} + \sqrt[n-1]{\frac{6^{n-1}+1}{6^{1-n}+1}} + \sqrt[n-1]{\frac{7^{n-1}+1}{7^{1-n}+1}}$$

Solución:

Desarrollando el caso general:

$$\sqrt[n-1]{\frac{a^{n-1}+1}{a^{1-n}+1}} = \sqrt[n-1]{\frac{a^{n-1}+1}{a^{-(n-1)}+1}}$$

$$= \sqrt[n-1]{\frac{a^{n-1}+1}{\frac{1}{a^{n-1}}+1}} = \sqrt[n-1]{\frac{a^{n-1}+1}{\frac{1+a^{n-1}}{a^{n-1}}}}$$

$$= \sqrt[n-1]{\frac{\frac{a^{n-1}+1}{1}}{\frac{a^{n-1}+1}{a^{n-1}}}} = a^{\frac{n-1}{n-1}} = a$$

Por lo tanto, por analogía:

$$\sqrt[n-1]{\frac{4^{n-1}+1}{4^{1-n}+5}} = 4$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{5^{n-1}+1}{5^{1-n}+5}} = 5$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{6^{n-1}+1}{6^{1-n}+5}} = 6$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{7^{n-1}+1}{7^{1-n}+5}} = 7$$

Luego: $E = 4 + 5 + 6 + 7 = 22$

Rpta.: 22

17.- Simplificar:

$$E = \sqrt[n]{\frac{x^{3n} + \sqrt[n]{\dfrac{x^{4n^2} + x^{3n^2}}{x^{2n^2} + x^{n^2}}}}{x^n + 1}}$$

Solución:

Resolviendo por partes:

$$\sqrt[n]{\frac{x^{4n^2} + x^{3n^2}}{x^{2n^2} + x^{n^2}}} = \sqrt[n]{\frac{x^{3n^2}(x^{n^2}+1)}{x^{4n^2}(x^{n^2}+1)}}$$

$$= \sqrt[n]{x^{3n^2-n^2}} \qquad = \sqrt[n]{x^{2n^2}} = x^{2n}$$

Reemplazando:

$$E = \sqrt[n]{\frac{x^{4n^2} + x^{3n^2}}{x^{2n^2} + x^{n^2}}} = \sqrt[n]{\frac{x^{3n^2}(x^{n^2}+1)}{x^{4n^2}(x^{n^2}+1)}}$$

$$= \sqrt[n]{x^{2n}} = x^{\frac{2n}{n}}$$

Rpta.: x^2

18.- Simplificar:

$$E = \sqrt[n]{x^n\sqrt[n]{x^{n^2}\sqrt[n]{x^{n^3}\sqrt[n]{x^{n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}}}}$$

Extrayendo raíz a cada factor, sucesivamente:

$$E = x\,.\,\sqrt[n^2]{x^{n^2}\sqrt[n]{x^{n^3}\sqrt[n]{x^{n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}}}$$

$$E = x\,.\,x\,.\,\sqrt[n^3]{x^{n^3}\sqrt[n]{x^{n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}}$$

$$E = x\,.\,x\,.\,x\,.\,\sqrt[n^4]{x^{n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}$$

por lo que, al final se obtendrá:

$$E = \underbrace{x\,.\,x\,.\,x\,.\,x \ldots x}_{\text{“n” veces}} = x^n$$

Rpta.: x^n

19.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{\left[\sqrt[\sqrt[7]{7}]{\sqrt[7]{7}^{7^{7^{-1}}}}\right]^7}{\left[\left(7^{\sqrt[-7]{7}}\right)^{\sqrt[7]{7}}\left(7^{-\sqrt[7]{7}}\right)^{\sqrt[-7]{7}}\right]}$$

Solución:

Si definimos $\sqrt[7]{7} = x$, luego:

- $7^{7^{-1}} = 7^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{7} = x$
- $\sqrt[-7]{7} = 7^{-\frac{1}{7}} = \dfrac{1}{7^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{7}} = \dfrac{1}{x}$

Reemplazando:

$$E = \frac{\left(\sqrt[x]{x^x}\right)^7}{\left(7^{\frac{1}{x}}\right)^x \quad (7^{-x})^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{x^7}{7\,.7^{-1}} = \frac{x^7}{7^0} = 7$$

Reponiendo el valor de x:

$$E = \left(\sqrt[7]{7}\right)^7 = 7$$

Rpta.: 7

20.- Señalar el exponente de “x” después de simplificar (hay “n” radicales):

$$E = \sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3}}}}$$

Solución:

Suponiendo n = 1, se obtiene que:

$$\sqrt[4]{x^3} = x^{3/4} = x^{\frac{4-1}{4}}$$

Suponiendo n = 2, se obtiene que:

- $\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3}} = \sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^{3.4}.\,x^3}} = \sqrt[4^2]{x^{12}\,.\,x^3}$

$$= x^{\frac{15}{16}} = x^{\frac{4^2-1}{4^2}}$$

Suponiendo n = 3, se obtiene:

- $\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3}}} = \sqrt[4^3]{x^{63}} = x^{\frac{63}{4^3}} = x^{\frac{4^3-1}{4^3}}$

Suponiendo n = 4, se obtiene:

- $\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3}}}} = \sqrt[4^4]{x^{255}} = x^{\frac{4^3-1}{4^4}}$

y, así sucesivamente.

Para "n" casos se puede generalizar como:

$$E = x^{\frac{4^n-1}{4^n}}$$

luego, el exponente es: $\dfrac{4^n-1}{4^n}$

21.- Simplificar la expresión:

$$E = \left[\frac{6n + \dfrac{2^n \cdot 12^{n+2}}{4^{n+2}} \cdot \dfrac{30^{n+1}}{5^{n-1}}}{2^{n+1} \cdot 5^n + 25 \cdot 10^n - \dfrac{23 \cdot 5^n \cdot 14^n}{7^n}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

Solución:

Trabajando por partes:

- $\dfrac{2^n \cdot 12^{n+2}}{4^{n+2}} = \dfrac{2^n(4 \cdot 3)^{n+2}}{4^{n+2}} = \dfrac{2^n \cdot 4^{n+2} \cdot 3^{n+2}}{4^{n+2}}$

$$= 2^n \cdot 3^n \cdot 3^2 = 9 \cdot 6^n$$

- $\dfrac{30^{n+1}}{5^{n+1}} = \dfrac{(6 \cdot 5)^{n+1}}{5^{n+1}} = \dfrac{6^{n+1} \cdot 5^{n+1}}{5^{n+1}} = 6^n \cdot 6 = 6 \cdot 6^n$

- $2^{n+1} \cdot 5^n = 2 \cdot 2^n \cdot 5^n = 2(2 \cdot 5)^n = 2 \cdot 10^n$

- $\dfrac{23 \cdot 5^n \cdot (14)^n}{7^n} = \dfrac{23 \cdot 5^n \cdot (7 \cdot 2)^n}{7^n} = 23 \cdot 10$

Reemplazando:

$$E = \left[\frac{6^n + 9 \cdot 6^n - 6 \cdot 6n}{2 \cdot 10^n + 25 \cdot 10^n - 23 \cdot 10^n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$E = \left[\frac{4\,(6)^n}{4\,(10)^n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$E = \left[\left(\frac{6}{10}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{6}{10}$$

Rpta.: 0,6

22.- Simplificar:

$$E = \left[b^{b^{-b^{-b^{-b}}}}\right]^{\sqrt[\sqrt[b^b]{b}]{b}}$$

Solución:

Trabajando con el exponente:

$$\sqrt[\sqrt[b^b]{b}]{b} = b^{\frac{1}{\left(\sqrt[b^b]{b}\right)}} = b^{\left(\sqrt[b^b]{b}\right)^{-1}}$$

$$b^{\left[\left(b^{\frac{1}{b^b}}\right)\right]^{-1}} = b^{\left(b^{b^{-b}}\right)^{-1}} = b^{b^{-b^{-b}}}$$

A continuación, hagamos que $x = b^{-b^{-b}}$, y reemplacemos en E:

$$E = [b^{b^{-x}}]^{b^x} = b^{b^{-x} \cdot b^x} = b^{b^0} = b^1 = b$$

Rpta.: b

23.- Calcular:

$$E = \sqrt[n]{\frac{\dfrac{5^{2n} \cdot 2^{n+1} + 50^n}{5^n \cdot 8 - 5^{n+1}} \cdot \sqrt[n+1]{5^{n^2-1}}}{\sqrt{5^{-1}}\;\sqrt[1/n]{5^{-1}}}}$$

Solución:

Operando por partes:

- $5^{2n} \cdot 2^{n+1} + 50^n = (5^2)^n \cdot 2^n \cdot 2 + 50^n$

$$= 25^n \cdot 2^n \cdot 2 + 50^n = (25 \cdot 2)^n \cdot 2 + 50^n$$

$$= 50^n \cdot 2 + 50^n = 50^n \cdot 3 \qquad \text{(I)}$$

- $5^n \cdot 8 - 5^{n+1} = 5^n \cdot 8 - 5^n \cdot 5 = 5^n \cdot 3 \qquad$ (II)

- $5^{\frac{n^2-1}{n+1}} = 5^{\frac{(n+1)(n-1)}{n+1}} = 5^{n-1} \qquad$ (III)

- $\sqrt[1/n]{5^{-1}} = (5^{-1})^{\frac{1}{(1/n)}} = (5^{-1})^n = 5^{-n} \qquad$ (IV)

Reemplazando (I), (II), (II) y (IV) en E:

$$E = \left[\frac{\dfrac{50^n \,.\, 3}{5n \,.\, 3} \,.\, 5^{n-1}}{5^{-1} \,.\, 5^{-n}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{\left(\dfrac{50}{5}\right)^n . \, 5^{n-1}}{5^{-1-n}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[\frac{10^n \,.\, 5^{n-1}}{5^{-1-n}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{2^n \,.\, 5^n \,.\, 5^{n-1}}{5^{-1-n}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[2^n \,.\, 5^{n+n-1+1+n}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[2^n \,.\, 5^{3n}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left[(2 \,.\, 5^3)^n\right]^{n} = 2 \,.\, 5^3 = 250$$

Rpta.: 250

24.- Calcular el valor de:

$$E = \left[\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}} \;\; \sqrt[3]{3}^{\sqrt{3}^{\sqrt[3]{3}^{\,-1}}}\right]^{3 \,.\, \sqrt[3]{3}^{\,-1}}$$

Solución:

Haciendo $x = \sqrt[3]{3}$, por lo tanto $x^3 = 3$

Reemplazando:

$$E = \left[x^x \,.\, \sqrt[x]{x^3}^{\frac{1}{x}}\right]^{x^3 \,.\, \frac{1}{x}}$$

Efectuando las operaciones necesarias:

$$E = \left[x^x \,.\, \left(x^{\frac{3}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{x^2} = (x^x)^{x^2}\left[x^{\frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}}\right]^{x^2}$$

$$= x^{x^3} \,.\; x^3 = x^3 \,.\, 3 = 3 \;.\; 3 = 9$$

Rpta.: 9

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular:

$$E = \left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}}}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1}{2}$ e) 4

2. Hallar E = a.b en la relación:

$$a^b \,.\, b^a = 2^{2^{1/2}}$$

a) 1 b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{2}$ d) 2 e) 4

3. Simplificar:

$$E = \sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{25^{2^{-1}}}}}}}}}$$

a) 3 125 b) 625 c) 25 d) 5 e) $\sqrt[5]{5}$

4. Calcular "n" en la igualdad:

$$\underbrace{\sqrt{x^3\sqrt{x^3\sqrt{x^3 \;\ldots\ldots\; \sqrt{x^3}}}}}_{\text{"n" radicales}} = x^{\left(\frac{32}{93}\right)^{-1}}$$

a) 6 b) 3 c) 5 d) 4 e) 8

5. Efectuar:

$$J = \left(3^{\frac{1}{6}}\right)\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^{3}\sqrt[4]{\left(\frac{5}{3}\right)^{-6}\sqrt[5]{\left(\frac{5}{3}\right)^{-10}}}}}$$

a) $\sqrt[5]{6}$ b) $\sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt[6]{5}$ d) $\sqrt[6]{3}$ e) $\sqrt[5]{\dfrac{3}{5}}$

6. Efectuar:

$$\frac{15^6 \,.\, 12^4 \,.\, 5^9 \,.\, 6^3}{10^{11} \,.\, 3^{13} \,.\, 5^4}$$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 2 e) 6

7. Efectuar:

$$E = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-3^{-1}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-16^{-\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

a) 1/2 b) 1/4 c) 2 d) 4 e) 3

8. Calcular:

$$E = \left\{\sqrt[x^{x^{x}}]{x\; x^{x^{2x^{x}}}}\right\}^{x^{x^{x}} - \left[x^{x^{x}}\right]^{2}}$$

a) 1 b) x c) x^2 d) $\sqrt{x}$ e) x^x

9. Calcular:

$$E = \frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\ldots\infty}}}}{\sqrt[5]{x^3\sqrt[5]{x^3\sqrt[5]{x^3\ldots\infty}}}}$$

a) 1/x b) x c) x^2 d) x^3 e) $\sqrt[4]{x}$

10. Hallar la suma de exponentes de las variables x, y, z después de simplificar:

$$E = \sqrt[a]{\sqrt[b]{\frac{x^a}{y^b}}}\;\sqrt[b]{\sqrt[c]{\frac{y^b}{z^c}}}\;\sqrt[c]{\sqrt[a]{\frac{z^c}{x^a}}}$$

a) a b) b c) c d) 1 e) 0

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son igualdades relativas cuyas incógnitas aparecen como exponentes. Se entiende por igualdad relativa a aquella que se verifica para algunos valores que se le asigne a sus incógnitas.

Ejemplos de ecuaciones exponenciales:

i) $5^x = 125$

ii) $2^{3^{8^x}} = 512$

iii) $\left[A^{4^x}\right]^{2^{-x}} = A^{16^{45}}$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN EXPONENCIAL

Es el valor o valores que verifican la igualdad relativa.

Ejemplos:

i) $5^x = 125 \Rightarrow x = 3$, dado que: $5^3 = 125$

ii) $7^{x+1} = 343 \Rightarrow x = 2$, dado que: $7^{2+1} = 7^3 = 343$

Para obtener la solución se debe tener en cuenta:

1) Las bases de las potencias deben ser iguales.

2) Para que haya igualdad, los exponentes de las potencias, como consecuencia, deben ser iguales.

En resumen:

$$\text{Si } A^m = A^n \;\therefore\; m = n$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x \left(\frac{8}{27}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$$

Solución:

Transformando las potencias:

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^x \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{x-1} = \frac{2}{3}$$

Efectuando operaciones e invirtiendo la potencia:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^3\right\}^{x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3+3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3x+3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

Igualando los exponentes:

$$-x + 3 = -1$$

$$x = 4$$

Rpta.: 4

2.- Resolver:

$$3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$$

Solución:

Transformando las potencias:

$$3^x + \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{3^2} + \frac{3^x}{3^3} + \frac{3^x}{3^4} = 363$$

haciendo $y = 3^x$, se obtiene:

$$y + \frac{y}{3} + \frac{y}{9} + \frac{y}{27} + \frac{y}{81} = 363$$

eliminado denominadores:

$$81y + 27y + 9y + 3y = y = 363 \,.\, 81$$

reduciendo:

$$121y = 363 \,.\, 81$$

$$y = \frac{363 \,.\, 81}{121}$$

$$y = 243$$

pero: $y = 3^x = 243 = 3^5$

$\therefore\ x = 5$

Rpta.: 5

3.- Resolver:

$$9^{x+2} = 9^x + 240$$

Solución:

Descomponiendo las potencias:

$$9^x \,.\, 9^2 = 9^x + 240$$

haciendo: $y = 9^x$ (a)

$$81y = y + 240$$

de donde: $y = 3$

Sustituyendo en (a):

$$9^x = 3$$

o:

$$9^x = 9^{1/2}$$

ˆ $x = 1/2$

Rpta.: 1/2

4.- Resolver:

$$\left[5^{8^x}\right]^{4^{-x}} = 5^{16^{60}}$$

Solución:

Efectuando operaciones:

$$5^{8^x \,.\, 4^{-x}} = 5^{16^{60}}$$

igualando exponentes:

$$8^x \,.\, 4^{-x} = 16^{60}$$

transformando:

$$\left(2^3\right)^{x}\left(2^2\right)^{-x} = \left(2^4\right)^{60}$$

$$2^{3x} \,.\, 2^{-2x} = 2^{240}$$

$$2^{3x-2x} = 2^{240}$$

$$2^x = 2^{240}$$

$\therefore\ x = 240$

Rpta.: 240

5.- Resolver:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{4^x}} = 0{,}7071$$

Solución:

Obsérvese que: $0{,}7071 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{4^x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{4^{1/2}}}$$

de donde: $4^x = 4^{1/2}$

luego: $x = \dfrac{1}{2}$

Rpta.: 1/2

6.- Resolver:

$$x^{x^3} = 3$$

Solución:

Haciendo el cambio de variable:

$$y = x^3 \qquad \text{(a)}$$

Extrayendo raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{y}$$

$$x = \sqrt[3]{y} \qquad \text{(b)}$$

reemplazando (a) y (b) en la ecuación inicial:

$$\left(\sqrt[3]{y}\right)^y = 3$$

o, también:

$$\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^y = 3$$

$$y^{\frac{y}{3}} = 3$$

Elevando al cubo, se tendrá:

$y^y = 3^3$ de donde: $y = 3$

reemplazando en (b):

$$x = \sqrt[3]{3}$$

Rpta.: $\sqrt[3]{3}$

7.- Resolver:

$$\left[5^{3^9}\right]^{3^{3^x}} = 5^{9^9}$$

Solución:

Efectuando operaciones:

$$5^{3^9 \,.\, 3^{3^x}} = 5^{9^9}$$

o:

$$5^{3^{9+3^x}} = 5^{9^9}$$

de donde:

$$3^{9+3^x} = 9^9 = (3^2)^9 = 3^{18}$$

igualando los exponentes:

$$9 + 3^x = 18$$

$$3^x = 9 = 3^2$$

luego: $x = 2$

Rpta.: 2

8.- Calcular el valor de "n":

$$\sqrt[n-1]{\frac{x^{n^2} + x^{n^2+5}}{x^n + x^{n+5}}} = x^5$$

Solución:

Descomponiendo las potencias:

$$\sqrt[n-1]{\frac{x^{n^2} + x^{n^2} \,.\, x^5}{x^n + x^n \,.\, x^5}} = x^5$$

factorizando los numeradores y denominadores:

$$\sqrt[n-1]{\frac{x^{n^2}(1 + x^5)}{x^n(1 + x^5)}} = x^5$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{x^{n^2}}{x^n}} = x^5$$

$$\sqrt[n-1]{x^{n^2-n}} = x^5$$

$$x^{\frac{n(n-1)}{(n-1)}} = x^5$$

$$x^n = x^5$$

luego:

$$n = 5$$

Rpta.: 5

9.- Resolver la siguiente ecuación exponencial:

$$3^{3^x} = 27^{9^{x-4}}$$

Solución:

Como $27 = 3^3$ entonces:

$$3^{3^x} = (3^3)^{9^{x-4}} = 3^{3.9^{x-4}}$$

igualando los exponentes:

$$3^x = 3 \,.\, 9^{x-4} = 3 \,.\, (3^2)^{x-4} = 3^1 \,.\, 3^{2x-8} = 3^{2x-7}$$

$$3^x = 3^{2x-7}$$

igualando los exponentes:

$$x = 2x - 7$$

$\therefore\ x = 7$

Rpta.: 7

10.- Resolver la siguiente ecuación exponencial:

$$\left[(a^x)^x\right]^{x^{-x}} = a^{\sqrt{1/8}}$$

Solución:

Efectuando operaciones:

$$\left(a^{x^2}\right)^{x^{-x}} = a^{\sqrt{\frac{1}{2^3}}}$$

$$a^{x^2 \cdot x^{-x}} = a^{\sqrt{2^{-3}}}$$

igualando los exponentes:

$$x^2 \cdot x^{-x} = \sqrt{2^{-3}}$$

$$x^{2-x} = 2^{-3/2} = \left(2^{-1}\right)^{3/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}$$

$$x^{2-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-\frac{1}{2}}$$

por comparación:

$$x = \frac{1}{2}$$

Rpta.: $\frac{1}{2}$

11.- Resolver:

$$\sqrt[n]{\frac{x^n + a^n}{(b^2a)^n + x^n}} = \frac{1}{b}$$

Solución:

Elevando a la potencia "n" ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{x^n + a^n}{(b^2a)^n + x^n} = \frac{1}{b}$$

$$b^n(x^n + a^n) = (b^2a)^n + x^n$$

$$b^nx^n + b^na^n = b^{2n}a^n + x^n$$

transponiendo términos:

$$b^nx^n - x^n = b^{2n}a^n - b^na^n$$

$$x^n\,(b^n - 1) = b^na^n\,(b^n - 1)$$

simplificando:

$$x^n = b^na^n$$

$$x^n = (ab)^n$$

$\therefore\ x = ab$

Rpta.: ab

12.- Resolver:

$$b^{x^{n-x}} = x^{x^{x^{x^n}}}$$

donde : $b = x^{x^x}$

Solución:

Reemplazando "b" en la ecuación:

$$\left(x^{x^x}\right)^{x^{n-x}} = x^{x^{x^{x^n}}}$$

Efectuando operaciones:

$$x^{x^x \cdot x^{n-x}} = x^{x^{x^{x^n}}}$$

$$x^{x^{x+n-x}} = x^{x^{x^{x^n}}}$$

$$x^{x^n} = x^{x^{x^{x^n}}}$$

igualando exponentes:

$$x^n = x^{x^{x^n}}$$

igualando exponentes nuevamente:

$$n = x^{x^n}$$

Elevando a la "n" potencia e intercambiando los exponentes:

$$n^n = \left(x^{x^n}\right)^n = \left(x^n\right)^{x^n}$$

de aquí se obtiene:

$$x^n = n$$

de donde:

$$x = \sqrt[n]{n}$$

Rpta: $\sqrt[n]{n}$

13.- Resolver:

$$18^{-\frac{x}{18}} = x^{-1} \cdot 12^{\frac{x}{18}}$$

Solución:

Transformando los exponentes negativos en positivos:

$$\frac{1}{18^{\frac{x}{18}}} = \frac{1}{x} \cdot 12^{\frac{x}{18}}$$

transponiendo:

$$x = 18^{\frac{x}{18}} \,.\, 12^{\frac{x}{18}} = (18 \,.\, 12)^{\frac{x}{18}}$$

$$x = (3^2 \,.\, 2 \,.\, 2^2 \,.\, 3)^{\frac{x}{18}} = (3^3 \,.\, 2^3)^{\frac{x}{18}}$$

$$x = \left[(3 \,.\, 2)^3\right]^{\frac{x}{18}}$$

efectuando:

$$x = 6^{\frac{x}{6}}$$

elevando a la $\frac{1}{x}$:

$$x^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{1}{6}}$$

por lo tanto:

$$x = 6$$

Rpta.: 6

14.- Resolver:

$$(b^b \,.\, x)^x = b^{b^{1-b}}$$

Solución:

Elevando a la potencia b^b:

$$(b^b \,.\, x)^{b^b \,.\, x} = b^{b^{1-b} \,.\, b^b} = b^{b^{1-b+b}} = b^b$$

luego:

$$(b^b . \,x)^{b^b \,.\, x} = b^b$$

identificando exponentes:

$$b^b \,.\, x = b \quad ; \quad x = \frac{b}{b^b}$$

$$\therefore\ x = b^{1-b}$$

Rpta.: b^{1-b}

15.- Resolver:

$$4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

Solución:

Transformando adecuadamente:

$$4^x - \frac{3^x}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^x \,.\, 3^{\frac{1}{2}} - \frac{4^x}{4^{\frac{1}{2}}}$$

Transponiendo términos negativos:

$$4^x + \frac{4^x}{2} = 3^x \,.\, 3^{\frac{1}{2}} + \frac{3^x}{\sqrt{3}}$$

$$4^x\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$4^x\left(\frac{3}{2}\right) = 3^x\left(\frac{3+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$4^x \,.\, \frac{3}{2} = 3^x \,.\, \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$4^x = \frac{8 \,.\, 3^x}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4^x}{3^x} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{4^{3/2}}{3^{3/2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}$$

por lo tanto:

$$x = \frac{3}{2}$$

Rpta.: $\frac{3}{2}$

16.- Resolver:

$$\sqrt[\frac{2}{9}-x]{m^{\frac{1}{3}+x}} = \sqrt[\frac{2}{9}+x]{m^{\frac{1}{3}-x}} = \sqrt[\left(\frac{2}{9}\right)^2 - x^2]{m^2}$$

Solución:

Transformando a fórmulas exponenciales:

$$m^{\frac{\frac{1}{3}+x}{\frac{2}{9}-x}} = m^{\frac{\frac{1}{3}-x}{\frac{2}{9}+x}} \,.\, m^{\frac{2}{(2/9)^2 - x^2}}$$

de aquí:

$$m^{\frac{\frac{1}{3}+x}{\frac{2}{9}-x}} = m^{\frac{\frac{1}{3}-x}{\frac{2}{9}+x} + \frac{2}{\left(\frac{2}{9}\right)^2 - x^2}}$$

igualando exponentes:

$$\frac{\frac{1}{3}+x}{\frac{2}{9}-x} = \frac{\frac{1}{3}-x}{\frac{2}{9}+x} + \frac{2}{\left(\frac{2}{9}+x\right)\left(\frac{2}{9}-x\right)}$$

Eliminado denominadores:

$$\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(\frac{2}{9}+x\right) = \left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{2}{9}-x\right) + 2$$

Efectuando operaciones:

$$\frac{2}{27} + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x + x^2 = \frac{2}{27} - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}x + x^2 + 2$$

eliminando términos y transponiendo:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x + \frac{2}{9}x = 2$$

eliminando denominadores:

$$3x + 3x + 2x + 2x = 18$$

$$10x = 18$$

$$x = 1,8$$

Rpta.: 1,8

17.- Resolver la ecuación exponencial:

$$x^x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Solución:

Trabajando con el segundo miembro:

$$x^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{8}} = \left[\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{8}}$$

$$x^x = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{16}}$$

como consecuencia:

$$x = \frac{1}{16}$$

Rpta.: $\frac{1}{16}$

VALOR NUMÉRICO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se denomina valor numérico de una expresión algebraica al valor que toma dicha expresión cuando se le asigna determinados valores a sus letras.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el valor numérico de:

$$E = \sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^{\left(\frac{1}{z}\right)^{-1}} - \left(\frac{1}{y}\right)^{\left(-\frac{1}{y}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{x}\right)^{-\left(\frac{1}{x}\right)}}^{\,-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

para: x = 4, y = 2, z = 3

Solución:

Reemplazando los valores asignados:

$$E = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}}$$

Efectuando operaciones y transformaciones:

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \sqrt{(3)^3 - (2)^2 + (4)^{1/2}}$$

$$= \sqrt{27 - 4 + 2} = \sqrt{25} = 5$$

Rpta.: 5

2.- Calcular el valor numérico de:

$$E = \left[\frac{a^{b^{1-a}} + b^{a^{1-b}}}{a^{b^{1+a}} + b^{a^{1+b}}}\right]^2$$

para: $a^b = 2$ y $b^a = 0,5$

Solución:

Transformando previamente:

$$E = \left[\frac{a^{b\,.\,b^{-a}} + b^{a\,.\,a^{-b}}}{a^{b\,.\,b^{a}} + b^{a\,.\,a^{b}}}\right]^2 = \left[\frac{a^{b(b^a)^{-a}} + b^{a(a^b)^{-b}}}{a^{b\,.\,b^{a}} + b^{a\,.\,a^{b}}}\right]^2$$

reemplazando los datos:

$$E = \left[\frac{(a^b)^{\frac{1}{b^a}} + (b^a)^{\frac{1}{a^b}}}{(a^b)^{b^a} + (b^a)^{a^b}}\right]^2 = \left[\frac{2^{0,5} + (0\ 5)^{\frac{1}{2}}}{2^{0,5} + (0\ 5)^{2}}\right]^2$$

$$E = \left[\frac{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}}\right]^2 = \left[\frac{4 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + \frac{1}{4}}\right]^2 = \left[\frac{4}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$E = \frac{16}{2} = 8$$

Rpta.: $E = 8$

3.- Hallar el valor numérico de:

$$E = x^{x^{x+x^{x+x^x}}} \quad ; \quad \text{para: } x^{x^x} = 2$$

Solución:

Transformando la expresión:

$$E = x^{x^x \,.\, x^{x^{x+x^x}}} = x^{x^x \,.\, x^{x^x} \,.\, x^{x^x}} = \left(x^{x^x}\right)^{\left(x^{x^x}\right)^{\left(x^{x^x}\right)}}$$

Reemplazando el dato:

$$E = (2)^{(2)^{(2)}} = 2^4 = 16$$

Rpta.: $E = 16$

4.- Hallar el valor numérico de:

$$E = \left[\frac{\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3\sqrt[3]{x^4}}}}}{\sqrt[1/2]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

para: $x = 16$

Solución:

Transformando el numerador y denominador separadamente:

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3\sqrt[3]{x}}}} = \sqrt[36]{x^{43}} = x^{43/36}$$

$$\sqrt[1/2]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}} = \sqrt[9]{x^{31}} = x^{31/9}$$

reemplazando:

$$E = \left[\frac{x^{\frac{43}{36}}}{x^{\frac{31}{9}}}\right]^{-\frac{1}{9}} = \left[x^{\frac{43}{36}-\frac{31}{9}}\right]^{-\frac{1}{9}} = \left[x^{\frac{43-124}{36}}\right]^{-\frac{1}{9}}$$

$$= \left[x^{-\frac{81}{36}}\right]^{-\frac{1}{9}} = x^{\left(\frac{81}{36}\right)\left(\frac{1}{9}\right)} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$$

$$E = \sqrt[4]{16} = 2$$

Rpta.: $E = 2$

5.- Calcular el valor numérico de:

$$E = x^{xy}$$

si se cumple las condiciones siguientes:

$$x^a y^b = 2^a \qquad (1)$$

$$x^b y^a = 2^b \qquad (2)$$

Solución:

Multiplicando (1) . (2):

$$x^{a+b} \,.\, y^{a+b} = 2^{a+b}$$

de aquí:

$$xy = 2 \qquad (3)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{x^{a-b}}{y^{a-b}} = 2^{a-b}$$

$$\frac{x}{y} = 2$$

Luego, se deduce que:

$$x = 2y \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$(2y)\ (y) = 2$$

$$2y^2 = 2$$

$$\therefore \qquad y = 1$$

Sustituyendo en (4):

$$x = 2y$$

$$\therefore \qquad x = 2(1) = 2$$

Por lo tanto:

$$E = (x)^{xy} = (2)^{2.1} = 4$$

Rpta.: $E = 4$

6.- Calcular el valor numérico de:

$$E = \frac{x + b}{x - b}\sqrt{\frac{a^2 - 2bx}{a^2 + 2bx}}$$

para $x = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$E = \sqrt{\frac{(a^2 - 2bx)\ (x + b)^2}{(a^2 + 2bx)\ (x - b)^2}}$$

Solución:

Introduciendo factores:

Operando el cuadrado cada expresión:

$$E = \sqrt{\frac{(a^2 - 2bx)\ (x^2 + 2bx + b^2)}{(a^2 + 2bx)\ (x^2 - 2bx + b^2)}}$$

si $x = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow x^2 = a^2 - b^2$

reemplazando:

$$E = \sqrt{\frac{(a^2 - 2bx)\ (a^2 - b^2 + 2bx + b^2)}{(a^2 + 2bx)\ (a^2 - b^2 + 2bx + b^2)}}$$

$$E = \sqrt{\frac{(a^2 - 2bx)\ (a^2 + 2bx)}{(a^2 + 2bx)\ (a^2 - 2bx)}}$$

Rpta.: $E = 1$

7.- Calcular el valor numérico de:

$$E = x^{5x^{x^x}.\left[x^{x(x^{x-1}-1)}+1\right]}$$

para: $x^{x^{x^x}} = 2$

Solución:

Transformando la expresión:

$$E = x^{5x^{x^x}.\left[x^{x^{+1}.\,x^{x-1}-x}+1\right]} = x^{5x^{x^x}.\left[x^{x^x-x}+1\right]}$$

$$E = x^{5x^{x^x}.\left(x^{x^x-x}\right)+x^x} = x^{5x^{x^{x+x^x-x}}}.\ x^{x^x}$$

$$E = x^{5x^{x^{x^x}}}.\ x^{x^x}$$

el orden de los factores exponentes no altera el producto y sacando 5:

$$E = \left[\left(x^{x^{x^x}}\right)x^{x^{x^x}}\right]^5$$

Reemplazando $x^{x^{x^x}} = 2$ se obtiene:

$$E = \left[(2)^2\right]^5 = 2^{10} = 1\ 024$$

Rpta.: 1 024

8.- Calcular el valor numérico de:

$$E = \frac{b\sqrt{b + x} + x\sqrt{b + x}}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{para: } x = \frac{b\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2}}$$

Solución:

Factorizando y efectuando:

$$E = \frac{\left(\sqrt{b + x}\right)\ (x + b)}{\sqrt{x^3}} = \frac{\sqrt{(b + x)^3}}{\sqrt{x^3}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b+x}{x}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{b}{x} + 1\right)^3}$$

Reemplazando "x":

$$E = \sqrt{\left[\frac{\dfrac{b}{b\sqrt[3]{a^2}} + 1}{\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2}}\right]^3}$$

$$E = \sqrt{\left[\frac{\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} + 1\right]^3}$$

$$E = \sqrt{\left[\frac{\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} + 1\right]^3}$$

$$E = \sqrt{\left[\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}}\right]^3} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a}$$

Rpta.: $E = \dfrac{b}{a}$

9.- Calcular el valor numérico de:

$$E = \frac{\sqrt{(a+b)(b+c+d)}}{b} + \frac{\sqrt{(a+b+c)(c+d+b)}}{cd} + \frac{\sqrt{(a+b)(a+c+d)}}{a}$$

si: $ab + ac + ad + bc + bd = 0$

Solución:

Efectuando operaciones se obtiene:

$$E = \frac{\sqrt{ab + ac + ad + b^2 + bc + bd}}{b} + \frac{\sqrt{(c+d)^2 + ab + ac + bc + bd + ad}}{c+d}$$

reemplazando por el valor del dato se obtiene:

$$E = \frac{\sqrt{b^2}}{b} + \frac{\sqrt{(c+d)^2}}{c+d} + \frac{\sqrt{a^2}}{a} = \frac{b}{b} + \frac{c+d}{c+d} + \frac{a}{a}$$

$$E = 1 + 1 + 1 = 3$$

Rpta.: $E = 3$

10.- Calcular el valor numérico de $E = x+y$, en la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{ab^{n-1}}{\sqrt[n-1]{ab}}} = b^x \sqrt[n-y]{ab}$$

Solución:

Efectuando operaciones en el primer miembro:

$$\sqrt[n-2]{a^{1-\frac{1}{n-1}} \cdot b^{n-1-\frac{1}{n-1}}} = \sqrt[n-2]{a^{\frac{n-2}{n-1}} \cdot b^{\frac{n^2-2n+1-1}{n-1}}}$$

$$\sqrt[n-2]{a^{\frac{(n-2)}{n-1}} \cdot b^{\frac{n(n-2)}{n-1}}} = a^{\frac{1}{n-1}} \cdot b^{\frac{n}{n-1}}$$

Igualando el segundo miembro:

$$a^{\frac{1}{n-1}} \cdot b^{\frac{n}{n-1}} = b^x \cdot a^{\frac{1}{n-y}} \cdot b^{\frac{1}{n-y}} = b^{x+\frac{1}{n-y}} \cdot a^{\frac{1}{n-y}}$$

Por lo tanto, se puede deducir que:

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-y}$$

$$n - y = n - 1$$

$$y = 1$$

Del mismo modo, también se deduce que:

$$x + \frac{1}{n-y} = \frac{n}{n-1}$$

$$x + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

$$x + \frac{1}{n-y} = \frac{n}{n-1} \Rightarrow x = 1$$

$$\therefore E = x + y = 1 + 1 = 2$$

Rpta.: $E = 2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de:

$$E = \sqrt[n]{\frac{9^{n+1/4}\sqrt{3^{n-2}}}{\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{3^n}}}}$$

a) 3 b) $\sqrt{3}$ c) 9 d) 27 e) 81

2. Calcular el valor de:

$$E = \frac{1}{m}\left[\frac{x^m + \sqrt[m]{x}}{m+1}\right]^{m^2-1}$$

para $x = \sqrt[m+1]{\sqrt[m-1]{m^m}}$

a) 1 b) m^m c) m d) $\sqrt{m}$ e) m^{m+1}

3. Simplificar la expresión:

$$E = \left[\sqrt[1-\frac{1}{x}]{\left(x^{x^{-2}}\right)^{x^2-1}}\right]^{\frac{x}{x+1}}$$

a) x^2 b) x^x c) $\sqrt[x]{x}$ d) 1 e) x

4. Simplificar la expresión:

$$y = \sqrt[\frac{1}{a^a}]{a^{a^{-a}}\sqrt[a]{a^{a^a}\sqrt[a^a]{a^{a^{2a}}}}} \;.\; a^{-2a^{-1}}$$

a) a^a b) a^{2a} c) a d) $\sqrt{a}$ e) a^{-a}

5. Simplificar:

$$E = \frac{\left\{(ab)^{-1}\left[ab\left\{(ab)^3\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^{-2}}{\left\{\left[\left(\sqrt{ab}\,\sqrt{ab}\,\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2n}{m}}\left[a^{\frac{1}{m}}\,b^{\frac{1}{m}}\right]^{-2n}\right\}^{m}}$$

a) ab b) $\frac{a}{b}$ c) $\frac{1}{ab}$ d) 1 e) a

6. Simplificar:

$$J = \sqrt[m]{\frac{2^{m+3}\,.\,7^{2m+1} - 2^{m+1}\,.\,7^{2m}}{2^{m+5}\,.\,7^{2m} - 2^{m+1}\,.\,7^{2m+1}}}\cdot\left(\sqrt[m]{3}\,\right)^{-1}$$

a) 3 b) $\sqrt[m]{9}$ c) $\sqrt[m]{27}$ d) 3^m e) 1

7. Si $x^y = y^x$, calcular:

$$G = \sqrt[2xy^{-x}]{\left[x^{-y}\right]^{-x^{-y}}\left[y^{-x}\right]^{-y^{-x}}}$$

a) x b) y^x c) y d) x^{-y} e) y^x

8. Calcular:

$$C = \sqrt[n-1]{\frac{10^{n-1} + 6^{n-1} + 15^{n-1}}{\left(2^{n-1}\right)^{-1} + \left(3^{n-1}\right)^{-1} + \left(5^{n-1}\right)^{-1}}}$$

a) 1 b) 6 c) 30 d) 10 e) 18

9. Calcular:

$$R = \sqrt[-\frac{1}{\sqrt[\sqrt{2}]{2}}]{2^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{-1}}}$$

a) 1/2 b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) 2 e) 4

10. Simplificar:

$$E = \sqrt[\sqrt{x}^{-1}]{\left(x^{x^{-1}}\right)^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}^{x^{-1}}\right)^{\sqrt{x}}}$$

a) x b) $\sqrt{x}$ c) 1 d) $x\sqrt{x}$ e) $\sqrt{x^5}$

11. Simplificar:

$$R = \left[\frac{x^{n^{-1}}\,.\,(x^n)^{-1^{2n}}\left(x^{n^{-1}}\right)^{n-1}}{\underbrace{\sqrt[-n]{x^{-2}}\,.\,\sqrt[-n]{x^{-2}}\,\ldots\,\sqrt[-n]{x^{-2}}}_{\frac{n^2}{2}\text{ veces}}}\right]\cdot\left[\frac{3\sqrt{x^2\sqrt{x^{-3}}}}{\sqrt{\left(x\sqrt[3]{x^{10}}\right)^{-1}}}\right]$$

a) x^6 b) x^9 c) x^3 d) x e) 1

12. Simplificar:

$$L = \frac{\left\{\left[(a^2)^3\right]^4\right\}^{-1/16} . a^{-11/6} . \left\{a^2\left[a^3(a^2)^{-2}\right]^{-1}\right\}^2}{\left[\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}}\right]^{-12} . \left[\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^{-4}}}}}\right]^{27}}$$

a) a^{10} b) a^8 c) a^{12} d) a^{13} e) 1

13. Calcular:

$$y = \left[\sqrt[\sqrt[\sqrt{7}]{7}]{\sqrt{\sqrt[7]{7}}}\right]^{\sqrt{7}} \left[\sqrt[-7^{\sqrt{7}^{-1}}]{\sqrt{7}}\right]^{\frac{\sqrt{7}}{7}}$$

a) 7 b) 1 c) $\sqrt{7}$ d) 49 e) 343

14. Señalar el exponente de "x", después de simplificar:

$$P = \left[\frac{\dfrac{\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{6x}}}{\sqrt[8]{x}}}{\dfrac{\sqrt[3]{x} . \sqrt[9]{x}}{\sqrt{x}}}\right]^{72}$$

a) 3 b) 2 c) 4 d) 1 e) 5

15. Efectuar:

$$J = \left(\frac{1}{2^{\left(\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}}\right)^{\left[\sqrt{4}^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{4}} \left[\sqrt{4}^{\sqrt{4}}\right]^{\sqrt{2}} \left[\sqrt{4}^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{3}}}$$

a) $2^{\sqrt{3}}$ b) $3^{\sqrt{2}}$ c) $6^{\sqrt{6}}$ d) $2^{\sqrt{6}}$ e) $6^{\sqrt{2}}$

16. Efectuar:

$$R = \left\{\frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-1} . \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}}{\left[2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1}\right]^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}\right\}^{-2}$$

a) 25 b) 16 c) 4 d) 9 e) 81

17. Efectuar:

$$A = \left[\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{4\sqrt{3\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{8\left(27\sqrt[4]{27}\right)}}}\right]^{-\frac{1}{2}} \left[\sqrt[\frac{1}{6}]{\frac{\sqrt[3]{4\sqrt{3\sqrt{3}}}}{9\sqrt{64\sqrt[4]{27}}}}\right]$$

a) 1/2 b) 1/3 c) 1/9 d) 1/4 e) 2

18. Calcular:

$$C = \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{32^n + 8}{2^{5n-8} + 1} + \frac{16}{5}\sqrt{\frac{90^n}{6^{2n}}}} - \sqrt[n]{\frac{32^n + 16^n}{8^n + 4^n}}}}{\sqrt[n+1]{\frac{2^{3n+2}}{8^{n+1} - 2^{3n+2}}} - \sqrt[1-n]{\frac{3^{1-n} + 1}{3^{n-1} + 1}}}$$

a) 1 b) 0 c) -1 d) -2 e) 1/2

19. Expresar en forma simplificada:

$$L = \sqrt{x^n\sqrt{x^{n-1}\sqrt{x^{n-2} \ldots \sqrt{x^3\sqrt{x^2\sqrt{x}}}}}}$$

a) $x^n\sqrt{x}$ b) $x^{n-1}\sqrt[n]{x}$ c) $x^{n-1}\sqrt[2^n]{x}$

d) $\sqrt[n^2]{x^{n^2}}$ e) x

20. Simplificar la expresión:

$$E = \left[\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x}}}{x}}}{x}}\right]^{-\frac{16}{30}}$$

a) x b) $\sqrt{x}$ c) x^2 d) $\frac{1}{x}$ e) 1

21. Resolver la ecuación exponencial:

$$x^{-x^{2x^2}} = \sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt{2}}$$

a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 2

22. Hallar el valor de "x" y n en la siguiente igualdad:

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^n}}}}}} = 2^{-2}$$

a) $x = 2$ $\quad n = 1/4$

b) $x = \sqrt{2}$ $\quad n = 2$

c) $x = 2^{-8}$ $\quad n = 2^{-2}$

d) $x = 2^{-5}$ $\quad n = 2^{-2}$

e) $x = 2^{-8}$ $\quad n = 1/8$

23. Calcular "x" en:

$$\sqrt[n]{\frac{x^n + 9^n}{81^n + x^n}} = \frac{1}{3}$$

a) 27 b) 9 c) 3 d) 81 e) 243

24. Calcular "x" después de resolver:

$$\sqrt[4]{6\ 561}\ .\ 12^{\sqrt{x}} = 6^x$$

a) $\frac{1}{4}$ b) 4 c) 9 d) $\frac{1}{9}$ e) 16

25. Calcular el valor de "a" después de resolver:

$$a^a = b^b$$

$$a^b = 2a$$

siendo $a \neq b$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{1}{4}$ d) 8 e) 4

26. Resolver y dar un valor de "x" en:

$$(3x + y)^{x-y} = 9$$

$$\sqrt[x-y]{324} = 18x^2 + 12xy + 2y^2$$

a) -3/4 b) -9/4 c) 5/4 d) 3/4 e) 9/4

27. Resolver la ecuación exponencial:

$$x^{x^{2x^2}} = 4$$

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) $\frac{1}{4}$

28. Resolver y dar el valor de "y" en:

$$(2x)^{x+y} = (y)^{2x+y}$$

$$(2x)^x = \left(\frac{2x}{y}\right)^y$$

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{9}{16}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{-9}{16}$ e) $\frac{9}{4}$

29. Resolver:

$$x^{2x-1} = 2$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{16}$

30. Resolver:

$$2^{2x+2} - 2\ .\ 3^{2x+2} = 6^x$$

a) 2 b) 1 c) -2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{-1}{2}$

31. Si E = 16, calcular "x" siendo:

$$E = 4^{x^x}\ .\ 4^{-x^x}\ .\ 4^{x^{-x}}\ .\ 4^{-x^{-x}}\ .\ 2^{x^x}$$

a) 2 b) -2 c) 3 d) -3 e) 4

32. Calcular el valor de:

$$F = \left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}\right)\left(\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{a}}}\right)\left(\sqrt{c\sqrt{a\sqrt{b}}}\right)$$

si $abc = u^8$

a) u^3 b) u^5 c) u^7 d) u^9 e) u^{11}

33. Calcular el valor de $A = xyz$ si:

$$(0,1)^{0,4}\ (0,2)^{0,3}\ (0,3)^{0,2}\ (0,4)^{0,1} = 2^x\ .\ 3^y\ .\ 5^z$$

a) 0,1 b) -0,1 c) 0,12 d) -0,12 e) 1/5

34. Calcular el valor de "n" en:

$$\left\{\left[81^{-8^{-3^{-1}}}\right]^{-2} + \left[27^{-9^{-2^{-1}}}\right]^{-4}\right\}^n = 3\sqrt[4]{2}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{1}{8}$

35. Hallar el valor numérico de:

$$R = \sqrt[3]{\frac{x\sqrt[5]{x}\;\sqrt{x}}{\sqrt{x^{5}}\;\sqrt{x}}}$$

para $x = \sqrt[7]{2^{60}}$

a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 2

36. Calcular $Y = x^{-x^{5}}$, si se cumple que:

$$x^{5x^{x^{x^{5}}}} = 3\,125$$

a) 5 b) $\sqrt[5]{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) 5^{5} e) 5^{-5}

37. Calcular el valor de $E = P^{P}$

si $\sqrt{x}^{\sqrt{x}} = 2$ y $P = \sqrt[\sqrt{x}^{\sqrt{x}}]{x^{\sqrt{x}}}$

a) 64 b) 32 c) 16 d) 4 e) 2

38. Calcular $L = \frac{m}{n}$ siendo:

$$m = \sqrt{10}^{\sqrt{10}^{\sqrt{10}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}} \qquad n = \sqrt{5}^{\sqrt{5}^{\sqrt{5}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}}$$

a) $\sqrt{10}$ b) 10 c) 2 d) 5 e) $\frac{1}{5}$

39. Calcular el valor numérico de:

$$C = \left[\frac{\sqrt[\sqrt{2}]{a^{\sqrt{8}}\;\sqrt[\sqrt{2}]{a^{-2}b^{-12}}}}{\sqrt[\frac{1}{\sqrt{2}}]{a^{\sqrt{32}}\;\sqrt[-\frac{1}{2}]{\frac{1}{a^{\sqrt{2}}}\;\frac{3\sqrt{2}}{a^{2}}}}}\right]^{-3/2} . \left(\sqrt{a^{3}\sqrt{a\sqrt{a^{-1}}}}\right)$$

para $a = 2$ $b = 6$

a) 4 b) 2 c) 8 d) 6 e) 12

40. Hallar el valor numérico de:

$E = 223 \,.\, 156 - 223 \,.\, 134 - 22 \,.\, 119 + 104 \,.\, 8 - 103 \,.\, 30$

a) 25 b) 32 c) 30 d) 7 e) 0

CLAVE DE RESPUESTAS

1)C	2)A	3)E	4)C	5)D	6)E
7)C	8)C	9)A	10)D	11)C	12)D
13)B	14)D	15)E	16)A	17)D	18)A
19)C	20)B	21)B	22)C	23)A	24)B
25)C	26)C	27)A	28)E	29)B	30)C
31)A	32)E	33)A	34)C	35)A	36)C
37)D	38)C	39)B	40)C		

GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

GRADO

Es una características de la expresión algebraica, que viene dados por el exponente de sus letras, el cual debe ser un número entero y positivo, y permite determinar el número de soluciones de una ecuación. Puede ser de dos tipos: relativo y absoluto. El primero se refiere a una sola letra y el segundo a todas sus letras.

GRADOS DE UN MONOMIO

Monomio. Es la mínima expresión algebraica que tiene un sólo término algebraico. Como toda expresión algebraica tendrá dos grados que son:

Grado Absoluto. (G.A.). El grado absoluto de un monomio está dado por la suma de los exponentes de todas sus letras.

Grado relativo. (G.R.). Está dado por el exponente de la letra referida a dicho monomio.

Ejemplo:

Determinar los grados siguiente monomio:

$$M = 4^5x^7y^8z^4$$

Solución:

Se debe dar como respuesta los dos grados es decir, el grado absoluto y el relativo.

1) G.A.M. = 7 + 8 + 4 = 19

2) $$\text{G.R.M.} = \begin{cases} GR_x = 7 \text{ con respecto a x} \\ GR_y = 8 \text{ con respecto a y} \\ GR_z = 4 \text{ con respecto a z} \end{cases}$$

GRADOS DE UN POLINOMIO

Polinomio.

Es una expresión algebraica que tiene 2 o más términos algebraicos; recibe el nombre de binomio cuando tiene 2 términos; trinomio cuando tiene 3 términos, etc.

Grado Absoluto de un Polinomio (G.A.P.). Está dado por el término que tiene mayor grado absoluto.

Grado Relativo de un Polinomio (G.R.P.). Está dado por el término de mayor exponente de la letra referida en dicho polinomio.

Ejemplo:

Determinar los grados del siguiente polinomio.

$$P = 4x^4y^3z^5 + 8x^5y^4z^6 + 9x^6y^2z^8$$

Solución:

Como no se especifica qué grado debe darse, se obtendrán los dos grados: absoluto y relativo.

(1) $$\begin{matrix}\text{Grado}\\ \text{Absoluto} =\\ \text{de P}\end{matrix} \begin{cases} \text{G.A. de } 4x^4y^3z^5\ldots \text{ es } 12 \\ \text{G.A. de } 8x^5y^4z^6\ldots \text{ es } 15 \\ \text{G.A. de } 9x^6y^2z^8\ldots \text{ es } 16 \end{cases}$$

Luego: G.A.P. = 16

(2) $$\begin{matrix}\text{Grado}\\ \text{Relativo} =\\ \text{de P}\end{matrix} \begin{cases} \text{Grado Relativo con respecto a x = 6 (por ser el mayor exponente)} \\ \text{Grado Relativo con respecto a y = 4 (por ser el mayor exponente)} \\ \text{Grado Relativo con respecto a z = 8 (por ser el mayor} \end{cases}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar "a" y "b" si el Grado Absoluto del monomio es igual a 17, y su coeficiente tiene el mismo valor que el Grado relativo con respecto a "x". Siendo el monomio:

$$M = (a + b)\, x^{2(a-1)}\, y^{3b}$$

Solución:

DATOS:

i) G.A.M. = 17

Efectuando:

$$2a - 2 + 3b = 17$$

Luego por el enunciado (1):

$$2a + 3b = 19 \qquad \text{(I)}$$

$$2(a - 1) + 3b = 17$$

ii) $2(a - 1) = a + b$

efectuando: $2a - 2 = a + b$

o también: $a - b = 2$ (II)

De (II): $a = 2 + b$ (III)

reemplazando (III) en (I):

$$2(2 + b) + 3b = 19$$

de donde: $b = 3$

En (III): $a = 2 + 3 = 5$

Rpta.: $a = 5$

$b = 3$

2.- Hallar el valor que debe darse a "m" para que la expresión:

$$M = \sqrt[3]{\frac{x^{m-1}\sqrt[4]{x^m}}{\sqrt[6]{x^{5m-4}}}}$$

sea de 6to. Grado.

Solución:

Simplificando la expresión:

$$M = \sqrt[3]{\frac{x^{m-1}\, x^{\frac{m}{4}}}{x^{\frac{5m-4}{6}}}} = \sqrt[3]{x^{\,m-1 + \frac{m}{4} - \frac{5m-4}{6}}}$$

también: $M = x^{\frac{m-1 + \frac{m}{4} - \frac{5m-4}{6}}{3}}$

Para que la expresión sea de 6to. Grado el exponente debe ser igual a 6.

$$\frac{m-1}{3} + \frac{m}{12} - \frac{5m-4}{18} = 6$$

Dando común denominador y eliminado denominadores:

$$12(m - 1) + 3m - 2(5m - 4) = 36 \,.\, 6$$

$$12m - 12 + 3m - 10m + 8 = 216$$

$$5m = 220$$

Rpta.: $m = 44$

3.- Hallar el grado absoluto de la expresión:

$$M = \sqrt[a+b]{x^c y^a}\ \ \sqrt[b+c]{w^a z^c}$$

si se cumple la siguiente expresión:

$$(b + c)^{-1} + (b - a)^{-1} + (b - c)^{-1} + (b + a)^{-1} = 0$$

Solución:

El grado absoluto de M será la suma de los exponentes de x, y, w, z.

$$\text{G.A.M.} = \frac{c + a}{a + b} + \frac{c + a}{b + c} = \frac{(c + a)\,(b + a + b + c)}{(a + b)(b + c)}$$

$$\text{G.A.M.} = \frac{(a + c)^2 + 2b(a + c)}{ab + ac + bc + b^2}$$

$$= \frac{a^2 + c^2 + 2ac + 2ab + 2bc}{b^2 + ab + ac + bc} \qquad \text{(I)}$$

de la condición:

$$\frac{1}{b + c} + \frac{1}{b - a} + \frac{1}{b - c} + \frac{1}{b + a} = 0$$

Agrupando y efectuando de acuerdo a lo señalado gráficamente:

$$\frac{b - c + b + c}{b^2 - c^2} + \frac{b + a + b - a}{b^2 - a^2} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{2b}{b^2 - c^2} + \frac{2b}{b^2 - a^2} = 0$$

dividiendo entre 2b:

$$\frac{1}{b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 - a^2} = 0$$

$$\frac{b^2 - a^2 + b^2 - c^2}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} = 0$$

Para que la expresión sea cero, el numerador debe ser cero, así:

$$b^2 - a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

$$2b^2 = a^2 + c^2 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en el G.A.M. (I):

$$\text{G.A.M.} = \frac{2b^2 + 2ac + 2bc + 2ba}{b^2 + ab + ac + bc}$$

$$= \frac{2(b^2 + ac + bc + ab)}{b^2 + ab + ac + bc} = 2$$

Rpta.: G.A.M. = 2

4.- Si se cumple que:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} = m$$

Hallar el grado de:

$$M = \frac{x^{n+m}}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{x}\ \sqrt[4]{x}\ \ldots \text{"n" factores}}$$

Solución:

El grado pedido es:

$$\text{G.A.M.} = n + m - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$$

de la condición:

$$\frac{2-1}{2} + \frac{3-1}{3} + \frac{4-1}{4} + \frac{5-1}{5} + \ldots + \frac{n+1-1}{n+1} = m$$

$$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{5} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = m$$

$$1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{5} + \ldots + 1 - \frac{1}{n+1} = m$$

$$\underbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}_{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) = m$$

haciendo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+1} = p$$

$$n - p = m \qquad p = n - m \qquad \text{(I)}$$

Sustituyendo en el G.A.M.

$$= n + m - (n - m) = n + m - n + m = 2m$$

Rpta.: G.A.M. = 2m

5.- Hallar el grado de la expresión:

$$M = 4^a \ x \sqrt[3]{4 + 2\sqrt[3]{4 + 2\sqrt[3]{4 + \ldots \infty}}}$$

Solución:

El grado es el exponente de x:

$$\sqrt[3]{4 + 2\sqrt[3]{4 + 2\sqrt[3]{4 + \ldots \infty}}} = m$$

Elevando al cubo se obtiene:

$$4 + 2\sqrt[3]{4 + 2\sqrt[3]{4 + \ldots \infty}} = m^3$$

pero se puede reemplazar la raíz por su valor que es "m":

$$4 + 2m = m^3$$

$$m^3 - 2m - 4 = 0$$

probando para m = 2, se obtiene:

$$(2)^3 - 2(2) - 4 = 0$$

Rpta.: G.A.M. = 2

6.- Calcular el valor de "m" si el grado de la expresión es de 7mo. Grado:

$$M = \sqrt[m^{-m^{-1}}]{\sqrt[m]{m}\sqrt{\frac{x^m\sqrt[m]{x\sqrt[m]{x^{3m}}^{\,3}}}{\left(x^4 . \sqrt[m]{x}\right)^m}}}$$

Solución:

Multiplicando los índices de los radicales mayores:

$$m^{-m^{-1}} . \sqrt[m]{m} = m^{-m^{-1}} . m^{\frac{1}{m}} = m^{-m^{-1}} . m^{m^{-1}} = m^0 = 1$$

Luego la expresión propuesta es igual a:

$$M = \frac{x^m\sqrt[m]{x\sqrt[m]{x^{3m}}^{\,3}}}{\left(x^4 . \sqrt[m]{x}\right)^m} = \frac{x^{\frac{1}{m}} . x^m . x^{\frac{3m^3}{m2}}}{x^{4m} . x}$$

$$= \frac{x^m . x^{1/m} . x^{3m}}{x^{4m} . x^1}$$

$$M = x^{\frac{1}{m} - 1}$$

de acuerdo con el dato:

$$G.A.M.: \frac{1}{m} - 1 = 7 \quad ; \frac{1}{m} = 8$$

Rpta.: $M = \frac{1}{m}$

7.- Si el grado relativo a "x" en el monomio:

$$M = \frac{\sqrt[a]{x\sqrt[b]{y\sqrt[b]{z}}}\sqrt[a]{y\sqrt[b]{z\sqrt[b]{x}}}}{\sqrt[ab]{x}\sqrt[b+1]{y}}$$

es igual a 10, hallar el G.R. respecto a "y" en el monomio.

$$M_1 = \left[\sqrt[ab^2]{x\sqrt[b+1]{y}}\right]^{b^3+1}$$

Solución:

Para determinar el $G.R_x$ en el monomio M se calcula el exponente de "x":

$$G.R_x: \frac{1}{a} + \frac{1}{ab^2} - \frac{1}{ab} = 10 \qquad \text{(I)}$$

Para determinar el grado relativo de "y" $(G.R._y)$ en el monomio M_1 se calcula el exponente de "y":

$$G.R._y = \frac{b^3+1}{ab^2(b+1)} = \frac{(b+1)(b^2-b+1)}{(b+1)ab^2}$$

$$= \frac{b^2}{ab^2} - \frac{b}{ab^2} + \frac{1}{ab^2}$$

Se observará que tiene el mismo valor que el $G.R._x$, es decir = 10, luego:

$$GR_y = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab^2} = GR_x = 10$$

Rpta.: $GR_y\ M_1 = 10$

8.- Hallar el grado absoluto de la expresión:

$$M = \frac{x^{\sqrt{2}\,n\ 16^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}}\left(\sqrt[6]{y}\right)^n}{\left[\sqrt[n+1]{x . x^4 . x^9 \dots x^{n^2}}\right]^{2n+1}}$$

Dato:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Solución:

Transformando la expresión:

$$M = \frac{x^{\sqrt{2}\,n\ 16^{\frac{1}{8}}}\ y^{\frac{n}{6}}}{\left[\sqrt[n+1]{x^{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}}\right]^{2n+1}}$$

$$M = \frac{x^{\sqrt{2}\,n\ (2^4)^{\frac{1}{8}}}\ y^{\frac{n}{6}}}{\left[x^{\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}}\right]^{\frac{1}{(2n+1)(n+1)}}}$$

$$M = \frac{x^{\sqrt{2}\,n\ \sqrt{2}}\ y^{\frac{n}{6}}}{x^{\frac{n}{6}}}$$

$$\text{El G.A.M.} = \sqrt{2}\,n\ \sqrt{2} + \frac{n}{6} - \frac{n}{6} = 2n$$

Rpta.: G.A.M. = 2n

9.- Hallar el coeficiente del monomio:

$$M = 9^a \left(-\frac{1}{3}\right)^b x^{3a+2b}\, y^{3a-b}$$

Si su grado absoluto es 8 y el grado relativo respecto a "y" es 1.

Solución:

Por primer dato: es decir la suma de exponentes de "x" es "y" es 8:

G.A.M.: $3a + 2b + 3a - b = 8$

$$6a + b = 8 \qquad (\alpha)$$

Por segundo dato: es decir el exponente de "y" es igual a 1:

$G.R._y : 3a - b = 1 \qquad (\beta)$

Sumando (α) y (β):

$$9a = 9 \quad ; \quad a = 1$$

En (α):

$$6(1) + b = 8 \quad ; \quad b = 2$$

Sustituyendo estos valores en el coeficiente:

$$9^a \left(-\frac{1}{3}\right)^b$$

se tiene:

$$9^a \left(-\frac{1}{3}\right)^b = 9^1 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 9\left(\frac{1}{9}\right) = 1$$

Rpta.: Coeficiente = 1

10.- En el siguiente monomio:

$$M = \frac{x^n y^m z^{5n}}{x^{1-m}\, y^{n-3}\, z^{m-2}}$$

El grado relativo respecto a "x" es 12, el grado relativo respecto a "y" es 10, hallar el grado relativo respecto a "z".

Solución:

Para hallar el grado respecto a "z" debe de calcularse los valores de "m" y "n".

DATOS:

Por dato (1), la diferencia de exponentes de x es 12:

$GR_x : n - (1-m) = 12$

$n - 1 + m = 12$

$n + m = 13 \qquad (\alpha)$

Por dato (2), la diferencia de exponentes de y es 10:

$GR_y : m - (n - 3) = 10$

$m - n + 3 = 10$

$m - n = 7 \qquad (\beta)$

Sumando (α) y (β):

$$2m = 20 \quad ; \quad m = 10$$

reemplazando en (α):

$$n + 10 = 13 \quad ; \quad n = 3$$

Luego:

$$G.R._z = 5n - (m - 2) = 5n - m + 2$$

Sustituyendo los valores de m y n:

$G.R._z = 5(3) - 10 + 2$

$G.R._z = 7$

11.- Hallar el valor de "m" para que la siguiente expresión sea de 2do. grado absoluto:

$$M = \left[\frac{\sqrt[3]{(a^{-2}\, b^{m/5})^{-1/2}}}{\sqrt[4]{a^3 \sqrt{a^0\, b^{m/5}}}}\right]$$

Solución:

Trabajando con el numerador:

$$\sqrt[3]{(a^{-2}\, b^{m/5})^{-\frac{1}{2}}} = a^{\frac{(-2)\left(\frac{1}{2}\right)}{3}}\, b^{\frac{\left(\frac{m}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\, b^{-\frac{m}{30}}$$

Trabajando con el denominador:

$$\sqrt[4]{a^3 \sqrt{a^0\, b^{-\frac{m}{5}}}} = a^{\frac{3}{4}}\, b^{-\frac{m}{40}}$$

Reemplazando los equivalentes en la proposición

$$M = \left[\frac{a^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{m}{30}}}{a^{\frac{3}{4}}\ b^{\frac{m}{40}}}\right]^{-3} = \left[a^{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}\ b^{-\frac{m}{30}+\frac{m}{40}}\right]^{-3}$$

$$M = \left[a^{\frac{-5}{12}}\ b^{\frac{-10m}{120}}\right]^{-3} = \left[a^{\frac{-5}{12}}\ b^{-\frac{m}{12}}\right]^{-3} = a^{\frac{5}{4}}\ b^{\frac{m}{4}}$$

Por el Dato G.A.M.:

$$\frac{5}{4} + \frac{m}{4} = 2 \qquad ; \quad 5 + m = 8$$

Rpta.: $m = 3$

12.- Hallar la suma de los grados relativos respecto a "x" e "y" en la siguiente expresión:

$$M = \frac{(x + y)\left(x^2 + y^2\right)\left(x^3 + y^3\right)\left(x^4 + y^4\right)\ldots\left(x^n + y^n\right)}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}\right)\ldots\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}\right)}$$

Dato: $1 + 2 + 3 + 4 \ldots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Solución:

Operando con el denominador, se obtiene:

$$M = \frac{(x + y)\left(x^2 + y^2\right)\left(x^3 + y^3\right)\left(x^4 + y^4\right)\ldots\left(x^n + y^n\right)}{\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)\left(\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}\right)\left(\frac{x^4+y^4}{x^4y^4}\right)\ldots\left(\frac{x^n+y^n}{x^ny^n}\right)}$$

Simplificando se obtiene:

$$M = (xy)(xy)^2(xy)^3(xy)^4\ldots(xy)^n = (xy)^{1+2+3+\ldots+n}$$

$$M = (xy)^{\frac{n(n+1)}{2}} = x^{\frac{n(n+1)}{2}}\ y^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Luego el grado absoluto es la suma de los exponentes:

$$G.A.M. = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n(n+1)}{2}\ n(n+1)$$

Rpta.: G.A.M. $= n\,(n + 1)$

13.- Si $a^nb^n = k^n$ donde k es una constante, calcular el G.A. de:

$$M = \sqrt{\frac{k^n + b^{2n}}{a^{-2n}\,k^n + 1}} = \sqrt{\frac{k^n + a^{2n}}{b^{-2n}\ k^n + 1}}$$

Solución:

Trabajando con cada expresión.

$$M_1 = \sqrt{\frac{k^n + b^{2n}}{a^{-2n}\,k^n + 1}} = \sqrt{\frac{a^nb^n + b^{2n}}{b^{-2n}\,a^nb^n + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^n\left(a^n + b^n\right)}{\frac{b^n}{a^n} + 1}}$$

$$M_1 = \sqrt{\frac{b^na^n\left(a^n + b^n\right)}{\left(b^n + a^n\right)}}$$

$$M_1 = \sqrt{b^na^n} = b^{\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}}$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{a^nb^n + a^{2n}}{a^{-2n}\,a^nb^n + 1}} = \sqrt{\frac{a^n\left(b^n + a^n\right)}{\frac{a^n}{b^n} + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^nb^n\left(a^n + b^n\right)}{\left(a^n + b^n\right)}}$$

$$M_2 = a^{\frac{n}{2}}\ b^{\frac{n}{2}}$$

por lo tanto:

$$G.A.M_1 = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{2n}{2} = n$$

$$G.A.M_2 = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \qquad \therefore$$

Rpta.: G.A.M. $= n$

14.- Calcular el valor de "x" e "y" en el monomio:

$$M = \frac{\sqrt[3]{a^{x+y}\ b^{y+6}}}{a^{2/3}\ \ b^{1-y}}$$

si es de 2do. grado respecto a "a" y de 7mo. grado absoluto.

Solución:

i) Por el dato (1):

$$G.A.M_2 = \frac{x+y}{2} - \frac{2}{2} = 2 \qquad (\alpha)$$

ii) Por dato (2):

G.A.M.:

$$\frac{x+y}{3} - \frac{2}{3} + \frac{y+6}{3} - (1-y) = 7 \qquad (\beta)$$

reemplazando (α) en (β) se obtiene:

$$2 + \frac{y+6}{3} - (1-y) = 7$$

$$\frac{y+6}{3} - (1-y) = 5$$

$$y + 6 - 3(1-y) = 15$$

Rpta.: $y = 3$

En (α): $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{2}{3} = 2$

Rpta.: $x = 5$

15.- Si $m > n > 0$ y la expresión:

$$M = \frac{\sqrt[m-n]{(x^{m+n} + y^{m-n})^{m+n}}}{\sqrt[2mn]{\left(y^{\frac{m+n}{m-n}} + z^{\frac{m-n}{m+n}}\right)^{\frac{m+n}{m-n}}}}$$

es de grado absoluto cero, calcular:

$$p = m \,.\, n(m-n)$$

Solución:

Para determinar el grado de M, debe hallarse los mayores exponentes tanto en el numerador como en el denominador; la diferencia de estos exponentes es el G.A.M.

G.A.M.:

$$\frac{(m+n)(m+n)}{m-n} - \frac{\dfrac{(m+n)(m+n)}{(m-n)(m-n)}}{2mn} = 0$$

Operando:

$$\frac{(m+n)^2}{(m-n)} - \frac{(m+n)^2}{2mn(m-n)^2}$$

dividiendo todo entre $\dfrac{(m+n)^2}{m-n}$:

$$\frac{1}{2mn(m-n)} = 0 \quad ; \quad 2mn(m-n) - 1 = 0$$

$$2mn\,(m-n) = 1 \quad ; \quad mn\,(m-n) = \frac{1}{2} \ \therefore$$

Rpta.: $\dfrac{1}{2}$

16.- Hallar el grado de la siguiente expresión algebraica:

$$M = \sqrt[1+\frac{1}{1}]{\sqrt[1+\frac{1}{2}]{\sqrt[1+\frac{1}{3}]{\cdots\sqrt[1+\frac{1}{n}]{x^2 \,.\, x^4 \,.\, x^6 \,\ldots\, .\, x^{2n}}}}}$$

Solución:

Operando:

$$M = \sqrt[\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)]{x^{2+4+6+8+\ldots+2n}}$$

el índice se tiene:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right) \ldots \left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n+1}{1}$$

en el exponente de “x” se tendrá:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n)$$

$$= 2(n)\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

reemplazando, la expresión compleja se transforma en:

$$M = \sqrt[n+1]{x^{n(n+1)}} = x^{\frac{n(n+1)}{(n+1)}} = x^n \qquad \therefore$$

Rpta.: G.A.M. $= n$

17.- Dado el polinomio:

$$P = 2x^{a^{b-4}} + 3y^{a^{2(b-4)}} + 4(xy)^{a^{b-4}} + 5y^{4+a^{b-4}}$$

Si la suma de los grados absolutos de todos los términos del polinomio es $(a^6+2)^2$ calcular el valor de b.

Solución:

Llamando I, II, III y IV a los términos del polinomio. El grado absoluto de cada término es:

$$\text{G.A.T. (I)} \quad = a^{b-4}$$

$$\text{G.A.T. (II)} \quad = a^{2(b-4)}$$

$$\text{G.A.T. (III)} \quad = a^{b-4} + a^{b-4}$$

$$\text{G.A.T. (IV)} \quad = 4 + a^{b-4}$$

La suma de los grados absolutos según enunciado es:

$$a^{b-4} + a^{2(b-4)} + a^{b-4} + a^{b-4} + 4 + a^{b-4} = (a^6 + 2)^2$$

en el primer término haciendo: $a^{b-4} = y$, se obtiene:

$$y + y^2 + y + y + 4 + y = (a^6 + 2)^2$$

$$y^2 + 4y + 4 = (a^6 + 2)^2$$

$$(y + 2)^2 = (a^6 + 2)^2$$

de aquí:

$$y + 2 = a^6 + 2 \qquad y = a^6$$

Reponiendo valor de y:

$$a^{b-4} = a^6$$

igualando exponentes:

$$b - 4 = 6$$

Rpta.: b = 10

18.- Calcular m y n para que el polinomio:

$$P = 3x^{m+1}\ y^{n-3} + 7x^{m+2}\ y^{n-1} + 11x^{m+3}\ y^{n-2}$$

sea de grado absoluto 8 y de grado relativo respecto a "y" igual a 5.

Solución:

Llamando I, II y II, a los términos del polinomio.

Por dato y recordando que el grado absoluto del polinomio es igual al grado del término, de más alto grado:

$$\text{G.A.P.} \left\{ \begin{array}{ll} \text{G.A.t (I)} & = m + n + 1 - 3 \\ & = m + n - 2 \\ \text{G.A.t (II)} & = m + 2 + n - 1 \\ & = m + n + 1 \\ \text{G.A.t (III)} & = m + 3 + n - 2 \\ & = m + n + 1 \end{array} \right\} = m + n + 1$$

$$\text{G.A.P.:} \qquad m + n + 1 = 8$$

$$m + n = 7 \qquad (\alpha)$$

Por dato y recordando que G.R. y es igual al grado del término de más alto grado relativo:

$$\text{G.R.y:} \left\{ \begin{array}{l} n - 3 \\ n - 1 \\ n - 2 \end{array} \right\} = n - 1 = 5$$

$$n = 6$$

En (α):

$$m + 6 = 7$$

$$m = 1$$

Rpta.: m = 1, n = 6

19.- Dados los siguientes polinomios:

$$P = 5x^{m+11}\ y^{n-3} + 7x^{m+7}\ y^{n-2} + 6x^{m+2}\ y^{n+1}$$

$$Q = 2x^{2m+6}\ y^{n+2} + 12x^{2m+2}\ y^{n+7} + 8x^{2m}\ y^{n+10}$$

Determinar el G.A. del polinomio Q, sabiendo que: el grado absoluto de P es 16 y el menor exponente de "y" en el polinomio Q es 4.

Solución:

Por el dato (1):

$$\text{G.A.P.} \left\{ \begin{array}{ll} \text{G.A.t (I)} & = m + n + 8 \\ \text{G.A.t (II)} & = m + n + 9 \\ \text{G.A.t (III)} & = m + n + 3 \end{array} \right\} \quad m + n + 9$$

Por dato (1):

$$\text{G.A.P.:} \qquad m + n + 9 = 16$$

$$\text{De donde:} \qquad m + n = 7 \qquad (\alpha)$$

Por el dato (2):

menor exponente de "y" en Q:

$$n + 2 = 4$$

$$\therefore \qquad n = 2$$

En (α): $m + 2 = 7$

$$m = 5$$

El grado absoluto de Q es:

$$G.A.Q. \left\{ \begin{array}{ll} G.A.t\ (I) & = 2m + n + 8 \\ G.A.t\ (II) & = 2m + n + 9 \\ G.A.t\ (III) & = 2m + n + 10 \end{array} \right\} 2m + n + 10$$

reemplazando valores de m y n:

$$G.A.Q. = 2(5) + (2) + 10 = 22$$

Rpta.: G.A.Q. = 22

20.- Si en el polinomio:

$$P = 4x^{m+n-2}\, y^{m-3} + 8x^{m+n+5}\, y^{m-4} + 7x^{m+n-6}\, y^{m+2}$$

se verifica que la diferencia entre los grados relativos de "x" é "y" es 5 y además que el menor exponente de "y" es 3. Hallar su grado absoluto.

Solución:

Por el dato (1)

$$G.R._x: \left\{ \begin{array}{l} m + n - 2 \\ m + n + 5 \\ m + n - 6 \end{array} \right\} = m + n + 5$$

$$G.R._y: \left\{ \begin{array}{l} m - 3 \\ m - 4 \\ m + 2 \end{array} \right\} = m + 2$$

Por dato (1) :

$G.R._x - G.R._y = 5$; esto es:

$(m + n + 5) - (m + 2) = 5$;

de aquí: $n = 2$

Por el dato (2):

el menor exponente de y" es:

$m - 4 = 3$ Luego: $m = 7$

De acuerdo con el pedido, el G.A.P. es igual al mayor grado de todos los términos, es decir:

$$G.A.P. \left\{ \begin{array}{ll} G.A.t\ (I) & = 2m - 5 + n \\ G.A.t\ (II) & = 2m + n + 1 \\ G.A.t\ (III) & = 2m + n - 4 \end{array} \right\} = 2m + n + 1$$

$$= 2(7) + 2 + 1$$

$$= 17$$

Rpta.: G.A.P. = 17

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si el monomio:

$$M = 26 \sqrt[a]{x^b\, y \sqrt[b]{x^a\, y^{b^2}}}$$

es de grado absoluto 4, y los grados relativo a "x" é "y" son iguales. Calcular el valor de:

$$E = 3b - 2a$$

a) 1 b) 5 c) -4 d) -1 e) -2

2. ¿Qué valor debe tomar "x" para que el monomio:

$$M = \frac{\left\{ \left[\left(\sqrt{a^{-x}} \right)^x \right]^{-2} \right\}^x}{\left\{ \left[\sqrt[4]{b^{-x^2}} \right]^{-4} \right\}^{\frac{1}{x}}}$$

sea de grado 120?

a) 4 b) 5 c) 2 d) 3 e) 7

3. Hallar el valor de "m" de tal manera que la expresión:

$$\left[\frac{\sqrt{a\sqrt{a^2\sqrt{a^3}}}}{a^3(a^2)\left[(a^{1/2})^{1/3}\right]^{1/2}}\right]^{-m}$$

sea de grado 120

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 120

4. Hallar el grado del siguiente monomio:

$$M = 7x^{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots\infty}}}}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

5. Hallar el grado del nomonio:

$$M = 4x^{(bc)^4}\, y^{(ac)^4}\, z^{(ab)^4}$$

si se cumple:

$$yz - a^2 = xz - b^2 = xy - c^2 = x^2 + y^2 + z^2 - d^2 = 0$$

y además abcd = m

a) m b) m^2 c) m^4 d) m^8 e) m^{12}

6. Hallar el grado de la expresión:

$$M = \sqrt{\frac{x^{n+m}\, y^{n-m+2}\, z^{2n}}{x^{n-m}\, y^{m+n+2}\, z^{2m}}}$$

siendo $n = 16^{4^{-2^{-1}}}$; $m = 32^{125^{-3^{-1^{0}}}}$

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

7. Hallar el valor de:

$$V = \sqrt{\left(\frac{2}{11}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{11}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{17}}\right)^{-3} \cdot \sqrt{a}}$$

siendo el valor de "a" el que se obtiene, para que la expresión:

$$M = \sqrt[3]{\frac{x^{a-2}\sqrt{x^{3a}}}{x^{a+1}}}$$

sea de primer grado.

a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 16

8. Hallar el valor de "m" si la expresión:

$$M = \sqrt[m^m]{x^{m^{3m}}\ \sqrt[m^{-m}]{x^{(m^m)}}}$$

es de grado 32.

a) 4 b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

9. ¿Cuántas letras se deben tomar en el siguiente monomio:

$$M = a^6\, b^{24}\, c^{60}\, d^{120} \ldots$$

para que su grado sea 6 006?

a) 12 b) 10 c) 15 d) 13 e) 11

10. Hallar el grado de la expresión:

$$M = 5x^{\sqrt{10-\sqrt{4-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\infty \text{ veces}}}}}}}$$

a) 2 b) 3 c) 5 d) 10 e) 4

11. Si el grado absoluto de la expresión:

$$M = \frac{\sqrt[\alpha\beta\gamma]{(a+b+c)^{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}}\ \sqrt[3]{(xyz)^{p+q+r}}}{(x+y+z)^{p+q}\ \sqrt[\alpha\gamma]{z^{\alpha}}}$$

es nulo, hallar el valor de:

$$J = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

a) r b) p + q c) -r d) -1 e) -q

12. Si m > n > 0 y la expresión:

$$E = \frac{\sqrt[m-n]{\left[x^{m+n} + y^{m-n}\right]^{\frac{m-n}{(m-n)n}}}}{\sqrt[2mn]{\left[x^{2m-1} + z^{2m-2}\right]^2\left[y^{\frac{m+n}{m-n}} + z^{\frac{m-n}{m+n}}\right]^{\frac{m-n}{m-n}}}}$$

es de grado nulo. Calcular:

$$E = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$$

a) 5 b) 4 c) 6 d) 7 e) 3

13. Si $A = \left(\sqrt[2]{\dfrac{m+n}{m+n}}\right)^{\sqrt{m^2-n^2}}$

hallar el grado de:

$$M = \frac{\left[A^{\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}} + A^{\sqrt{\frac{m-n}{m-n}}}\right]\left(\dfrac{m+n}{m+n}\right)}{\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}\left(\dfrac{2m}{m-n}\right)}$$

a) 1 b) 2 c) m d) m-n e) 0

14. Hallar el valor de "m" para que el monomio:

$$M = \left[\frac{x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x^m \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x^m \sqrt{x^{-3}}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

sea de segundo grado.

a) 3 b) 2 c) 4 d) 5 e) 7

15. Hallar m y n si el polinomio:

$$P(x,y) = 4x^{2m+n-4}\, y^{m+n+2} + 7x^{2m+n-3}\, y^{m+n+1} + 9x^{2m+n-2}\, y^{m+n}$$

es de grado absoluto veintiocho y la diferencia de los grados relativos de "x" é "y" es 6. Dar m + n

a) 10 b) 12 c) 8 d) 14 e) 16

16. Se tienen dos polinomios P y Q, si el polinomio P es de grado 10 respecto a "x". En el polinomio Q el grado respecto a "x" es 5 grados menos que el grado respecto a "y". Hallar el grado respecto a "y" en el polinomio Q, siendo:

$$P(x,y) = x^{m^2+1}\, y^{n-1} + 3x^{m^2-1}\, y^{n+1} + 7x^{m^2+1}\, y^{n}$$

$$Q(x,y) = 2x^{m+7}\, y^{n-6} - 5x^{m}\, y^{n-2} + 9x^{m-1}\, y^{n-3}$$

a) 10 b) 5 c) 15 d) 12 e) 2

17. Determinar el grado absoluto de Q, si el grado absoluto de P es 20 y el mayor exponente de "y" en Q es 10.

$$P(x,y) = 3x^{n+7}\, y^{m-1} + 6x^{n+8}\, y^{m} + 5x^{n}\, y^{m+1}$$

$$Q(x,y) = 4x^{m+1}\, y^{n} + 7x^{m+2}\, y^{n+1} + 8x^{m+3}\, y^{n+2}$$

a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) 19

18. Hallar E = m + n si el G.A. del polinomio:

$$P(x,y) = 4x^{m+3}\, y^{n-2} + 5x^{m+1}\, y^{n+1} + 7x^{m}\, y^{n+2}$$

es de grado absoluto 8 y el grado relativo a "x" supera en una unidad al grado relativo a "y".

a) 5 b) 4 c) 3 d) 6 e) 10

19. Calcular el valor de "x" para que la expresión sea de segundo grado:

$$M = \sqrt[x]{a}\ \sqrt[x]{a^2}\ \sqrt[x]{a^3} \ldots \sqrt[x]{a^x}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

20. Si el grado absoluto de:

$$M_1 = \frac{\sqrt[b]{x^a}\ \sqrt[a]{y^b}\ \sqrt[a]{z}\ \sqrt[b]{w}}{\sqrt[ab]{x^{a^2}\, y^{a^b}}}$$

es igual a 7, hallar el grado respecto a "x" en el monomio:

$$M_2 = \frac{\sqrt[a]{xy^{a}\, z^{b^4}}}{\sqrt[b]{xy^{b^2}\left(z^{a^3}\right)^{-1}\left(z^{a^3}\right)^{-2}}}$$

a) 5 b) 4 c) 3 d) 6 e) 7

CLAVE DE RESPUESTAS

1) A	2) B	3) D	4) B	5) C
6) D	7) A	8) A	9) E	10) B
11) C	12) C	13) E	14) C	15) A
16) B	17) C	18) D	19) C	20) E

NOTACIÓN POLINÓMICA

Notación polinómica es la representación de un polinomio, mediante sus variables y constantes.

Se denomina **variable** a toda magnitud que cambia de valor, se le representa por las últimas letras del abecedario: x,y,z, etc.

Se denomina **constante** a toda magnitud que tiene un valor fijo, no cambia su valor; se le representa por las primeras letras del abecedario: a,b,c, etc.

POLINOMIO

Polinomio es una expresión que consta de más de un término general, un polinomio se representa de la siguiente manera:

P (x, y) , se lee "polinomio en x,y".

donde P es el nombre genérico:

(x, y) son las variables x é y.

Por lo tanto:

P(x,y), significa que el polinomio es de nombre P y de variables x, y.

Ejemplos:

i) $P(x,y) = 4x^2 + 5y^2 + 7$

ii) $P(x, y, z) = 4x^3 + 7xy + 6z^2$

iii) $P(x) = 4x^3 + 5x^2 + 7x$

En general se tendrá:

$$P\ \underbrace{(x,y,z)}\ = ax^2 + by^3 + cz^5$$

nombre genérico   variables   constantes

VALOR NUMERICO DE UN POLINÓMIO

Es el valor que toma dicho polinomio, cuando se reemplaza en él valores asignados a sus variables.

Ejemplo.- Sea el polinomio:

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 5$$

hallar P(2,4)

Solución:

Se reemplaza los valores de x e y, así:

$$P(2,4) = 2^2 + 5^2 - 5 = 4 + 25 - 5 = 24$$

CAMBIO DE VARIABLE EN UN POLINOMIO

Es la expresión que se obtiene al cambiar la variable del polinomio por otra.

Ejemplo: Sea el polinomio:

$$P(x) = 4x^2 + 5x + 6$$

calcular P(y + 1)

Solución:

Se reemplaza x por y+1; así:

$$P(y + 1) = 4(y + 1)^2 + 5(y + 1) + 6$$

efectuando operaciones:

$$P(y + 1) = 4(y^2 + 2 + 1) + 5y + 5 + 6$$

$$P(y + 1) = 4y^2 + 8y + 4 + 5y + 11$$

$$P(y + 1) = 4y^2 + 13y + 15$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Calcular:

$$E = Q\,[P(-2)]$$

siendo: $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 8$ y:

$$Q(x) = (2x+1)^n (5x^2-1)^{2n-1} + (x+5)^n (x+1) + (2x+5)^n (x-1)$$

Solución:

Cálculo de P (-2):

$$P(-2) = 3(-2)^3 + 5(-2)^2 + 2(-2) + 2(-2) + 8 = -24 + 20 - 4 + 8 = 0$$

$\therefore \quad P(-2) = 0$

Cálculo de Q [P(-2)]

$$Q\,[P(-2)] = Q[0] = (0+1)^n (0-1)^{2n-1} + (0+5)^n (0+1) + (0+5)^n(0-1)$$

$$Q[0] = (1)^n (-1)^{2n-1} + 5^n + 5^n(-1)$$

$$Q[0] = (1)(-1) + 5^n - 5^n = -1 \quad \therefore$$

Rpta.: $E = Q\,[P(-2)] = -1$

2.- Si $P(x) = x^2 - x + 2$, calcular:

$$R = P\{P[2 - P(-1)]\}$$

Solución:

Cálculo de P (-1):

$$P(-1) = (-1)^2 - (-1) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

Cálculo de P[2 - P(-1)]:

$$P[2 - P(-1)] = P[2 - 4] = P[-2]$$

$$P\{-2\} = (-2)^2 - (-2) + 2 = 4 + 2 + 2 = 8$$

Cálculo de P{P{2 - P(-1)}}:

$$P\{P[^2 - P(-1)]\} = P\,\{8\} = 8^2 - (8) + 2 = 64 - 8 + 2 = 58$$

$$P\{P[2 - P(-1)]\} = 58$$

3.- Si $P(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$, calcular:

$$R = P\{P[P(25)]\}$$

Solución:

Calculando por partes:

$$P(25) = \frac{25-1}{\sqrt{25}+1} = \frac{24}{5+1} = \frac{24}{6} = 4$$

$$P[P(25)] = P\,[4] = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$P\{P[P(25)]\} = P[1] = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Rpta.: $E = P\{P[P(25)]\} = 0$

4.- Si $P(x) = x(2-x) + 5$, calcular:

$$R = \frac{P(x) - P(-x)}{P(x) + \left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}$$

Solución:

Cálculo de P(-x):

$$P(-x) = (-x)\,[2-(-x)] + 5 = -x(2+x) + 5 = -2x - x^2 + 5$$

Por otro lado:

$$\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right) = x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = x^2 - 5$$

además: $P(x) = 2x - x^2 + 5$

reemplazando:

$$R = \frac{2x - x^2 + 5 - (-2x - x^2 + 5)}{2x - x^2 + 5 + (x^2 - 5)}$$

$$R = \frac{2x - x^2 + 5 + 2x + x^2 - 5}{2x - x^2 + 5 + x^2 - 5} = \frac{4x}{2x} = 2$$

Rpta.: $R = 2$

5.- Calcular:

$$E = P(x+1) + P(x-1) - 2\,P(x),$$

si: $P(x) = 3x^2 + 2x + 4$

Solución:

Cálculo de $P(x + 1)$:

$$
\begin{aligned}
P(x + 1) &= 3(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 4 \\
&= 3(x^2 + 2x + 1) + 2(x + 1) + 4 \\
&= 3x^2 + 6x + 3 + 2x + 2 + 4 \\
&= 3x^2 + 8x + 9
\end{aligned}
$$

Cálculo de $P(x - 1)$:

$$
\begin{aligned}
P(x - 1) &= 3(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 4 \\
&= 3(x^2 - 2x + 1) + 2(x - 1) + 4 \\
&= 3x^2 - 6x + 3 + 2x - 2 + 4 \\
&= 3x^2 - 4x + 5
\end{aligned}
$$

reemplazando en la expresión propuesta:

$$E = (3x^2 + 8x + 9) + (3x^2 - 4x + 5) - 2(3x^2 + 2x + 4)$$

$$E = 6x^2 + 4x + 14 - 6x^2 - 4x - 8 = 6$$

Rpta.: $E = 6$

6.- Si $f(x) = x - 2a$, $g(x) = 2x + a$ y además:

$$f[g(x)] - g[f(x)] = f[g(a)] + 19$$

calcular "a"

Solución:

Cálculo de $f[g(x)]$:

$$f[g(x)] = f[2x + a] = 2x + a - 2a = 2x - a$$

Cálculo de $g[f(x)]$:

$$
\begin{aligned}
g[f(x)] = g(x - 2a) = 2(x - 2a) + a &= 2x - 4a + a \\
&= 2x - 3a
\end{aligned}
$$

Cálculo de $f[g(a)]$:

$$g(a) = 2(a) + a = 3a$$

$$f[g(a)] = f(3a) = 3a - 2a = a$$

reemplazando en la segunda condición:

$$
\begin{aligned}
(2x - a) - (2x - 3a) &= a + 19 \\
2x - a - 2x + 3a &= a + 19 \\
2a &= a + 19
\end{aligned}
$$

Rpta.: $a = 19$

7.- Si $P(x) = \dfrac{x}{1 + x}$;

$$F(x) = \frac{1}{1 + x} \quad \text{y}$$

$$G(x) = x$$

y además: $P\{F[G(x)]\} = \dfrac{1}{10}$

Calcular "x"

Solución:

Como: $\qquad G(x) = x$

$$F[G(x)] = F(x)$$

$$P[F(x)] = \frac{F(x)}{1 + F(x)} = \frac{\dfrac{1}{1 + (x)}}{1 + \dfrac{1}{1 + x}} = \frac{\dfrac{1}{1 + x}}{\dfrac{1 + x + 1}{1 + x}} = \frac{1}{2 + x}$$

Por otro lado:

$$P[F(x)] = \frac{1}{10}$$

Igualando los valores del polinomio en P:

$$\frac{1}{2 + x} = \frac{1}{10}$$

de donde: $x = 8$

8.- Si: $P[(x + 3)^x] =$

$$\left[\frac{(x^2 + 6x + 9)^{\frac{1}{2}}}{x + 3}\right]^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left[3^{\frac{1}{2x}} \cdot x + 3^{\frac{2x+1}{2x}}\right]^{2x}$$

Calcular $P(4)$

Solución:

Transformando por partes:

$$\left[\frac{(x^2 + 6x + 9)^{\frac{1}{2}}}{x + 3}\right]^{\frac{x^2}{2}} = \left[\frac{[(x + 3)^2]^{\frac{1}{2}}}{x + 3}\right]^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\left[\frac{x + 3}{x + 3}\right]^{\frac{x^2}{2}} = (1)^{\frac{x^2}{2}} = 1$$

$$\left[3^{\frac{1}{2x}} \cdot x + 3^{\frac{2x+1}{2x}}\right]^{2x} = \left[3^{\frac{1}{2x}}(x+3)\right]^{2x}$$

$$= \left(3^{\frac{1}{2x}}\right)^{2x}(x+3)^{2x} = 3\left[(x+3)^{x}\right]^{2}$$

Como la expresión transformada es:

$$P[(x+3)^x] = 3[(x+3)^x]^2$$

$$P\ (4) = 3(4)^2 = 3(16) = 48$$

Rpta.: $P(4) = 48$

9.- Si se cumple que:

$$P\left[x^{x^{x^{-\frac{1}{2}}}}\right] = nx + n^2x^2 + n^3x^3 + \ldots \text{ (considerar "n" términos)}$$

Calcular:

$$P\left[\frac{1}{n^{\left(n^{\sqrt{n}}\right)^{-1}}}\right]$$

Solución:

Sea:

$$P\left[x^{x^{x^{-\frac{1}{2}}}}\right] = P\left[\frac{1}{n^{\left(n^{\sqrt{n}}\right)^{-1}}}\right] \quad n$$

luego se tendrá:

$$x^{x^{x^{-\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{n^{\left(n^{\sqrt{n}}\right)^{-1}}} = n^{-\left(n^{\sqrt{n}}\right)^{-1}}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(n^{\sqrt{n}}\right)^{-1}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n^{-\sqrt{n}}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(n^{-1}\right)^{\sqrt{n}}}$$

$$x^{x^{x^{-\frac{1}{2}}}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}} \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)^{n^{\frac{1}{2}}}} \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}}}$$

por comparación: $x = \dfrac{1}{n}$

reemplazando en el polinomio propuesto:

$$P\left[\frac{1}{n^{\left(n^{\sqrt{n}}\right)^{-1}}}\right] = n\left(\frac{1}{n}\right) + n^2\left(\frac{1}{n^2}\right) + n^3\left(\frac{1}{n^3}\right) + \ldots = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots}_{\text{"n" términos}}$$

Rpta.: $= n$

9.- Si $P(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$, calcular: $P[P(x)]$

Solución:

$$P[P(x)] = \frac{P(x)+3}{P(x)-1}$$

reemplazando P(x):

$$P[P(x)] = \frac{\dfrac{x+3}{x-1} + 3}{\dfrac{x+3}{x-1} - 1} = \frac{\dfrac{x+3+3(x-1)}{x-1}}{\dfrac{x+3-3(x-1)}{x-1}}$$

$$= \frac{x+3+3x-3}{x\ 3 - x + 1}$$

$$P[P(x)] = \frac{4x}{4} = x$$

10.- Si $P(x) = \dfrac{kx+1}{x-8}$ y $P[P(x)]$ es independiente de "x"

Calcular: $E = 64k^2$

Solución:

Cálculo de $P[P(x)]$

$$P[P(x)] = \frac{kP(x)+1}{P(x)-8} = \frac{k\left(\frac{kx+1}{x-8}\right)+1}{\frac{kx+1}{x-8}-8} = \frac{\frac{k^2x+k+x-8}{x-8}}{\frac{kx+1-8x+64}{x-8}}$$

$$P[P(x)] = \frac{(k^2+1)x+(k-8)}{(k-8)x+65}$$

si es independiente de "x" se debe cumplir:

$$\frac{k^2+1}{k-8} = \frac{k-8}{65}$$

$$65(k^2+1) = (k-8)^2$$

Esta propiedad será demostrada en el Capítulo de Polinomios Especiales.

Operando:

$$65k^2 + 65 = k^2 - 16k + 64$$

$$64k^2 + 16k + 1 = 0$$

$$(8k+1)^2 = 0$$

$$8k + 1 = 0$$

de donde: $k = -\frac{1}{8}$

luego:

$$E = 64k^2 = 64\left(-\frac{1}{8}\right)^2 = 64\left(\frac{1}{64}\right) = 1$$

Rpta.: $E = 1$

11.- Si $P(x) = ax^2 + b$ y: $P[P(x)] = 8x^4 + 24x^2 + c$

Calcular : $E = a + b + c$

Solución:

Cálculo de $P[P(x)]$:

$$P[P(x)] = a\,[P(x)]^2 + b = a(ax^2+b)^2 + b$$

$$= a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b$$

$$= a^3x^4 + 2a^2bx^2 + (ab^2+b) \qquad (A)$$

Como: $P[P(x)] = 8x^4 + 24x^2 + c \qquad (B)$

igualando (A) y (B):

$$a^3x^4 + (2a^2bx^2) + (ab^2+b) = 8x^4 + 24x^2 + c$$

Igualando coeficientes de términos idénticos:

$$a^3 = 8 \quad ; \quad a = 2$$

$$2a^2b = 24 \quad ; \quad b = 3$$

$$ab^2 + b = c \quad ; \quad c = 21$$

luego: $E = 2 + 3 + 21 = 26$

Rpta.: $E = 26$

12.- Sabiendo que: $P(x-1) = x^2 - x + 1$, calcular $P(10)$

Solución:

Sea: $P(x) = ax^2 + bx + c \qquad (A)$

luego:

$$P(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$= ax^2 - 2a\,x + a + bx - b + c$$

$$P(x-1) = ax^2 - (2a-b)x + (a-b+c)$$

Como: $P(x-1) = x^2 - x + 1$

Igualando coeficientes de términos idénticos:

$$a = 1$$

$$-(2a-b) = -1 \quad ; \quad 2a - b = 1$$

$$b = 1$$

$$a - b + c = 1 \qquad c = 1$$

Sustituyendo valores en (A):

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

luego:

$$E = P(10) = (10)^2 + 10 + 1 = 111$$

Rpta.: $E = 111$

13.- Sabiendo que:

$$P(x+2) = 6x + 1$$

y además: $P[F(x)] = 12x - 17$

Calcular $F(15)$

Solución:

Cálculo de P(x):

Sea P(x) = (ax + b)

luego:

$$P(x + 2) = a(x + 2) + b$$

$$= ax + (2a + b) \qquad (A)$$

Como por dato:

$$P(x + 2) = 6x + 1 \qquad (B)$$

Igualando los coeficientes de los términos idénticos (A) y (B):

$$a = 6$$

$$2a + b = 1$$

$$b = -11$$

por lo tanto:

$$P(x) = ax + b = 6x - 11$$

Cálculo de P[F(x)]:

$$P[F(x)] = 6F(x) - 11 = 12x - 17$$

$$6F(x) = 12x - 17 + 11$$

$$6F(x) = 12x - 6$$

$$F(x) = 2x - 1$$

Cálculo de F(15) = 2(15) - 1 = 29

Rpta.: F(15) = 29

14.- Si $R(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$; $S(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

y además:

$$S[-R\{S[R(-x)]\}] = -\frac{1}{5}$$

Calcular "x"

Solución.

Por partes:

1) $R(-x) = \dfrac{-x - 1}{-x + 1} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

2) $S[R(-x)] = S\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right) = \dfrac{\dfrac{x + 1}{x - 1} + 1}{\dfrac{x + 1}{x - 1} - 1}$

$$= \frac{\dfrac{x + 1 + x - 1}{x - 1}}{\dfrac{x + 1 - x + 1}{x - 1}}$$

$$S[R(-x)] = \frac{2x}{2} = x$$

3) $R\{S[R(-x)]\} = R(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

4) $S[-R\{S[R(-x)]\}] = S\left[-\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)\right]$

$$= S\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) = \frac{\dfrac{1 - x}{1 + x} + 1}{\dfrac{1 - x}{1 + x} - 1} = \frac{\dfrac{1 - x + 1 + x}{1 + x}}{\dfrac{1 - x - 1 - x}{1 + x}}$$

$$= \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}$$

5) Por el dato este valor es igual a $-\dfrac{1}{5}$ así:

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{5}$$

Rpta.: x = 5

15.- Cuál es la variación que experimenta P(x), cuando "x" varía de -2 a -4, si:

$$P(x) = \frac{x}{1 - \dfrac{1}{x}}$$

Solución:

Para x = -2:

$$P(-2) = \frac{-2}{1 - \dfrac{1}{(-2)}} = \frac{-2}{1 + \dfrac{1}{2}} = \frac{-2}{\dfrac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

Para x = -4:

$$P(-4) = \frac{-4}{1 - \dfrac{1}{(-4)}} = \frac{-4}{1 + \dfrac{1}{4}} = \frac{-4}{\dfrac{5}{4}} = -\frac{16}{5}$$

El cambio que experimenta es:

$$-\frac{4}{3} - \left(\frac{-16}{5}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{16}{5} = \frac{-20 + 48}{15} = \frac{28}{15}$$

Como la diferencia es positiva, disminuye, luego disminuye en 28/15.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $P(x) = x^{2n} + x^{4n} + x^{6n} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

   $(2n + 1)$ sumandos; hallar:

   $E = P(1) + P(2) - P(-2) + P(3) - P(-3)$

   a) $2n$ b) $2n + 1$ c) n

   d) $\frac{n}{2}$ e) $\frac{2n+1}{2}$

2. Si: $P(x+2) = 2(x+2)^3 + x^2 + 4x + 4$

   Calcular $E = P(3)$

   a) 60 b) 63 c) 68 d) 65 e) 70

3.- Si $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x - 2}$

   calcular el valor de:

   $$E = \frac{f(3) + 2f(2) + f(0)}{f(3) + f(2) + 2f(1)}$$

   a)1,17 b) 2,5 c) 3,5

   d) 4,5 e) 5,5

4.- Encontrar el valor de "a" para que:

   $f(x) = x^4 + a^2x^2 - x$

   y $g(x) = 2x^3 - a - x + 1$

   tengan el mismo valor cuando $x = 1$

   a) 0 y -1 b) -1 y 2 c) 1 y -1

   d) 1 y 2 e) 0 y -2

5. Expresar como $y = f(x)$ la expresión:

   $$x^4y^2 + 3x^3y^2 + \frac{9}{4}x^2y^2 - 2x^2y - 3xy + 1 = 0$$

   a) $y = \dfrac{2x}{3x^2 + 2}$ b) $y = \dfrac{2}{2(2x + 3)}$

   c) $y = \dfrac{2}{2x^2 - 3x}$ d) $y = \dfrac{4x^3 + 13x^2}{2(2x^2 + 3x)}$

   e) $y = \dfrac{2x}{3x^2 - 2}$

6. Qué relación debe existir entre los valores m, n y p para que la función:

   $$f(x) = \frac{mx^2 + p}{nx - p}$$

   sea siempre igual a la unidad y además x adopte- un solo valor:

   a) $n^2 + 4mp = 0$ b) $n^2 - 4mp = 0$

   c) $n^2 + 3mp = 0$ d) $n^2 - 8mp = 0$

   e) $n^2 + 8mp = 0$

7. Si $P(x) = x - \frac{1}{2}$, calcular:

   $$E = \left[2P\left(\frac{1}{x}\right) + P(x) - P(-x)\right]^4$$

   a) x b) $\frac{1}{x}$ c) 1

   d) $\frac{1}{2x}$ e) 0

8. Si $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 6$, calcular:

$$E = \frac{-P[-P[-P(3)]]}{3}\{-P(2)\}$$

a) 3 b) 1 c) 6 d) 9 e) 18

9. Hallar $y = f(x)$ a partir de:

$$7x^2 + 2xy - 5y^2 - 8x + 4y + 1 = 0$$

a) $x+1$ b) $x^2 + 2$ c) $2x - 1$

d) $\frac{1}{5}x + 1$ e) $\frac{1}{5}(7x + 1)$

10. Sabiendo que $f(x) = x^2 - 2x + 1$, hallar:

$$E = \frac{\left[f(x)^{f\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^2}{f(x+1) - f(x-1)}$$

a) 1/2 b) 1/6 c) 1/8 d) 1/4 e) 1/16

11. Si $P(x) = x$, y además:

$$P[F(x) + G(x)] = x + 4$$

$$P[F(x) - G(x)] = x - 2$$

Calcular:

$$F[G(x)]$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

12. Calcular el valor de $E = (mn)^2 + 5$ sabiendo que $P[P(x)]$ es independiente de "x" siendo:

$$P(x) = \frac{mx + 1}{x - n}$$

a) 5 b) 4 c) 9 d) 6 e) 14

13. Si $P(x) = (x^2 + 1)^3 - (x^2 - 1)^3$ hallar:

$$P\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

a) 5 b) 4 c) 2 d) 1 e) 3

14. ¿Cuál es la variación de:

$$P(x) = \frac{1}{x^2 - n}$$

si "x" varía entre 0,4 a 0,5?

a) Aumenta en $\frac{1}{6}$

b) Disminuye en $\frac{1}{6}$

c) No sufre variación

d) Aumenta $\frac{12}{5}$

e) Disminuye $\frac{12}{5}$

15. Si $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 3$, hallar:

$$E = P[P(4)]$$

a) 417 b) 429 c) 212

d) 414 e) 180

16. Si $P(x,y) = x^3 + y^3 + 3(x^2y + xy^2)$, calcular:

$$E = P(a + 1, 2 - a)$$

a) 1 b) 8 c) 27

d) 64 e) 125

17. Si $P(x) = x^2 - 1$, calcular:

$$E = P[P(x)] - x^2P(x)$$

a) x^2 b) 0 c) x

d) $-x^2$ e) 1

18. Si $P(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$, calcular:

$$E = P[P(x)]$$

a) x b) 1 c) -x

d) 1/x e) x + 1

19. Si $P(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, calcular:

$$E = P[\,P\,\{P[P(2)]\}]$$

a) 18/15 b) 16 c) 6/5

d) 4 e) 0

20. Si $P(x) = (x-1)^2 - 1$; calcular:

$$P = \frac{P(x) + P(x+2)}{x^2}$$

a) 6 b) 1 c) 2

d) 4 e) 3

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) B	3) A	4) A	5) B
6) D	7) E	8) C	9) E	10) D
11) D	12) D	13) A	14) A	15) B
16) C	17) D	18) B	19) A	20) C

POLINOMIOS ESPECIALES

Son ciertos polinomios que por su importancia, es necesario conocer. Los más usados son:

- Polinomio Ordenado
- Polinomio Completo
- Polinomio Homogéneo
- Polinomios Idénticos
- Polinomios Idénticamente Nulos
- Polinomios Entero en “x”

POLINOMIO ORDENADO

Con respecto a una letra, es aquel que se caracteriza porque los valores de los exponentes de la letra considerada van aumentando o disminuyendo, según que la ordenación sea ascendente o descendente (creciente o decreciente).

Ejemplo:

Sea el polinomio:

$$P(x,y) = 4x^3y^{12} + 5x^7y^8 + 4x^{12}y^2$$

P es ordenado con respecto a “x” en forma ascendente y es ordenado con respecto a “y” en forma descendente.

POLINOMIO COMPLETO

Con respecto a una letra, es aquel que se caracteriza porque todos los exponentes de la letra considerada existen, desde el mayor hasta el cero inclusive; denominando este último, “término independiente” del polinomio con respecto a esa letra.

Ejemplos:

i) Sea el polinomio:

$$P(x,y) = 4x^3 + 5x^2y + 7xy^2 + 8y^3$$

P es un polinomio completo con respecto a “x” y su término independiente con respecto a esa letras es $8y^3$. También es completo con respecto a “y” y su término independiente con respecto a esta letra es $4x^3$.

ii) $P(x) = 9ax^3 - 3x^2 + bx + (q + c)$

Donde el término independiente es: $(q + c)$

PROPIEDADES DE UN POLINOMIO COMPLETO

1) Si es de grado “n” (G.P. o grado del polinomio), el número de términos,T.P. es igual al G.P. más uno. Es decir:

$$\# \text{ T.P.} = \text{G.P.} + 1$$

2) El grado del polinomio completo es igual al número de términos menos uno.

$$\text{G.P.} = \# \text{ T.P.} - 1$$

3) La diferencia de grados relativos de dos términos consecutivos es igual a la unidad:

$$\text{G.R.t}(x + 1) - \text{G.R.t}(x) = 1$$

4) El término independiente contiene a la variable con exponente cero.

POLINOMIO HOMOGENEO

Es aquel que se caracteriza por que todos sus términos tienen igual grado absoluto (G.A.).

Ejemplo:

Sea el polinomio:

$$P(x,y) = \underbrace{4x^7y^{12}}_{t(I)} + \underbrace{8x^4y^{15}}_{t(II)} + \underbrace{6x^2y^{17}}_{t(III)}$$

en este polinomio, se verifica que:

$$G.A.t(I) = G.A.t(II) = G.A.t(III) = 19$$

TERMINOS SEMEJANTES

Son aquellos que tienen igual parte literal, afectada por los mismos exponentes, sin interesar los coeficientes.

Ejemplo:

Los términos:

$$2x^2y^3, \ -5x^2y^3, \ -17x^2y^3$$

son semejantes.

POLINOMIOS IDENTICOS

Son aquellos que se caracterizan porque sus términos semejantes tienen iguales coeficientes.

La identidad de polinomios, se representa así: (≡). En general una identidad se expresa de la siguiente manera:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \equiv mx^2 + ny^2 + tz^2$$

Como son idénticos, debe cumplirse siempre que:

$$a = m$$
$$b = n$$
$$c = t$$

Ejemplo:

Hallar a y b en la identidad:

$$2ax^2 + 15y^2 \equiv 12x^2 + 5by^2$$

Solución:

Como es identidad se cumple que:

$$2a = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 6$$
$$15 = 5b \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

POLINOMIOS IDENTICAMENTE NULOS

Son aquellos que se caracterizan porque todos sus coeficientes son idénticos a cero.

Ejemplo:

Si el polinomio:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

es idénticamente nulo, quiere decir que:

$$a = b = c = d = 0$$

POLINOMIO ENTERO EN "x"

Es aquel que se caracteriza porque todos sus exponentes son enteros y su única variable es "x".

Un polinomio P(x), entero en "x" se representa así:

De primer grado:

$$P(x) = ax + b$$

De segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

De tercer grado:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y así, sucesivamente.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar m, p y b para que el polinomio:

$$P(x) = \underbrace{5x^{m-18}}_{t(I)} + \underbrace{18x^{m-p+15}}_{t(II)} + \underbrace{7x^{b-p+16}}_{t(III)}$$

sea completo y ordenado en forma descendente.

Solución:

Como el polinomio debe estar ordenado en forma descendente, los exponentes deben ir disminuyendo desde el t(I) hasta el t(III).

Como es completo, el menor exponente que es igual a cero (por ser término independiente) corresponde al t(III), el anterior igual a 1 y el primero igual a 2, así:

$$b - p + 16 = 0 \qquad (a)$$

$$m - p + 15 = 1 \qquad (b)$$

$$m - 18 = 2 \qquad (c)$$

$\therefore \qquad m = 20$

En (b) :

$$20 - p + 15 = 1$$

$\therefore \qquad p = 34$

En (a):

$$b - 34 + 16 = 0$$

$\therefore \qquad b = 18$

Rpta.: $m = 20$

$p = 34$

$b = 18$

2.- Hallar la suma de coeficientes del siguiente polinomio:

$$P(x,y) = \underbrace{ax^{a^b}}_{t(I)} + \underbrace{bx^{\sqrt[b]{a^{a-b}}}.y^{12}}_{t(II)} + \underbrace{\frac{a}{b}x^3 y^{13}}_{t(III)} + \underbrace{\frac{b^2}{a}y^{b^a}}_{t(IV)}$$

si es homogéneo.

Solución:

Si es homogéneo, se cumple:

G.A.t (I) = G.A.t (II) = G.A.t (III) = G.A.t (IV)

Entonces:

$$\underbrace{a^b}_{(\alpha)} = \underbrace{\sqrt[b]{a^{a-b}} + 12}_{(\beta)} = \underbrace{3 + 13}_{(\gamma)} = \underbrace{b^a}_{(\phi)}$$

haciendo: $(\alpha) = (\phi)$

$$a^b = b^a \quad \Rightarrow \quad a = b^{\frac{a}{b}} \quad (\rho)$$

haciendo: $(\beta) = (\gamma)$

$$\sqrt[b]{a^{a-b}} + 12 = 16 \quad \rightarrow \quad a^{\frac{a-b}{b}} = 4$$

$$a^{\frac{a}{b} - 1} = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{a^{\frac{a}{b}}}{a} = 4 \quad (\theta)$$

Sustituyendo (ρ) en (θ) se obtiene:

$$\frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = 4 = 2^2$$

de aquí:

$$\frac{a}{b} = 2$$

$$a = 2b \qquad (\xi)$$

reemplazando (ξ) en (ρ):

$$(2b) = (b)^{\frac{2b}{b}}$$

$$2b = b^2$$

$\therefore \qquad b = 2$

En (ξ) ; $a = 2(2) = 4$

Finalmente, la suma de coeficientes del polinomio es:

$$\sum \text{ de coeficientes} = a + b + \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a}$$

$$= 4 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{4}{4}$$

$$= 6 + 2 + 1$$

$$= 9$$

Rpta.: $\sum$ de coeficientes = 9

3.- Hallar $\frac{m}{n}$ si el polinomio:

$$P(x,y) = 3x^m y^n (2x^{2m+1} + 7y^{6n+1})$$

es homogéneo

Solución:

Efectuando operaciones:

$$P(x,y) = \underbrace{6x^{3m+1}y^n}_{t(I)} + \underbrace{21x^m y^{7n+1}}_{t(II)}$$

Como es homogéneo, se cumple que:

G.A.t (I) = G.A.t (II)

$\therefore \quad 3m + 1 + n = m + 7n + 1$

$$3m - m = 7n - n$$

$$2m = 6m \;\; ; \;\; \frac{m}{n} = \frac{6}{2} = 3$$

Rpta.: $\frac{m}{n} = 3$

4.- Calcular la suma de los coeficientes del polinomio homogéneo:

$$P(x,y) = \underbrace{3px^{n^2-5}y^{12}}_{t(I)} + \underbrace{5(p - q)x^py^q}_{t(II)} + \underbrace{(13q + 4)x^{n^2}\,y^{3n-14}}_{t(III)}$$

Solución:

Como es homogéneo:

$$G.A.t\ (I) = G.A.t\ (II) = G.A.t\ (III)$$

$$\underbrace{n^2 - 5 + 12}_{(\alpha)} = \underbrace{p + q}_{(\beta)} = \underbrace{n^2 + 3n - 14}_{(\gamma)}$$

haciendo $\alpha = \gamma$:

$$n^2 - 5 + 12 = n^2 + 3n - 14$$
$$21 = 3n$$
$$n = 7$$

haciendo $\alpha = \beta$:

$$n^2 - 5 + 12 = p + q$$

reemplazando "n":

$$7^2 - 5 + 12 = p + q$$
$$56 = p + q \qquad (\theta)$$

La suma de coeficientes del polinomio es:

$$S = 3p + 5(p - q) + 13q + 4$$
$$= 3p + 5p - 5q + 13q + 4$$
$$= 8p + 8q + 4 = 8(p + q) + 4$$
$$= 8(56) + 4$$

Rpta.: $S = 452$

5.- Si la expresión:

$$P(x,y,z) = \sqrt[x+y+z+3]{y^3z^3x^{3y+3z} + x^3z^3y^{3x+3z} + x^3y^3z^{3x+3y}}$$

es homogénea, hallar su grado absoluto.

Solución:

Si es homogénea, los grados absolutos de cada término deben ser iguales, es decir:

$$\frac{3+3+3y+3z}{x+y+z+3} = \frac{3+3+3x+3z}{x+y+z+3} = \frac{3+3+3x+3y}{x+y+z+3} = G.A.$$

Usando la propiedad de serie de razones iguales:

$$\frac{3+3+3y+3z + 3+3+3x+3z + 3+3+3x+3y}{x+y+z+3 + x+y+z+3 + x+y+z+3} = \frac{G.A.}{1}$$

$$\frac{6(3 + x + y + z)}{3(x + y + z + 3)} = 2 = G.A.$$

Rpta.: G.A. = 2

6.- Si el polinomio:

$$P(x) = (x^2 - x + 3)(a - b) + (x^2 - x + 4)(b - c) + (x^2 + x + 5)(c - a)$$

es idénticamente nulo, hallar:

$$R = \frac{b + c}{a} \qquad (I)$$

Solución:

Para que se anule el polinomio, siendo a, b y c constantes, se debe cumplir:

$$a - b = 0 \;\Rightarrow\; a = b$$
$$b - c = 0 \;\Rightarrow\; b = c$$
$$c - a = 0 \;\Rightarrow\; c = a$$

de aquí se obtiene:

$$a = b = c$$

Haciendo: $a = b = c = t$: y reemplazando en (I):

$$R = \frac{t + t}{t} = 2$$

Rpta.: R = 2

7.- Si el polinomio:

$$P(x,y) = 2(a + b - c - d^2)x^2 + 3(b - de)xy + 4(b + c - a - e^2)y^2$$

es idénticamente nulo, hallar el valor de:

$$E = \frac{d^2}{b} + \frac{b}{e^2} + \frac{2a}{c}$$

Solución:

Si es idénticamente nulo, sus coeficientes son nulos, es decir:

$$a + b - c - d^2 = 0 \qquad (I)$$

$$b - de = 0 \qquad (II)$$

$$b + c - a - e^2 = 0 \qquad (III)$$

De (II) se obtiene:

$$b = de \qquad (IV)$$

Sumando (I) + (III) se tiene:

$$2b = d^2 + e^2 \qquad (V)$$

Sustituyendo (IV) en (V):

$$2de = d^2 + e^2 \qquad (V)$$

$$0 = d^2 - 2de + e^2$$

$$0 = (d - e)^2$$

$$d - e = 0$$

$$d = e \qquad (1)$$

Sustituyendo dos veces en (IV):

$$b = d^2 = e^2 \qquad (2)$$

Sustituyendo en (I):

$$a + d^2 - c - d^2 = 0$$

$$a = c \qquad (3)$$

Sustituyendo adecuadamente (1), (2) y (3) en la expresión pedida:

$$E = \frac{d^2}{d^2} + \frac{b}{b} + \frac{2a}{a} = 1 + 1 + 2 = 4$$

Rpta.: E = 4

8.- Dado el polinomio:

$$P(x,y) = 5x^5 - 4x^4y + xy^4$$

encontrar el mayor coeficiente de otro polinomio Q(x,y) sabiendo que:

1) S(x,y) = P(x,y) + Q(x,y) es completo y homogéneo.

2) La suma de coeficientes de S(x,y) es 20.

3) Cada coeficiente de Q(x,y) es igual al que antecede más 1.

Solución:

Dadas las condiciones, S(x,y) debe ser homogéneo de grado cinco.

Como S (x,y) = P(x,y) + Q(x,y) es completo y homogéneo de grado cinco, luego:

$$Q(x,y) = mx^3y^2 + nx^2y^3 + y^5$$

ya que:

$$S(x,y) = 5x^5 - 4x^4y + mx^3y^2 + nx^2y^3 + xy^4 + y^5$$

es completo y homogéneo de grado 5.

Por la segunda condición:

$$5 -4 + m + n + 1 + p = 20$$

$$m + n + p = 18 \qquad (\alpha)$$

Por la tercera condición:

$$m = a \quad ; \quad n = a + 1 \quad ; \quad p = a + 2$$

en (α): $a + a + 1 + a + 2 = 18$

$$a = 5$$

El polinomio buscado es:

$$Q(x,y) = 5x^3y^2 + 6x^2y^3 + 7y^5$$

Rpta.: El mayor coeficiente es 7.

9.- Hallar el número de términos en el siguiente polinomio:

$$P(x) = (m - 1)x^{m-6} + (m - 2)x^{m-5} + (m - 3)x^{m-4} + \dots$$

si es completo.

Solución:

Se observa que los exponentes del polinomio van aumentando, es decir que está ordenado en forma ascendente.

Si el polinomio es completo, existe un exponente cero, que corresponde al término independiente y pertenece, en este caso, al primer término, es decir:

$$m - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 6$$

reemplazando este valor:

$$P(x) = 5x^0 + 4x^1 + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + 0x^5 + \ldots$$

Como solamente hasta el término en x^4 es completo, entonces tiene 5 términos.

Rpta.: El polinomio tiene 5 términos.

10.- Hallar el valor de p y q si se cumple la siguiente identidad de polinomios:

$$13 - 2x \equiv p(2 - x) + q(1 + x)$$

Solución:

Efectuando operaciones y ordenando:

$$13 - 2x \equiv 2p - px + q + qx$$
$$13 - 2x \equiv (2p + q) + (q - p)x$$

Identificando los coeficientes:

$$2p + q = 13 \qquad \text{(I)}$$
$$q - p = -2 \qquad \text{(II)}$$

Restando (I) - (II):

$$2p + q - q + p = 15$$
$$3p = 15$$
$$p = 5$$

En (I) :

$$2(5) + q = 13$$
$$q = 3$$

Rpta.: $p = 5$
$q = 3$

OTRO MÉTODO: Como los valores de "q" y "p" no dependen de los valores de "x", se asigna valores a "x", de tal manera que se elimine incógnitas. Así:

Para $x = 2$; reemplazando:

$$13 - 2(2) = p(2 - 2) + q(1 + 2)$$
$$9 = 3q$$
$$q = 3$$

Para $x = -1$; reemplazando:

$$13 -2(-1) = p[2 - (-1)] + q(1 - 1)$$
$$15 = p[3]$$
$$p = 5$$

Rpta.: $p = 5$
$q = 3$

Se observa que este método es más sencillo; a continuación, se resuelve varios problemas con este método.

11.- Hallar "m", "n" y "p" en la siguiente identidad:

$$7x^2 - 6x + 1 \equiv m(x - 1)(x - 2) + n(x - 3)(x - 2) + p(x - 3)(x - 1)$$

Solución:

Dando valores convenientes a "x".

Para $x = 1$ (desaparecen el primer y el tercer término del miembro derecho)

$$7(1)^2 - 6(1) + 1 = n(1 - 3)(1 - 2)$$
$$2 = n(-2)(-1)$$
$$n = 1$$

Para $x = 2$:

$$7(2)^2 - 6(2) + 1 = p(2 - 3)(2 - 1)$$
$$17 = p(-1)(1)$$
$$p = -17$$

Para $x = 3$:

$$7(3)^2 - 6(3) + 1 = m(3 - 1)(3 - 2)$$
$$63 - 18 + 1 = m(2)(1)$$
$$m = 23$$

Rpta.: $m = 23$
$n = 1$
$p = -17$

12.- Calcular "p" y "q" en la identidad:

$$p(x + 5)^2 - q(x - 5)^2 = 3(x + 5)^2 + 4(2p + q)x$$

Solución:

Dando valores a "x":

Para $x = -5$

$$p(5)^2 - q(-5)^2 = 3(5)^2$$
$$25p - 25q = 75$$
$$p - q = 3 \qquad \text{(I)}$$

Para x = -5:

$$p(0)^2 - q(-10)^2 = 3(0)^2 + 4(2p + q)(-5)$$

$$- q(100) = - 20(2p + q)$$

$$5q = 2p + q$$

$$4q = 2p$$

$$p = 2q \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I):

$$2q - q = 3$$

$$q = 3$$

En (II): p = 6

Rpta.: p = 6
q = 3

13.- Calcular E = m + n + p en la siguiente identidad:

$$10x^2 + 5mx - 5 \equiv m(x^2 - 1) + n(x-2)(x-1) + p(x - 2)(x + 1)$$

Solución:

Dando valores a "x"; para x = 2:

$$10(2)^2 + 5m(2) - 5 = m(2^2 - 1)$$

$$40 + 10m - 5 = 3m$$

$$35 = -7m$$

$$m = -5$$

Reemplazando en la identidad:

$$10x^2 - 25x - 5 \equiv -5(x+1)(x - 1) + n(x-2)(x-1) + p(x-2)(x+1)$$

Para x = 1:

$$10(1)^2 - 25(1) - 5 = p(1 - 2)(1 + 1)$$

$$10 - 30 = p(-1)(2)$$

$$p = 10$$

Para x = -1:

$$10(-1)^2 - 25(-1) - 5 = n(-1 - 2)(-1 - 1)$$

$$10 + 25 - 5 = n(-3)(-2)$$

$$30 = 6n$$

$$n = 5$$

El valor pedido será:

$$E = m + n + p = -5 + 10 + 5 = 10$$

Rpta.: E = 10

14.- Calcular E = a + b + c en la siguiente identidad:

$$18x^3 - 3x^2 - 4x + 1 \quad a(bx + a)^a (cx - a)^b$$

Solución:

Analizando la identidad se observa que el producto indicado es de tercer grado, lo que hace necesario que a = 1 y b = 2, ya que uno de primer grado con uno de segundo da como resultado uno de tercero. Luego, la identidad es:

$$18x^3 - 3x^2 - 4x + 1 \equiv (bx + 1)(cx - 1)^2$$

efectuando operaciones:

$$18x^3 - 3x^2 - 4x + 1 \equiv (bx + 1)(c^2x^2 - 2cx + 1)$$

$$\equiv bc^2x^3 - 2bcx^2 + bx + c^2x^2 - 2cx + 1$$

Identificando coeficientes:

$$bc^2 = 18 \qquad (\alpha)$$

$$- 2bc + c^2 = - 3 \qquad (\beta)$$

$$b - 2c = -4$$

$$b = 2c - 4 \qquad (\theta)$$

(θ)en (β): $-2c(2c - 4) + c^2 = -3$

$$-4c^2 + 8c + c^2 = -3$$

$$3c^2 - 8c - 3 = 0$$

También: (3c + 1)(c - 3) = 0

y de aquí: c = 3

En (θ): b = 2

$$\therefore \qquad E = a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$$

Rpta.: E = 6

15.- Calcular "d" en:

$$2x^3 + 6x^2 + 15x + 20 \equiv a(x + c)^3 + b(x + d)$$

Solución:

Efectuando y ordenando:

$$2x^3 + 6x^2 + 15x + 20 \equiv ax^3 + 3ax^2c + (3ac^2 + b)x + (ac^3 + bd)$$

Identificando coeficientes:

$$a = 2$$

$$3ac = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$15 = 3ac^2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 9$$

$$20 = ac^3 + db \quad \Rightarrow \quad d = 2$$

Rpta.: $d = 2$

16.- Calcular $E = a + b$, si la fracción:

$$\frac{(a - b)x^2 + xy + (3b - a + 1)\,y^2}{(a + b)x^2 + 5xy + 2(3a - 2b)\,y^2}$$

es independiente de x é y.

Solución:

Si la fracción es independiente de "x" e "y", toma un valor constante que no depende de estos valores; sea "k" este valor:

$$\frac{(a - b)x^2 + xy + (3b - a + 1)\,y^2}{(a + b)x^2 + 5xy + 2(3a - 2b)\,y^2} \equiv k$$

Efectuando:

$$(a - b)x^2 + xy + (3b - a + 1)y^2 \equiv k(a + b)x^2 + 5kxy + 2(3a - 2b)ky^2$$

Identificando coeficientes:

$$a - b = k\,(a + b) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{a - b}{a + b}$$

$$1 = 5k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{5}$$

$$3ab - a + 1 = 2k(3a - 2b) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3b - a + 1}{2\,(3a - 2b)}$$

Por lo tanto:

$$\underbrace{\frac{a - b}{a + b}}_{(\alpha)} = \underbrace{\frac{1}{5}}_{(\beta)} = \underbrace{\frac{3b - a + 1}{2(3a - 2b)}}_{(\gamma)}$$

$(\alpha) = (\beta)$:

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{1}{5}$$

$$5a - 5b \equiv a + b$$

de donde: $\quad 2a = 3b \qquad (1)$

$(\beta) = (\gamma)$:

$$\frac{1}{5} = \frac{3b - a + 1}{2(3a - 2b)}$$

$$6a - 4b = 15b - 5a + 5$$

de donde: $\quad 11a - 19b = 5 \qquad (2)$

De (1) y (2) se obtiene:

$$a = -3$$
$$b = -2$$

Por lo tanto:

$$E = a + b = -2 - 3 = -5$$

Rpta.: $E = -5$

17.- Si el polinomio:

$$P(x) = (ab - ac - n^2)x^2 + (bc - ba - 2n)x + (ca - cb - 1)$$

es idénticamente nulo, calcular el valor de:

$$E = \frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$$

Solución:

Si es idénticamente nulo, se cumple:

$$\underbrace{ab - ac - n^2}_{(\alpha)} = \underbrace{bc - ba - 2n}_{(\beta)} = \underbrace{ca - cb - 1}_{(\gamma)} = 0$$

Sumando $(\alpha) + (\beta) + (\gamma)$ se obtiene:

$$ab - ac - n^2 + bc - ba - 2n + ca - cb - 1 = 0$$

$$n^2 + 2n + 1 = 0$$

$$(n + 1)^2 = 0$$

$$n = -1$$

Por lo tanto:

(α): $ab - ac - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad ab - ac = 1 \qquad$ (I)

(β): $bc - ba + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad bc - ba = -2 \qquad$ (II)

(γ): $ca - cb - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad ca - cb = 1 \qquad$ (III)

De la ecuación (I):

$$b - c = \frac{1}{a}$$

De la ecuación(II):

$$c - a = \frac{2}{b}$$

De la ecuación (III):

$$a - b = \frac{1}{c}$$

Entonces, el valor pedido será:

$$E = b - c + c - a + a - b = 0$$

Rpta.: $E = 0$

18.- Sabiendo que el polinomio:

$$P(x) = \underbrace{n(n^2-1)x^{a^2-a+1}}_{t(I)} - \underbrace{2x^{n(n+1)a^2-a+2}}_{t(II)} + \underbrace{(n-2)x^{a^2+a-1}}_{t(III)}$$

es homogéneo, hallar la suma de sus coeficientes.

Solución:

Si es homogéneo, se cumple:

$$G.A.t_{(I)} = G.A.t_{(II)} = G.A.t_{(III)}$$

$$\underbrace{a^2 - a + 1}_{(\alpha)} = \underbrace{n(n+1)a^2 - a + 2}_{(\beta)} = \underbrace{a^2 + a - 1}_{(\gamma)}$$

Haciendo $(\alpha) = (\gamma)$:

$$a^2 - a + 1 = a^2 + a - 1$$
$$a = 1$$

Haciendo $(\alpha) = (\beta)$:

$$a^2 - a + 1 = n(n+1)a^2 - a + 2$$

reemplazando el valor hallado de $a = 1$:

$$1 - 1 + 1 = n(n+1)(1) - 1 + 2$$
$$0 = n(n+1)$$

de aquí: $n = 0$ ó $n = -1$

Para $n = 0$, la suma de coeficientes es:

$$n(n^2 - 1) - 2 + n - 2$$
$$-2 - 2 = -4$$

Para $n = -1$, la suma de coeficientes es:

$$(-1)(0) - 2 - 1 - 2 = -5$$

Rpta.: $S = -4$ o $S = -5$

19.- De un polinomio P(x,y) completo y homogéneo de grado 8 y ordenado crecientemente respecto a "x" se ha tomado tres términos consecutivos, que son:

$$\ldots + x^a y^{b+2} + B + x^b y^{a+2} + \ldots$$

Hallar el grado respecto a "y" de la expresión "B".

Solución:

Para que B reúna las condiciones establecidas debe tener la forma:

$$B = x^{b-1}y^{a+3}$$

observando que: $a = b - 2$

Por lo tanto, se deduce que la serie es:

$$\ldots + \underbrace{x^a y^{b+2}}_{t(\alpha)} + \underbrace{x^{b-1}y^{a+3}}_{t(\beta)} + \underbrace{x^b y^{a+2}}_{t(\gamma)} + \ldots$$

Por ser homogéneo:

$$G.A.t(\alpha) = G.A.t(\beta) = G.A.t(\gamma)$$

$$a + b + 2 = a + b + 2 = a + b + 2 = 8$$

$$\therefore \qquad a + b = 6 \qquad \text{(I)}$$

Por ser completo, la diferencia de grados relstivos es 1:

$$b - 1 - a = 1$$
$$b - a = 2 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se obtiene:

$$b = 4$$
$$a = 2$$

$\therefore$ la expresión es:

$$B = x^3y^5$$

y su grado relativo a "y" es 5.

Rpta.: $G.R._B(y) = 5$

20.- Calcular $E = 2B + 3C$ en la identidad:

$$\frac{6}{(2x^2+1)(3x+1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + m} + \frac{C}{x + n}$$

Solución:

Efectuando operaciones:

$$\frac{6}{6\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)} = \frac{(Ax + B)(x + n) + C(x^2 + m)}{(x^2 + m)(x + n)}$$

de esta relación como es una identidad, se cumple:

a) $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x^2 + m)(x + n)$

de donde:

$$m = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{1}{3}$$

además:

b) $1 \equiv (Ax + B)\left(x + \frac{1}{3}\right) + C\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$

efectuando:

$$1 \equiv Ax^2 + \frac{A}{3}x + Bx + \frac{B}{3} + Cx^2 + \frac{C}{2}$$

$$1 \equiv (A + C)x^2 + \left(\frac{A}{3} + B\right)x + \left(\frac{B}{3} + \frac{C}{2}\right)$$

identificando coeficientes:

$$A + C = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{A}{3} + B = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{B}{3} + \frac{C}{2} = 1 \qquad \text{(III)}$$

De (III), efectuando, se tiene el valor de E:

$$E = 2B + 3C = 6$$

Rpta.: E = 6

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si el polinomio:

$$P(x) = (n - 2)x^{n-9} + (n - 3)x^{n-8} + (n - 4)x^{n-7}$$

es ordenado y completo hallar el número de términos.

a) 9 b) 10 c) 7 d) 6 e) 5

2. Hallar la suma de los coeficientes del siguiente polinomio homogéneo:

$$P(x,y,z) = a^2x^{a^{a-5}} - b^4y^{a^3} + ab^{-2}z^{b^{a+1}}$$

a) 48 b) 64 c) 12 d) 50 e) 46

3. Calcular E = m + n + p en la identidad:

$$\frac{m}{x-1} + \frac{n}{x-2} + \frac{p}{x-3} \equiv \frac{x^2 - 10x + 13}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

a) 10 b) 9 c) 8 d) 2 e) 2

4. Calcular E = a + b + c + d si el polinomio es completo, ordenado descendentemente:

$$P(x) = 2x^{c+d-1} + 5x^{b-c+1} + 7x^{a+b-4} + 8x^{a-3}$$

a) 5 b) 9 c) 4 d) 3 e) 2

5. Si el trinomio:

$$P = \sqrt[a]{x^{a+b}} + \sqrt[b]{x^{b-c}} + \sqrt[c]{x^{a+c}}$$

es homogéneo de grado 10, de qué grado será el monomio:

$$M = \sqrt[a]{x^b} + \sqrt[c]{x^a} + \sqrt[b]{x^c}$$

a) 5 b) 27 c) 9 d) 12 e) 8

6. Calcular la suma de coeficientes, si el polinomio:

$$P(x,y,z) = (m + n)x^{m^n} + (m - n)y^{n^m} + (m^2 - n^2)z^{m^{m-n}}$$

es homogéneo.

a) 12 b) 4 c) 2 d) 8 e) 20

7. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que:

$$P(x,y,z,w) = x^{m+n+p} + y^{n+p+q} + z^{p+q+m} + w^{m+n+q}$$

sea homogéneo:

a) m = n +p + q b) m = n = p = q

c) m = -n = -p = -q d) m = n - p + q

e) m + n = p + q

8. Si el polinomio es homogéneo:

$$P(a,b,c,) = a^x b^5 c^z + c^y a^z b - \frac{4a^y b^x}{c} - \frac{2}{3}\,\frac{a^{x+y}\,c^z}{a^3}$$

calcular: $E = \left[x^{zx^{-x}}\right]^{\sqrt[z]{x^y}}$

a) 10 b) 16 c) 64 d) 27 e) 256

9. Dado el polinomio homogéneo:

$$P = 3a^4 - 2a^2b^2 + 5ab^3$$

determinar el polinomio que debe agregarse a P para que el polinomio resultante sea un polinomio homogéneo y completo, tal que la suma de sus coeficientes sea 16 y su valor numérico para a = 2, b = 1 sea 88.

a) $2ab^3 + 4b^4$ b) $3a^3b - 5b^4$

c) $4a^3b + 6b^4$ d) $6a^3b + 4b^4$

e) $3a^3b + 6b^4$

10. Si el polinomio P(x,y) homogéneo, es de doble grado que el polinomio Q (x,y) y además que el grado con respecto a "y" en P(x,y) es el doble que en Q(x,y) hallar la suma de coeficientes de P(x,y) + Q(x,y) siendo:

$$P(x,y) = mnx^{4m}y^{3n+2} - nx^{2m}y^{5n+4} - mx^{3n}y^{5n+1}$$

$$Q(x,y) = mnx^{3m-1}y^n - mx^{m-2}y^{3n+1} - nx^{m-1}y^{3n}$$

a) 12 b) 10 c) 2 d) 4 e) 6

11. Calcular la suma de los coeficientes del polinomio:

$$P(x,y)= 8ax^{n^2-2}\,y^4 + 6(a-b)x^{a+b} + (20b-5)x^{n^2}y^{3n-6}$$

a) 147 b) 157 c) 227 d) 237 e) 247

12. Calcular el valor de E = m-n siendo m > n de tal manera que se cumple:

$$m(x + n) + n(x + m) \equiv 3x - 56$$

a) 14 b) 11 c) 10 d) 16 e) 18

13. Calcular el valor de "d" en:

$$4x^4 + 4x^2 + d \equiv (x^2 - x + 2)(ax^2 + bx + c) + bx^4 - 2x$$

a) 2 b) 1 c) 0 d) 3 e) 4

14. Calcular "a" en:

$$5x^2 + (a + 5)x - 64 \equiv 5(x - 2)(x + 4) + 3(x - a)$$

a) 5 b) 7 c) 8 d) 3 e) 1

15. Calcular "c" en la identidad:

$$3x^5 - 2x^4 + 3x - 7 \equiv a(x-1)^5 + b(x-1)^4 + c(x-1)^3 + d(x - 1) + e$$

a) 10 b) 20 c) 22 d) 18 e) 13

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) D	3) E	4) B	5) B
6) E	7) B	8) B	9) D	10) C
11) E	12) B	13) E	14) C	15) C

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

SUMA Y RESTA

Para sumar o restar expresiones algebraicas, se suma o se resta términos semejantes. Se denomina términos semejantes a aquellos que tienen la misma parte literal afectada por los mismos exponentes, los coeficientes pueden ser iguales o diferentes.

En las expresiones algebraicas se utiliza los "signos de agrupación", conocidos también el con nombre de **signos de colección**. Los más importantes son:

Paréntesis ( ) corchetes [ ]

llaves { } barra horizontal $\overline{\quad\quad}$

barra vertical |

SUPRESIÓN DE SIGNOS DE COLECCIÓN

Es la operación que permite eliminar los signos de agrupación; se opera así:

1) Cuando el signo de colección está precedido del signo más, se elimina sin producir ningún cambio:

$$a + (b - c) = a + b - c$$

2) Cuando el signo de colección está precedida del signo menos, se elimina cambiando de signo a todos, los términos que se encontraban dentro de él, así:

$$a - (b - c) = a - b + c$$

INTRODUCCIÓN DE SIGNOS DE COLECCIÓN

Es la operación que permite agrupar dos o más términos en uno; esta operación se realiza así:

1) Cuando va a ir precedido del signo más, se escribe el signo de colección respectivo, sin realizar ningún cambio de signo a los términos que quedan dentro de él. Así:

$$a + b - c = a + (b - c)$$

2) Cuando va a ir precedido del signo menos, se escribe el signo de colección respectivo cambiando del signo a todos los términos que se introducen. Así:

$$a - b + c = a - (b - c)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Simplificar:

$$E = -\{a - 2b - [2a - 3b - (2a - 3b - \overline{a - b})]\}$$

Solución:

Eliminemos en primer término la barra y a continuación el paréntesis:

$$E = -\{a - 2b - [2a - 3b - 2a + 3b + a - b]\}$$

Se observa que la barra, por estar con signo menos alteró los signos al ser retirada.

Eliminando la llave:

$$E = - a + 2b + [2a - 3b - 2a + 3b + a - b]$$

Eliminando el corchete:

$$E = - a + 2b + 2a - 3b - 2a + 3b + a - b = b$$

Rpta.: $E = b$

2.- Simplificar:

$$E = 2a - 3b - 2c + d - \{-a - [b - (a - b - c - \overline{-d + b - a + c})]\}$$

Solución:

Eliminando paréntesis y barra:

$$E = 2a - 3b - 2c + d - \{-a - [b - a + b + c + b - a + c - d]\}$$

Eliminado corchetes y llaves:

$$E = 2a - 3b - 2c + d + a + b - a + b + c + b - a + c - d = a$$

Rpta.: E = a

3.- Simplificar:

$$E = \underbrace{(-x - x - x - \ldots -x)}_{(n-2)\text{ veces}} + \underbrace{(3x + 3x + 3x + \ldots + 3x)}_{\frac{n}{3}\text{ veces}}$$

Solución:

Efectuando por partes:

$$\underbrace{(-x - x - x - \ldots -x)}_{(n-2)\text{ veces}} = (n - 2)(-x) = -nx + 2x$$

$$\underbrace{(3x + 3x + 3x + \ldots + 3x)}_{\left(\frac{n}{3}\right)\text{ veces}} = (3x)\left(\frac{n}{3}\right) = nx$$

Luego:

$$E = (-nx + 2x) + (nx) = 2x$$

Rpta.: E = 2x

4.- Simplificar:

$$E = \underbrace{(n + n + n + \ldots + n)}_{(n + 2)\text{ veces}} - [1^0 n + 2^0 n + 3^0 n + \ldots + (n - 2)^0 n]$$

Solución:

Efectuando por partes:

$$\underbrace{(n + n + n + \ldots + n)}_{(n + 2)\text{ veces}} = (n + 2)n = (n^2 + 2n) \quad (I)$$

Por otro lado, y en general, se tiene que $a^0 = 1$, luego la expresión:

$$[1^0 n + 2^0 n + 3^0 n + 4^0 n + \ldots + (n - 2)^0 n]$$

es igual a:

$$[n + n + n + \ldots + n]$$

debe hallarse el número de términos, para lo cual basta, con fijarse en el coeficiente que tenía originalmente, por lo tanto será:

$$\underbrace{[n + n + n + \ldots + n]}_{(n - 2)\text{ veces}} = [n(n - 2)] = [n^2 - 2n] \quad (II)$$

Reemplazando (I) y (II) en la expresión dada:

$$E = (n^2 + 2n) - [n^2 - 2n] = n^2 + 2n - n^2 + 2n = 4n$$

Rpta.: E = 4n

5.- Simplificar:

$$R = -\{\underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{\text{“m” veces}} - \underbrace{(-b - b - \ldots)}_{(2m - 1)\text{ veces}}$$

$$- \underbrace{[(a + 2b) + (a + 2b) + \ldots + (a + 2b)]}_{\text{“m” veces}}\}$$

Solución:

Efectuando por partes:

$$\underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{\text{“m” veces}} = (m \,.\, a)$$

$$\underbrace{(-b - b - \ldots)}_{(2m - 1)\text{ veces}} = (-b)(2m - 1) = (-2m + b)$$

$$\underbrace{[(a + 2b) + (a + 2b) + \ldots + (a + 2b)]}_{\text{“m” veces}} = (a + 2b)m = am + 2bm$$

Reemplazando en la expresión:

$$R = -[ma - (-2mb + b) - (am + 2bm)]$$

$$R = -ma = b - b - 2mb + am + 2bm = b$$

Rpta.: R = b

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si los polinomios:

$A = 3x^4 - 5x^2 + x - 1$

$B = 2x^4 + x^3 - 2x + 3$

$C = 4x^3 - x^2 + 7$

$D = 3x^2 - 4x + 2$

$E = x^4 - 2x^3 + 5x$

$F = -x^3 - 9x$

$G = -x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 9$

Calcular :

$$M = A - \{B + C - [D - E - (F + G)]\} - x^3$$

a) $2x^4$ b) x^3 c) x^4 d) x^3 e) $2x$

2. Hallar P + Q siendo:

$$P = -\{-x - y - \overline{-x - \overline{-y - [-x - \overline{-y - x}]}}\}$$

$$Q = 2x + \overline{-3x - \overline{-y - \overline{y - x + \overline{2(x - y) - 2y}}}}$$

a) $2y$ b) $3y$ c) y d) $-y$ e) $-2y$

3. Simplificar:

$$E = -[a - b - (a - \overline{b - a - (a - \overline{-b - a})})] - b$$

a) $2a$ b) a c) $3a$ d) b e) $2b$

4. Simplificar:

$$E = -\underbrace{(-2x - 2x - 2x - \dots -2x)}_{n \text{ veces}} - 2[(2x - x)$$
$$+(3x - 2x) + (4x - 3x) + (5x - 4x) + \dots$$
$$+\dots(n + 1)x - nx]$$

a) nx b) x c) 0

d) $(n+1)x$ e) $-nx$

5. Simplificar:

$$E = 2a - \{3b + (2b - c) - 4c + [2a - (3b - \overline{c - 2b})]\}$$

a) $2c$ b) $3c$ c) $5c$ d) $4c$ e) 0

6. Simplificar:

$$E = - \underbrace{\overline{-x - \overline{-x - \dots - \overline{-x - \overline{-x}}}}}_{(2n+1) \text{ veces}} - \underbrace{- \overline{x - x - \dots -x}}_{(n-1) \text{ veces}}$$

a) 0 b) nx c) x d) $2x$ e) $2nx$

7. Simplificar:

$$E = -\{a - 2b + c - \overline{2a - 3d + c} + [-(d - 2c)$$
$$+ (a - \overline{-2b + c} - d - 2c)]\}$$

a) a b) b c) c d) d e) 0

8. Simplificar:

$$E = 2x - \{-y + [2 - (-x - \overline{y - 2 + (x - y)}]\}$$

a) x b) 0 c) y d) $2y$ e) $2x$

9. Simplificar:

$$E = -\{-2b - 2(-3b + \overline{a - 2a - 3b - \overline{2a - b - \overline{-3a - 3}}})\}$$

a) 2 b) 6 c) a d) $2a$ e) $3b$

10. Simplificar:

$$E = \overline{-a - b} - \overline{-4a - b - \{a - 3b - \overline{2a - b - (4a - b - 2\overline{a - b}}}\}$$

a) $2a$ b) a c) $3a$ d) $4a$ e) $5a$

11. Simplificar:

$$E = [\underbrace{(a + a + a + \dots +a)}_{(n+1) \text{ veces}} - \overline{a + b - c} +$$
$$+ (\underbrace{-b - b - b - \dots -b}_{2n \text{ veces}}) + b +$$
$$+ (\underbrace{c + c + c + \dots + c}_{(3n-1) \text{ veces}})] + na + 3nc$$

a) b b) 2na c) nb d) nc e) na

12. Una persona A, tiene a pesetas, otra persona B tiene b pesetas, las dos juntan su dinero y gastan en tres ocasiones diferentes una suma desconocida x. En el momento de separarse, A toma una suma c. Lo que le queda a B es:

a) a + b + 3c - x b) a + b + x - c

c) a + b - x - c d) a + b - 3x - c

e) a + b + 3x - c

13. Tengo en la mano izquierda 3 piezas de moneda más que en la derecha; si tomo 5 de éstas para ponerlas en la primera, ¿cuántas hay en cada una, siendo x el número piezas de moneda de la derecha?

a) En la izquierda hay doble que en la derecha.

b) En la derecha hay x-5, y en la izquierda x + 8.

c) El número de piezas es igual en las dos manos.

d) Hay (x + 3) en la mano derecha y x=8 en la izquierda.

e) En la mano derecha hay doble que en la izquierda.

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) C	3) C	4) C	5) D
6) B	7) B	8) C	9) B	10) D
11) C	12) B	13) B		

MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es la operación que consiste en obtener una expresión llamada producto total, conociendo otras dos llamadas multiplicando y multiplicador.

PRODUCTO INDICADO

Como su nombre lo indica es la expresión todavia no efectuada, donde se indica multiplicando y multiplicador.

Ejemplo: $(a + b + mc)(ax - b)$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

1) El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.

2) El término independiente del producto es igual al producto de los términos independientes de los factores.

Ejemplo:

Hallar el grado y el término independiente del producto siguiente:

$$\underbrace{(4x^4+5x^2+6)}_{f(1)}\underbrace{(7x^5+6x^2+2)}_{f(2)}\underbrace{(3x^2+6x-3)}_{f(3)}\underbrace{(2x-5)}_{f(4)}$$

Solución:

1) Grado del producto =

grado de f(1) + grado de f(2)

+ grado de f(3) + grado de f (4)

$$G.P. = 4 + 5 + 2 + 1$$

$$G.P. = 12$$

2) Término independiente del producto

$$T.I.P. = [T.I.\ de\ f(1)]\ [T.I.\ de\ f(2)]$$

$$\cdot[T.I.\ de\ f(3)]\ [T.I.\ de\ f(4)]$$

$$T.I.P. = (6)\ (2)\ (-3)\ (-5)$$

$$T.I.P. = 180$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Calcular el valor de "n" si el grado del producto:

$$(x + 1)\ (x^2 + 2)\ (x^3 + 3)\ (x^4 + 4)\ \ldots\ (x^n + n)$$

es igual a 210.

Dato: $1= 2 + 3 = 4 + \ \ldots. + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

Solución:

Grado de producto $= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = 210$

Por dato del problema:

$$\frac{n(n + 1)}{2} = 210$$

$$n(n + 1) = 420$$

$$n(n + 1) = 20 \ .\ 21$$

$\therefore\ n = 20$

Rpta.: $n = 20$

2.- Hallar el valor de "n" si el grado del producto de los tres polinomios:

$$P(x) = \left(2x^{n^{n^n}} + 3x^{n^{n^n}} + 1\right)^{n^{n^n}}$$

$$Q(x) = \left(3x^{n^{n^n}} + 4x^n + 2\right)^2$$

$$R(x) = (5x + 3)$$

es 289

Dato: $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$

Solución:

El grado del producto es:

$$\left(n^{n^n}\right)\left(n^{n^n}\right) + \left(n^{n^n}\right) 2 + 1 = 289$$

haciendo: $n^{n^n} = a$ se obtiene:

$$(a)\ (a) + 2a + 1 = 289$$

$$a^2 + 2a + 1 = 289$$

$$(a + 1)^2 = 289$$

$$a + 1 = 17$$

$$a = 16$$

Reemplazando:

$$a = n^{n^n} = 16 = 2^{2^2}$$

Por lo tanto: n = 2

Rpta.: n = 2

3.- Hallar el grado de los polinomios P y Q sabiendo que el grado de $P^3(x) \cdot Q(x)$ es 17 y el grado de $P^2(x) \cdot Q^3(x)$ es 23.

Solución.

Sean los grados de los polinomios P y Q, respectivamente m y n, por lo tanto:

El grado de $P^3(x)$ será:

$$3m$$

Mientras que el grado de $P^3(x) \cdot Q(x)$ será:

$$3m + n = 17 \qquad (\alpha)$$

El grado de $P^2(x)$ será:

$$2m$$

El grado de $Q^3(x)$ será:

$$3n$$

y, el grado de $P^2(x) \cdot Q^3(x)$ será:

$$2m + 3n = 23 \qquad (\beta)$$

Calculemos los valores de "m" y "n" con (α) y (β):

Multiplicando $(\alpha) \cdot (-3)$ y luego sumando (β):

$$\begin{aligned} -9m - 3n &= -51 \\ 2m + 3n &= 23 \\ \hline -7m &= -28 \\ m &= 4 \end{aligned}$$

Reemplazando en (α):

$$3(4) + (n) = 17$$

$$n = 5$$

Rpta.: Grado de P (x) = 4

Grado de Q(x) = 5

4.- Hallar el grado del siguiente producto indicado:

$$[x^{(2)(1)} + 1]\,[x^{(4)(4)} + 1]\,[x^{(6)(9)} + 1][x^{(8)(16)} + 1] \ldots$$

considerar "n" factores.

Datos: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Solución:

El grado del producto indicado es:

$$G.P.I. = (2)(1) + (4)(4) + (6)(9) + (8)(16) + \ldots$$

Extrayendo factor común 2:

$$G.P.I. = 2\,[1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 16 + \ldots]$$

$$G.P.I. = [1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3]$$

$$G.P.I. = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$$

$$G.P.I. = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$$

5.- Hallar el valor de "n" si el término independiente del producto:

$$(x^2 + 2)\,(x^4 + 4)\,(x^8 + 8)\,(x^{16} + 16) \ldots (x^2 + 2n)$$

es 2^{325}

Dato: $1 + 2 + 3\ \ 4 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Solución:

El término independiente del producto es:

$$(2)\,(4)\,(8)\,(16) \ldots (2^n) = 2^{325}$$

$$(2)^1(2)^2(2)^3(2)^4 \ldots (2^n) = 2^{325}$$

que se escribe también como:

$$2^{1+2+3+4+\ldots+n} = 2^{325}$$

Por dato se tiene:

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{325}$$

de aquí: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 325$

$$n(n+1) = 650$$

$$n(n+1) = 25 \cdot 26$$

Rpta.: $n = 25$

CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA MULTIPLICACIÓN

I) Cuando son dos monomios.

Se multiplica los signos, luego los coeficientes y por último las partes literales utilizando la teoría de los exponentes.

II) Cuando son dos polinomios.

En este caso se puede utilizar dos métodos.

a) Método normal.- Se ordenan los polinomios preferentemente en forma descendente y se escriben uno debajo del otro. A continuación se multiplica separadamente cada término del multiplicador, por cada uno de los términos del multiplicando, sus signos, sus coeficientes y sus letras; y se obtiene los productos parciales, los cuales se escriben en forma ordenada uno debajo del otro del mismo grado y se suma ordenadamente obteniéndose el producto total.

Ejemplo: Efectuar:

$$(4x^3 + 5x^2y + 7xy^2 - 2y^3)(2x^2-5xy+3y^2)$$

Solución:

Disposición de la operación:

$$\begin{array}{llllll}
4x^3 & + 5x^2y & + 7xy^2 & - 2y^3 & & \\
2x^2 & - 5xy & + 3y^2 & & & \\
\hline
8x^5 & + 10x^4y & + 14x^3y^2 & - 4y^2x^3 & & \\
 & -20x^4y & - 25x^3y^2 & - 35x^2y^3 & + 10xy^4 & \\
 & & +12x^3y^2 & + 15x^2y^3 & + 21xy^4 & - 6y^5 \\
\hline
8x^5 & - 10x^4y & + x^3y^2 & - 24x^2y^3 & + 31xy^4 & - 6y^5
\end{array}$$

b) Método de Coeficientes Separados.-

En este método se debe tener en cuenta lo siguiente:

1) Los polinomios deben estar ordenados descendentemente.

2) Se escriben los coeficientes del multiplicando, y multiplicador en línea horizontal, uno debajo del otro.

3) Se opera como en el método anterior, corriendo un lugar hacia la derecha después de obtener cada producto parcial.

4) Para obtener el grado del producto total se aplica la propiedad del grado del producto.

5) Este método es recomendable para polinomios de una sola variable.

6) En caso de faltar una potencia de la variable se completa con coeficiente cero.

Ejemplo: Efectuar:

$$(4x^3 + 7x^2 - 6)\ (2x^2 - 3x-4)$$

Solución:

La operación se dispone de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrrrrr}
4 & +\ 7 & +\ 0 & -\ 6 & & \\
2 & -\ 3 & -\ 4 & & & \\
\hline
8 & +\ 14 & +\ 0 & -\ 12 & & \\
 & -\ 12 & -\ 21 & -\ 0 & +\ 18 & \\
 & & -\ 16 & -\ 28 & -\ 0 & +\ 24 \\
\hline
8 & +\ 2 & -\ 37 & -\ 40 & +\ 18 & +\ 24
\end{array}$$

El grado del producto es:

$$3 + 2 = 5$$

El producto total es:

$$8x^5 + 2x^4 - 37x^3 - 40x^2 + 18x + 24$$

PRODUCTOS NOTABLES

DEFINICIÓN.-

Denominados también "identidades algebraicas". Son aquellos productos cuyo desarrollo es clásico y por ésto se le reconoce fácilmente. Los más importantes son:

I) Cuadrado de una suma y una diferencia.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

En general

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

II) Producto de una suma por su diferencia.

Es igual a la diferencia de cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

III) Cuadrado de un trinomio.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

IV) Cubo de una suma o diferencia.

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2+b^3$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

V) Producto de dos binomios que tienen un término común.

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

VI) Producto de un binomio por un trinomio que da una suma o diferencia de cubos.

- $(a + b)\ (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- $(a - b)\ (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

De manera general:

$$(a \pm b)\ (a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

VII) Identidades de Legendre

- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

VIII) Identidades de Lagrange

- $(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$
- $(ax + by + cz) + (bx - ay)^2 + (cx - az)^2 + (cy - bz)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Efectuar:

$$E = \sqrt[2^n]{b^{2^n} + \sqrt{b^{2^{n+1}} - a^{2^n}}}\ .\ \sqrt[2^n]{b^{2^n} - \sqrt{b^{2^{n+1}} - a^{2^n}}}$$

Solución: Haciendo el cambio:

$$b^{2^n} = x$$

$$b^{2^{n+1}} = b^{2^n \,.\, 2} = \left[b^{2^n}\right]^2 = x^2$$

$$a^{2^n} = y$$

Se obtiene:

$$E = \sqrt[2^n]{x + \sqrt{x^2 - y}}\ .\ \sqrt[2^n]{x - \sqrt{x^2 - y}}$$

Por tener iguales índices los radicales, se escribe:

$$E = \sqrt[n]{\left(x + \sqrt{x^2 - y}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - y}\right)}$$

Efectuando el producto notable de una suma por su diferencia:

$$E = \sqrt[2^n]{x^2 - \left(\sqrt{x^2 - y}\right)^2} = \sqrt[2^n]{x^2 - x^2 + y} = \sqrt[2^n]{y}$$

Reponiendo: $y = a^{2^n}$

$$E = \sqrt[2^n]{a^{2^n}} = a^{\frac{2^n}{2^n}} = a$$

Rpta.: $E = a$

2.- Calcular el valor de:

$$E = \sqrt[32]{1 + 3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)}$$

Solución:

Se puede escribir que: $3 = 2^2 - 1$; reemplazando este valor en la expresión, se obtendrá sucesivamente:

$$(2^2 - 1)(2^2 + 1) = 2^4 - 1$$
$$(2^4 - 1)(2^4 + 1) = 2^8 - 1$$
$$(2^8 - 1)(2^8 + 1) = 2^{16} - 1$$
$$(2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$$
$$(2^{32} - 1)(2^{32} + 1) = 2^{64} - 1$$
$$(2^{64} - 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1$$

Finalmente la expresión quedará así:

$$E = \sqrt[32]{1 + 2^{128} - 1} = \sqrt[32]{2^{128}} = 2^{\frac{128}{32}} = 2^4 = 16$$

Rpta.: $E = 16$

3.- Efectuar:

$$R = (a + b + c)(a + b - c) + (a + b - c)(a - b + c)$$
$$+ (a - b + c)(b + c - a) + (b - c + a)(b - c - a) - 4ab$$

Solución:

Reescribiendo la expresión de la manera siguiente:

$$R = [(a + b) + c][(a + b) - c] + [a + (b - c)]$$
$$[a - (b - c)] + [c + (a - b)][c - (a - b)]$$
$$+ [(b - c) + a][(b - c) - a] - 4ab$$

Efectuando los productos notables:

$$R = (a + b)^2 - c^2 + a^2 - (b - c)^2 + c^2 - (a - b)^2$$
$$+ (b - c)^2 - a^2 - 4ab$$

Reduciendo términos semejantes se obtiene:

$$R = (a + b)^2 - (a - b) - 4ab$$

$$R = 4ab - 4ab = 0$$

Rpta.: $R = 0$

4.- Efectuar:

$$L = \frac{(x + a + b + c)(x + a + b + d) - cd}{x + b + c + d}$$

$$- \frac{(x + a + b)(x + a + c) - bc}{x + a + b + c}$$

Solución:

Haciendo: $x + a + b = m$; $x + a = n$; se obtiene:

$$L = \frac{(m + c)(m + d) - cd}{m + c + d} - \frac{(n + b)(n + c) - bc}{n + b + c}$$

Efectuando los productos notables de binomios con términos común:

$$L = \frac{m^2 + (c + d)m + cd - cd}{m + c + d} - \frac{n^2 + (b + c)n + bc - bc}{n + b + c}$$

Factorizando m y n:

$$L = \frac{m(m + c + d)}{(m + c + d)} - \frac{n(n + b + c)}{(n + b + c)} = m - n$$

Reponiendo los valores dados a m y n:

$$L = x + a + b - (x + a) = b$$

Rpta.: $L = b$

5.- Efectuar:

$$y = (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)$$
$$+ (c^2 - a^2 - b^2)^2$$

Solución:

Se puede escribir asi:

$$y = [(a + b) + c][(a + b) - c][c + (a - b)][c - (a - b)]$$
$$+ (c^2 - a^2 - b^2)^2$$

Efectuando el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto:

$$y = [(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2] + (c^2 - a^2 - b^2)^2$$

$$y = (a+b)^2c^2 - (a^2 - b^2)^2 - c^4 + c^2(a - b)^2 + [c^2 - (a^2 + b^2)]^2$$

$$y = -c^4 + [(a + b)^2 + (a - b)^2]c^2 - (a^2 - b^2)^2$$
$$+ c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)^2$$

Ordenando:

$$y = -c^4 + 2(a^2 + b^2)c^2 + c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2$$
$$+ [(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2]$$

$$y = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$$

Rpta.: $y = 4a^2b^2$

6.- Efectuar:

$$E = (x - 1)(x + 4)(x + 2)(x - 3) + (x - 2)(x + 5)(x + 3)(x - 4) - 2(x^2 + x - 10)^2$$

Solución:

Ordenemos de la siguiente manera:

$$E = (x - 1)(x + 2)(x + 4)(x - 3) + (x - 2)(x + 3)(x + 5)(x - 4) - 2(x^2 + x - 10)^2$$

tomando de 2 en 2 factores:

$$(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 20) - 2(x^2 + x - 10)^2$$

Haciendo $x^2 + x = a$:

$$E = (a - 2)(a - 12) + (a - 6)(a - 20) - 2(a - 10)^2$$

efectuando:

$$E = a^2 - 14a + 24 + a^2 - 26a + 120 - 2a^2 + 40a - 200 = -56$$

Rpta.: $E = -56$

7.- Simplificar

$$E = (a^{2b} + a^b b^a + b^{2a} + a^b - b^a)^2 - (a^{2b} + a^b b^a - a^b + b^{2a} + b^a)^2 + 4b^{3a}$$

Solución:

Ordenando cada expresión:

$$E = [(a^{2b} + a^b b^a + b^{2a}) + (a^b - b^a)]^2 - [(a^{2b} + a^b b^a + b^{2a}) - (a^b - b^a)]^2 + 4b^{3a}$$

Haciendo: $a^{2b} + a^b b^a + b^{2a} = x \quad ; \quad a^b - b^a = y$

$$E = (x + y)^2 - (x - y)^2 + 4b^{3a}$$

y, aplicando Legendre:

$$E = 4xy + 4b^{3a}$$

reponiendo valores de x é y:

$$E = 4(a^{2b} + a^b b^a + b^{2a})(a^b - b^a) + 4b^{3a}$$

los paréntesis dan una diferencia de cubos:

$$E = 4(a^{3b} - b^{3a}) + 4b^{3a} = 4a^{3b} - 4b^{3a} + 4b^{3a} = 4a^{3b}$$

Rpta.: $E = 4a^{3b}$

8.- Simplificar:

$$E = (a + b - x)^2 + (b + x - a)^2(x + a - b)^2 + (a + b + x)^2 - 4(a^2 + b^2 + x^2)$$

Solución:

Ordenando:

$$E = [(a + b) - x]^2 + [(a + b) + x]^2 + [x - (a - b)]^2 + [x + (a - b)]^2 - 4(a^2 + b^2 + x^2)$$

Utilizando Legendre, primero con segundo, y tercero con cuarto sumandos:

$$E = 2[(a + b)^2 + x^2] + 2[x^2 + (a - b)^2] - 4(a^2 + b^2 + x^2)$$

efectuando y ordenando:

$$E = 2[(a + b)^2 + (a - b)^2] + 4x^2 - 4(a^2 + b^2) - 4x^2$$

reduciendo con Legendre nuevamente:

$$E = 2[2(a^2 + b^2)] - 4(a^2 + b^2)$$

$$E = 4(a^2 + b^2) - 4(a^2 + b^2) = 0 \qquad \therefore$$

Rpta.: $E = 0$

9.- Simplificar:

$$P = \frac{(a^4x^4 + b^4)^2 + (b^4x^4 - a^4y^4)^2 + (x^8 + y^8)(a^8 + b^8)}{(a^4y^4 - b^4x^4)^2 + (a^4x^4 + b^4y^4)^2}$$

Solución:

Por Lagrange:

$$(a^4x^4 + b^4y^4)^2 + (b^4x^4 - a^4y^4)^2 = (x^8 + y^8)(a^8 + b^8)$$

$$(a^4y^4 - b^4x^4)^2 + (a^4x^4 + b^4y^4)^2 = (x^8 + y^8)(a^8 + b^8)$$

por lo tanto:

$$P = \frac{(a^8 + b^8)(x^8 + y^8) + (x^8 + y^8)(a^8 + b^8)}{(x^8 + y^8)(a^8 + b^8)} = 2$$

Rpta.: $P = 2$

10.- Simplificar:

$$J = \frac{\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2\right]^2 - 4\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^2}{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^3\right]^2 - \left[\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^3\right]^2}$$

Solución:

Haciendo: $\frac{x}{y} = a$; $\frac{y}{x} = b$:

$$J = \frac{[(a+b)^2 + (a-b)^2]^2 - 4\ (a^2-b^2)^2}{[a^3+b^3]^2 - [a^3-b^3]^2}$$

Aplicando Legendre:

$$J = \frac{4(a^2+b^2)^2 - 4(a^2-b^2)^2}{4a^3b^3} = \frac{4a^2b^2}{a^3b^3} = \frac{4}{ab}$$

$$= \frac{4}{\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)} = 4$$

Rpta.: $J = 4$

11.- Simplificar la expresión:

$$A = \frac{(x^2-a^2)^2\ (x^3+a^3)^3\ (x^2+ax+a^2)^2}{(x^3-a^3)^2\ (x+a)^5\ (x^2-ax+a^2)^3}$$

Solución:

Aplicando los productos notables en forma inversa:

$$A = \frac{[(x+a)(x-a)]^2[(x+a)(x^2-ax+a^2)]^3(x^2+ax+a^2)^2}{[(x-a)(x^2+ax+a^2)]^2\ (x+a)^5\ (x^2-ax+a^2)^3}$$

Efectuando:

$$A = \frac{(x+a)^2(x-a)^2(x+a)^3(x^2-ax+a^2)^3(x^2+ax+a^2)^2}{(x-a)^2(x^2+ax+a^2)^2\ (x+a)^5\ (x^2-ax+a^2)^3} = 1$$

Rpta.: $A = 1$

12.- Simplificar:

$$C = \frac{(a+b+c)(a+b+d)+(a+c+d)(b+c+d)-(a+b+c+d)^2}{(ad-bc)^2+(ac+bd)^2-(a^2+b^2)(c^2+d^2)+ab+cd}$$

Solución:

En el numerador, hagamos que:

$$a + b = x \quad ; \quad c + d = y$$

$$N = (x+c)(x+d) + (y+a)(y+b) - (x+y)^2$$

$$N = x^2+(c+d)x+cd+y^2+(a+b)y+ab-x^2-2xy-y^2$$

$$N = xy + cd + xy + ab - 2xy = cd + ab$$

En el denominador, observamos que se puede aplicar Lagrange a los dos primeros términos:

$$(ad-bc)^2 + (ac+bd)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

De esta manera:

$$D = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (a^2+b^2)(c^2+d^2) + ab + cd$$

$$D = ab + cd$$

Sustituyendo estos equivalentes en la expresión :

$$C = \frac{N}{D} = \frac{cd+ab}{ab+cd} = 1$$

Rpta.: $C = 1$

13.- Simplificar:

$$E = (a^{2n}+b^{2n}-c^{2n})(b^{2n}+c^{2n}-a^{2n}) + 2c^{2n}(c^{2n}-a^{2n}) + (a^n-b^n)(a^n+b^n)(a^{2n}+b^{2n})$$

Solución:

Apliquemos productos notables y operemos:

$$E = b^{4n} - (a^{2n}-c^{2n})^2 + 2c^{4n} - 2c^{2n}a^{2n} + (a^{2n}-b^{2n})(a^{2n}+b^{2n})$$

Efectuando:

$$E = b^{4n} - a^{4n} + 2a^{2n}c^{2n} + 2c^{4n} - c^{4n} + 2a^{2n}c^{2n} + a^{4n} - b^{4n} = c^{4n}$$

Rpta.: $E = c^{4n}$

14.- Efectuar:

$$R = \frac{a(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2bc} + \frac{b(c^2+a^2)(c^2+a^2-b^2)}{2ac} + \frac{c(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$$

Solución:

Haciendo el siguiente artificio para obtener un denominador común:

$$R = \frac{a^2(b^2+c^2)^2 - a^4(b^2+c^2)}{2abc} + \frac{b^2(c^2+a^2)^2 - b^4(c^2+a^2)}{2abc}$$

$$+ \frac{c^2(a^2+b^2)^2 - c^4(a^2+b^2)}{2abc}$$

$$R = \frac{a^2b^4 + 2a^2b^2c^2 + a^2c^4 - a^4b^2 - a^4c^2 + b^2c^4}{2abc}$$

$$\frac{+ 2a^2b^2c^2 + b^2a^4 - b^4c^2 - a^2b^4 + c^2a^4 + 2a^2b^2c^2}{}$$

$$\frac{+ b^4c^2 - a^2c^4 - c^4b^2}{}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$R = \frac{6a^2b^2c^2}{2abc} = 3abc$$

Rpta.: $R = 3abc$

15.- Efectuar:

$$R = [(x-1)^2(x+1)^2(x^2-1)^3(x^2+1)^5(x^4+1)^5 (x^8-1)^3]^{1/8} - x^8$$

Solución:

Efectuando por pares para ir reduciendo de izquierda a derecha:

$$(x-1)^2\,(x+1)^2 = [(x-1)\,(x+1)]^2 = (x^2-1)^2$$

éste con el siguiente factor:

$$(x^2-1)^2\,(x^2-1)^3 = (x^2-1)^5$$

este con el siguiente factor, y asi sucesivamente etc.

$$(x^2-1)^5\,(x^2+1)^5 = [(x^2-1)(x^2+1)]^5 = (x^4-1)^5$$

$$(x^4-1)^5\,(x^4+1)^5 = [(x^4-1)(x^4+1)]^5 = (x^8-1)^5$$

$$(x^8-1)^5\,(x^8-1)^3 = (x^8-1)^8$$

finalmente, al sustituir en la expresión:

$$E = [(x^8-1)^8]^{1/8} - x^8$$

$$E = x^8 - 1 - x^8 = -1$$

Rpta.: $E = -1$

16.- Efectuar:

$$E = \sqrt{(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2 - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$$

Solución:

Efectuando el trinomio al cuadrado:

$$E = \sqrt{(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2 - (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)(a^2+b^2+c^2)}$$

haciendo: $a^2+b^2+c^2 = x$;

$ab+ac+bc = y$;

$$E = \sqrt{(x+y)^2 - (x+2y)\,(x)}$$

efectuando:

$$E = \sqrt{x^2+2xy+y^2-x^2-2xy} = y = ab+bc+ca$$

Rpta.: $E = ab + ac + bc$

17.- Efectuar:

$$E = (a+b+c)(a+b+c+1) + (a+b-c)(a+b-c-1)$$

$$+(a-b-c)(a-b-c+1)+(a-b+c)(a-b+c-1)$$

Solución:

Efectuando cada producto:

$$E = (a+b+c)^2 + a + b + c + (a+b-c)^2 - a - b + c$$

$$+ (a-b-c)^2 + (a-b-c) + (a-b+c)^2 - a + b - c$$

reduciendo y aplicando Legendre:

$$E = 2[(a+b)^2 + c^2] + 2\,[(a-b)^2 + c^2]$$

$$E = 2[2(a^2+b^2) + 2c^2] = 4(a^2+b^2+c^2)$$

Rpta.: $E = 4(a^2+b^2+c^2)$

18.- Efectuar:

$$(a+b+c)^3 + 2(a^3+b^3+c^3) - 3(a^3+ab^2+ac^2+ba^2+b^3)$$

$$-3(bc^2+ca^2+cb^2+c^3)$$

Solución:

Efectuando por partes:

$$(a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c$$

$$+ 3(a+b)c^2 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c$$

$$+ 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

Reemplazando en la expresión principal:

$$P = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3b^2a + 3c^2a$$
$$+ 3c^2b + 6abc + 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - 3a^3 - 3ab^2 - 3ac^2$$
$$- 3ba^2 - 3b^3 - 3bc^2 - 3ca^2 - 3cb^2 - 3c^3 = 6abc$$

Rpta.: $P = 6abc$

19.- Efectuar:

$$E = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$$
$$(x^{16} - x^8 + 1) - x^{16}(x^{16} + 1)$$

Solución:

Analizando el producto conforme aumenta el número de factores:

1) Producto de 2 factores:

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1) = [(x^2 + 1) + x][(x^2+ 1) - x]$$
$$= [(x^2 + 1)^2 - x^2] = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$$
$$= x^4 + x^2 + 1 = x^{2^2} + x^{2^{2-1}} + 1$$

2) Producto de 3 factores:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$
$$= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = [(x^4 + 1) + x^2]$$
$$. [(x^4+1)-x^2] = (x^4+1)^2-x^4=x^8+2x^4+1-x^4$$
$$= x^8 + x^4 + 1 = x^{2^2} + x^{2^{3-1}} + 1$$

3) Para 4 factores teniendo en cuenta, la ley de formación:

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$$
$$= x^{2^4} + x^{2^{4-1}} + 1$$

4) Para 5 factores:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$$
$$(x^{16} - x^8 + 1) = x^{2^5} + x^{2^{5-1}} + 1$$

Finalmente, reemplazando en la expresión:

$$E = x^{32} + x^{16} + 1 - x^{32} - x^{16} = 1$$

Rpta.: $E = 1$

20.- Efectuar:

$$E = (a - b + c - d)(a + b + c + d)$$
$$+ (a + b - c - d)(a - b - c + d)$$
$$-2 [(a + b)(a - b) + (c + d)(c - d)]$$

Solución:

Agrupamos los términos de la siguiente manera:

$$E = [(a + c) - (b + d)][(a + c) + (b + d)]$$
$$+ [(a - c) + (b - d)][(a - c) - (b - d)]$$
$$- 2 [(a^2 - b^2 + c^2 - d^2]$$

$$E = (a + c)^2 - (b + d)^2 + (a - c)^2 - (b - d)^2$$
$$- 2(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)$$

Aplicando Legendre:

$$E = 2(a^2 + c^2) - 2(b^2 + d^2) - 2(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)$$
$$E = 2a^2 + 2c^2 - 2b^2 - 2d^2 - 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 + 2d^2$$

Rpta.: $E = 0$

VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es el valor que toma dicha expresión cuando se le atribuye ciertos valores numéricos a sus letras. Puede ser:

a) Valor numérico sin condición.

Es aquel que se obtiene al reemplazar inmediatamente los valores atribuidos a sus letras.

Ejemplo: Hallar el valor de:

$$E = \sqrt{(a - y)\left(\sqrt{2bx} + x\right)} + \sqrt{(a - x)(b + y)}$$

para $a = 16$; $b = 10$; $x = 5$; $y = 1$

Solución:

Reemplazando los valaores asignados:

$$E = \sqrt{(16 - 1)\left(\sqrt{2(10)(5)} + 5\right)} + \sqrt{(16 - 5)(10 + 1)}$$

$$E = \sqrt{15(10 + 5)} + \sqrt{11 . 11}$$

$$E = 15 + 11 = 26$$

Rpta.: $E = 26$

b) Valor numérico con condición.

Es aquel que se caracteriza porque utiliza una condición de intermedio. Para determinarlo se emplea la condición simplificándola y luego aplicándola con la expresión misma y luego cambiándola con la condición.

Ejemplo: Determinar el valor de:

$$E = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

si, $a + b + c = 0$

Solución:

Trabajando con la expresión:

$$E = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$$

efectuando parcialmente:

$$E = \frac{a + c}{b} + \frac{b + c}{a} + \frac{a + b}{c}$$

de la condición:

$$a + c = -b$$
$$b + c = -a$$
$$a + b = -c$$

reemplazando en la expresión:

$$E = \frac{-b}{b} + \frac{-a}{a} + \frac{-c}{c} = -1 - 1 - 1 = -3$$

Rpta.: $E = -3$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Calcular el valor de:

$$E = \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc}\right]\left[\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}\right]$$

para: $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$; $b = \sqrt{2} - \sqrt{5}$;

$c = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Solución:

Sumando los tres valores de a, b, c:

$$a + b + c = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0$$

Es la misma condición del ejercicio ilustrativo, es decir: $a + b + c = 0$; en este caso, puede asegurarse valores diferentes a "a", "b" y "c" de tal manera que la suma sea cero ya que la expresión es homogénea. Sean estos valores diferentes a cero: $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ y reemplazando:

$$E = \left[\frac{1 + 4 + 9}{2 - 3 - 6}\right]\left[-\frac{1}{6} - \frac{4}{3} + \frac{9}{2}\right]$$

efectuando:

$$E = -\left[\frac{14}{7}\right]\left[\frac{-1 - 8 + 27}{6}\right] = (-2)(3) = -6$$

Rpta.: $E = -6$

2.- Si se tiene que:

$$a = \frac{1}{x - y} \;;\; b = \frac{1}{x + y} \;;\; c = \frac{2x}{y^2 - x^2}$$

Calcular:

$$E = \frac{(a^2 + ab^2 + b^2)(a^2 + ac + c^2) - (b^2 - bc + c^2)^2}{bc(b^2 + c^2)}$$

Solución:

Sumando los tres datos:

$$a + b + c = \frac{1}{x - y} + \frac{1}{x + y} + \frac{2x}{y^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{x - y} + \frac{1}{x + y} + \frac{2x}{y^2 - x^2}$$

$$a + b + c = \frac{x + y + x - y - 2x}{x^2 - y^2} = \frac{0}{x^2 - y^2} = 0$$

Resulta que esta condición también es igual a la del ejemplo ilustrativo, por lo tanto: $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

$$R = \frac{(1 + 2 + 4)(1 - 3 + 9) - (4 + 6 + 9)^2}{-6(4 + 9)}$$

$$= \frac{(7)(7) - (19)^2}{-6(13)} = \frac{-312}{-78} = 4$$

Rpta.: $R = 4$

3.- Si se cumple que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz,$$

calcular:

$$E = \sqrt[7]{\frac{x^8 + y^8 + x^8}{(x+y+z)^8}} + \sqrt[8]{\frac{x^9 + y^9 + z^9}{(x+y+z)^9}} + \sqrt[9]{\frac{x^{10} + y^{10} + z^{10}}{(x+y+z)^{10}}}$$

Solución:

La condición, se multiplica por "2":

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2xz + 2yz$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (x^2 - 2xz + z^2) = 0$$

Escribiendo los equivalentes de cada paréntesis:

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 0$$

para que la suma de tres números positivos sea cero, cada uno de ellos debe ser cero, por lo tanto:

$$x - y = 0 \qquad x = y$$

$$y - z = 0 \qquad y = z$$

$$x - z = 0 \qquad x = z$$

de lo anterior:

$$x = y = z = t$$

reemplazando en la expresión, cuyo valor se quiere calcular:

$$E = \sqrt[7]{\frac{t^8 + t^8 + t^8}{(t+t+t)^8}} + \sqrt[8]{\frac{t^9 + t^9 + t^9}{(t+t+t)^9}} + \sqrt[9]{\frac{t^{10} + t^{10} + t^{10}}{(t+t+t)^{10}}}$$

$$E = \sqrt[7]{\frac{3t^8}{(3t)^8}} + \sqrt[8]{\frac{3t^9}{(3t)^9}} + \sqrt[9]{\frac{3t^{10}}{(3t)^{10}}}$$

$$E = \sqrt[7]{\frac{1}{3^7}} + \sqrt[8]{\frac{1}{3^8}} + \sqrt[9]{\frac{1}{3^9}}$$

$$E = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Rpta.: $E = 1$

4.- Calcular el valor numérico de:

$$E = \sqrt{\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}}$$

siendo: $x + y = 4\sqrt[3]{p^2 - q^2 - 1}$

$$xy = 5\left(\sqrt[3]{p^2 - q^2 - 1}\right)^2$$

Solución:

El numerador se puede escribir así:

$$x^4 + x^2 \,.\, y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2$$

$$= (x^2+y^2)^2 - (xy)^2$$

$$x^4 + x^2 \,.\, y^2 + y^4 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - x) \qquad (1)$$

El denominador se puede escribir así:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 \qquad (2)$$

Del dato, haciendo $\sqrt[3]{p^2 - q^2 - 1} = b$; por lo tanto:

$$x + y = 4b \qquad (\alpha)$$

$$xy = 5b^2 \qquad (\beta)$$

Elevando al cuadrado (α):

$$x^2 + 2xy + y^2 = 16b^2 \qquad (\gamma)$$

reemplazando (β) en (γ):

$$x^2 + 10b^2 + y^2 = 16b^2$$

$$x^2 + y^2 = 6b^2 \qquad (\theta)$$

Sustituyendo (1) y (2) en la expresión principal:

$$E = \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)}{(x^2 + y^2)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)}}{x^2 + y^2}$$

Sustituyendo (θ), (β) en esta última expresión:

$$E = \frac{\sqrt{(6b^2+5b^2)(6b^2-5b^2)}}{6b^2} = \frac{\sqrt{(11b^2)(b^2)}}{6b^2}$$

$$= \frac{\sqrt{11b^2}}{6b^2} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

Rpta.: $E = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$

5.- Calcular:

$$R = \frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}$$

si: $a + \sqrt{ac} = b + \sqrt{bc}$

$$a \neq b \quad ; \quad abc \neq 0$$

Solución:

De la condición:

$a - b = \sqrt{bc} - \sqrt{ac}$

Considerando a - b como una diferencia de cuadrados:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = -\sqrt{c}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$$

Simplificando:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = -\sqrt{c} \qquad (1)$$

elevando al cubo:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^3 = \left(-\sqrt{c}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^3 + 3\left(\sqrt{a}\right)^2\sqrt{b} + 3\sqrt{a}\left(\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^3 = -\left(\sqrt{c}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^3 + \left(\sqrt{b}\right)^3 + \left(\sqrt{c}\right)^3 = -3\sqrt{a}\sqrt{b}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$$

Como $\sqrt{a} + \sqrt{b} = -\sqrt{c}$, de (1) se tiene:

$$\left(\sqrt{a}\right)^3 + \left(\sqrt{b}\right)^3 + \left(\sqrt{c}\right)^3 = 3\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} \qquad (2)$$

Dando común denominador a la expresión que se quiere calcular:

$$R = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^3 + \left(\sqrt{b}\right)^3 + \left(\sqrt{c}\right)^3}{\sqrt{abc}}$$

Sustituyendo (2) en esta última:

$$R = \frac{3\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}{\sqrt{abc}} = 3$$

Rpta.: R = 3

6.- Calcular:

$$G = \frac{\sqrt{\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}}{\sqrt{2\sqrt{y} - \sqrt{x}}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + 1$$

si se cumple: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{x+y}$

Solución:

De la condición, efectuando operaciones:

$y(x + y) + x(x + y) = 4xy$

$yx + y^2 + x^2 + xy = 4xy$

$x^2 - 2xy + y^2 = 0 \quad ; \quad (x - y)^2 = 0$

$x - y = 0$

$x = y$

Sustituyendo en la expresión propuesta todo por x:

$$G = \frac{\sqrt{\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}}{\sqrt{2\sqrt{x} - \sqrt{x}}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 1$$

$$G = \frac{2\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}}} + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Rpta.: G = 5

7.- Calcular el valor de:

$$E = a^a b^b - a^b b^a$$

si se sabe que:

$$a^{2b} + b^{2b} = 5 \qquad (1)$$

$$a^{a+b} + b^{a+b} = 7 \qquad (2)$$

$$a^{2a} + b^{2a} = 26 \qquad (3)$$

Solución:

Multiplicando (1) por (3):

$$(a^{2b} + b^{2b})(a^{2a} + b^{2a}) = 130$$

$$a^{2a+2b} + a^{2b}b^{2a} + a^{2a}b^{2b} + b^{2a+2b} = 130$$

o también, reordenando:

$$a^{2b}b^{2a} + a^{2a}b^{2b} + a^{2a+2b} + b^{2a+2b} = 130 \quad (4)$$

Elevando al cuadrado (2):

$$(a^{a+b} + b^{a+b})^2 = 49$$

$$a^{2a+2b} + 2a^{a+b}b^{a+b} + b^{2a+2b} = 49$$

de aquí:

$$a^{2a+2b} + b^{2a+2b} = 49 - 2a^{a+b}b^{a+b} \qquad (5)$$

reemplazando (5) en (4):

$$a^{2a}b^{2b} + a^{2b}b^{2a} + 49 - 2a^{a+b}b^{a+b} = 130$$

$$a^{2a}b^{2b} - 2a^{a+b}b^{a+b} + a^{2b}b^{2a} = 130 - 49$$

$$(a^ab^b)^2 - 2a^a \,.\, a^b \,.\, b^a \,.\, b^b + (a^bb^a)^2 = 81$$

$$(a^2b^2)^2 - 2(a^aa^b)(a^bb^a) + (a^bb^a)^2 = 81$$

o sea:

$$(a^ab^b - a^bb^a)^2 = 81$$

extrayendo raíz:

$$a^ab^b - a^bb^a = 9$$

sustituyendo en E:

$$E = a^ab^b - a^bb^a = 9$$

Rpta.: $E = 9$

8.- Sabiendo que se cumple que:

$$\frac{\left(2\sqrt{a+b} + a + b\right)\left(\sqrt{a+b} - a\right)\left(\sqrt{a+b} - b\right)}{\left(2\sqrt{a+b} - a - b\right)\left(\sqrt{a+b} + a\right)\left(\sqrt{a+b} + b\right)} = 1$$

Calcular: $E = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Solución:

Los primeros factores del numerador y del denominador pueden ser reescritos así:

$$2\sqrt{a+b} + (a+b) = \sqrt{a+b}\left(2 + \sqrt{a+b}\right)$$

$$2\sqrt{a+b} - (a+b) = \sqrt{a+b}\left(2 - \sqrt{a+b}\right)$$

Por lo tanto, sustituyendo y simplificando la condición resulta en:

$$\frac{\left(2 + \sqrt{a+b}\right)\left(\sqrt{a+b} - a\right)\left(\sqrt{a+b} - b\right)}{\left(2 - \sqrt{a+b}\right)\left(\sqrt{a+b} + a\right)\left(\sqrt{a+b} + b\right)} = 1$$

transponiendo y efectuando:

$$\frac{a + b - (a+b)\sqrt{a+b} + ab}{a + b + (a+b)\sqrt{a+b} + ab} = \frac{2 - \sqrt{a+b}}{2 + \sqrt{a+b}}$$

Aplicando la propiedad de proporciones que dice. Si:

$$\frac{m}{n} = \frac{q}{p} \Leftrightarrow \frac{m+n}{m-n} = \frac{q+p}{q-p}$$

se obtendrá:

$$\frac{2\left[(a+b) + ab\right]}{-2(a+b)\sqrt{a+b}} = \frac{4}{-2\sqrt{a+b}}$$

simplificando:

$$\frac{a + b + ab}{(a+b)} = 2$$

o:

$$\frac{a+b}{a+b} + \frac{ab}{a+b} = 2$$

de aquí: $\frac{ab}{a+b} = 1$

invirtiendo: $\frac{a+b}{ab} = 1$

descomponiendo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

Lo cual sustituimos en E:

$$E = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

Rpta.: $E = 1$

9.- Si se cumple que:

$$(x + y + 2z)^2 + (x + y - 2z)^2 = 8(x + y)z$$

hallar:

$$E = \left(\frac{x + y}{2z}\right)^9 + \left(\frac{x - z}{z - y}\right)^7 + \left(\frac{z - x}{z - y}\right)^8$$

Solución:

Haciendo en la condición:

$$x + y = a \quad ; \quad 2z = b$$

se tendrá:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 4(a)(b)$$

aplicando Legendre:

$$2(a^2 + b^2) = 4ab \quad ; \quad a^2 + b^2 = 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a - b)^2 = 0 \quad ; \quad a - b = 0$$

$$a = b$$

Reponiendo los valores de a y b:

$$x + y = 2z \qquad (\alpha)$$

$$x + y = z + z$$

$$x - z = z - y \qquad (\beta)$$

Reemplazando (α) y (β) en la expresión que se quiere calcular:

$$E = \left(\frac{2z}{2z}\right)^9 + \left(\frac{x - z}{x - z}\right)^7 + \left[\frac{z - x}{-(z - y)}\right]^8$$

simplificando:

$$E = (1)^9 + (1)^7 + (-1)^8 = 3$$

Rpta.: E = 3

prefing-umsa.blogspot.com

10.- Dadas las condiciones:

$$\sqrt[4]{\sqrt[n]{x} + 2ab} + \sqrt[4]{\sqrt[n]{x} - 2ab} = a \qquad (\alpha)$$

$$\sqrt{\sqrt[n]{x} + 2ab} + \sqrt{\sqrt[n]{x} - 2ab} = b \qquad (\beta)$$

Calcular:

$$R = \sqrt[4]{\sqrt[n]{x} + 2ab} - \sqrt[4]{\sqrt[n]{x} - 2ab} \qquad (\gamma)$$

Solución:

Multiplicando (α) y (γ):

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt[n]{x} + 2ab} + \sqrt[4]{\sqrt[n]{x} - 2ab}\right)$$

$$.\left(\sqrt[4]{\sqrt[n]{x} + 2ab} - \sqrt[4]{\sqrt[n]{x} - 2ab}\right) = R \, . \, a$$

Por productos notables: suma por diferencia, da diferencia de cuadrados:

$$\sqrt{\sqrt[n]{x} + 2ab} - \sqrt{\sqrt[n]{x} - 2ab} = Ra \qquad (\phi)$$

Multiplicando (β) y (ϕ):

$$\left(\sqrt{\sqrt[n]{x} + 2ab} + \sqrt{\sqrt[n]{x} - 2ab}\right)$$

$$.\left(\sqrt{\sqrt[n]{x} + 2ab} - \sqrt{\sqrt[n]{x} - 2ab}\right) = Rab$$

Por productos notables, da una diferencia de cuadrados:

$$\left(\sqrt[n]{x} + 2ab\right) - \left(\sqrt[n]{x} - 2ab\right) = Rab$$

$$\sqrt[n]{x} + 2ab - \sqrt[n]{x} + 2ab = Rab$$

$$4ab = Rab$$

$$R = \frac{4ab}{ab} = 4$$

Rpta.: R = 4

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de "n" si el grado del producto:

$$P(x) = (x^1 + 1)\ (x^4 + 4)\ (x^9 + 9)\ldots(x^{n^2} + n^2)$$

es 285.

a) 6 b) 10 c) 9
d) 8 e) 7

2. Hallar el grado del producto indicado:

$$P(x) = (x^{22} + 1)(x^{23} + 1)(x^{24} + 1)\ \ldots\ldots$$

hasta 20 términos.

a) 530 b) 630 c) 730
d) 210 e) 430

3. Hallar el grado de P(x), si los grados de los polinomios:

$$P^2(x)\ .\ Q(x) \qquad y\ \frac{P^3(x)}{Q\ (x)}$$

son 27 y 23 respectivamente.

a) 7 b) 12 c) 10
d) 9 e) 8

4. Simplificar la expresión:

$$\left[\frac{(x-1)^7(x^2+x+1)^7}{(x^3-1)^7}\right]^{14}\left[\frac{(x+1)^{12}\ (x^2-x+1)^{12}}{(x^3+1)^{12}}\right]^{16}$$

a) x b) 1 c) $(x + 1)^{30}$
d) $(x - 1)^{30}$ e) x^{30}

5. Simplificar:

$$\frac{(x-3)(x-1)(x+1)(x+4) - (x-2)(x+3)(x+5)}{(x-3)(x-5)(x+2)(x+4) - (x^2-x-13)^2 + 50}$$

$$\underline{(x - 4) - 12(x + 4)\ (x - 3)}$$

a) $x^2 + x + 5$ b) 40 c) 48
d) $x^2 - x + 6$ e) 42

6. Simplificar:

$$(x^2 + y^2)^4 + x^4y^4\ - (x^2 + xy + y^2)^2$$
$$(x^2 - xy + y^2\ )^2 - 2x^2y^2(x^2 + y^2)^2$$

a) x^8 b) y^8 c) x^4y^4
d) 0 e) x^8y^8

7. Efectuar:

$$(x - y)^2 - (y - z)^2 + (z - w)^2 - (w - x)^2$$
$$+\ 2(x - z)(y - w)$$

a) x^2 b) y^2 c) 2xy
d) w^2 e) 0

8. Efectuar:

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$$
$$-\ (x^3 - 8)^2 + 128$$

a) 0 b) $16x^3$ c) x^3
d) x^6 e) $16x^6$

9. Simplificar:

$$(x - y + z - w)\ .\ (x + y - z + w)\ +$$
$$= (y+w)\ (y+w-2z) + z^2$$

a) 0 b) y^2 c) x^2
d) z^2 e) xy

10. Al efectuar:

$$(a^2x^{-2} - a^3x^3 + a^4x^{-4})(ax^{-1} + a^2x^{-2})$$

se obtiene un producto de la forma

$$\left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha} + \left(\frac{b}{x}\right)^{\beta}$$

dar el valor de $(\alpha) + (\beta)$.

a) 4 b) 2 c) 6
d) 9 e) 5

11. Simplificar:

$$(a + b + c + d)^2 + (a - b - c + d)^2 + (a - b + c - d)^2 + (a + b - c - d)^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

a) a^2 b) c^2 c) b^2

d) 0 e) $a^2 + b^2$

12. Simplificar:

$$(a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

a) a^2 b) b^2 c) c^2

d) $a^2 + b^2 + c^2$ e) 0

13. Efectuar:

$$(a + b + c)^3 - (a - b + c)^3 - 6b\,[(a + c)^2 - b^2]$$

a) $8a^3$ b) $8b^3$ c) $8c^3$

d)0 e) 8abc

14. Efectuar:

$$(a - b)(x - a)(x - b) + (b - c)(x - b)(x - c) + (c - a)(x - c)(x - a) + (a - b)(b - c)(c - a)$$

a) a^3 b) b^3 c) c^3

d) 0 e) abc

15. Simplificar:

$$E = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) + 4a^2b^2+c^2}$$

a) a^2 b) b^2 c) $a^2 + b^2$

d) 0 e) $a^2 - b^2$

16. Efectuar:

$$E = 2a\,[(1 + a)^2 + (1 - a)^2 + (1 - a^2)] + 6(1 - a^2) + 2(1 - a)^3$$

a) 1 b) 0 c) a^3

d) $8a^3$ e) 8

17. Simplificar:

$$R = (x - y)^2 + (x - y + z)(x + y - z) + (y - z + x)(y + z - x) + (z - x + y)(z + x - y) + z(z - 2x)$$

a) 2yz b) 2xy c) 2xz

d) 0 e) yz

18. Efectuar:

$$y = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 2\,[a(b - a) + b(c - b) + c(a - c)]$$

a) a^2 b) b^2 c) c^2

d) 0 e) $a^2 + b^2 + c^2$

19. Simplificar:

$$P = \frac{(a + 1)(a - 1)(a^4 + a^2 + 1)(a^6 - a^3 + 1)(a^6 + a^3 + 1)}{a^9 + 1}$$

a) $a^9 - 1$ b) $a^{18} + 1$ c) $a^9 + 1$

d) I e) -1

20. Simplificar:

$$E = (a-b)(a+b-c) + (b-c)(b+c-a) + (c-a)(c+a-b)$$

a) 0 b) a^2 c) b^2

d) c^2 e) $a^2 + b^2$

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) C	3) C	4) B	5) C
6) D	7) E	8) B	9) C	10) D
11) D	12) E	13) B	14) D	15) C
16) E	17) A	18) D	19) A	20) A

DIVISIÓN ALGEBRAICA

DEFINICIÓN.-

División algebraica es la operación que consiste en obtener una expresión llamada cociente, conocidas otras dos, llamadas dividendo y divisor.

> NOTA IMPORTANTE
>
> En toda división, tramos la siguiente nomenclatura de grados:
>
> 1) $°|D|$ = grado del dividendo
>
> 2) $°|d|$ = grado del divisor
>
> 3) $°|q|$ = grado del cociente
>
> 4) $°|R|$ = grado del residuo o resto

PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN

1) En toda división, el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor:

$$\boxed{°|q| = °|D| - °|D|}$$

2) En toda división el grado del dividendo es mayor o igual que el grado del dividendo:

$$\boxed{°|D| \geq °|d|}$$

3) En toda división el grado del divisor es mayor que el grado del resto:

$$\boxed{°|d| > °|R|}$$

4) En toda división el grado máximo del resto es igual al grado del divisor menos 1:

$$\boxed{°|R\text{máximo}| = °|d| - 1}$$

5) En el caso de polinomios homogéneos, el grado del resto es mayor que el grado del divisor:

$$\boxed{°|R| > °|d|}$$

6) En el caso de polinomios homogéneos, no se cumple la propiedad 4.

CASOS DE LA DIVISIÓN

I.- Cuando se trata de dos monomios.

a) Se divide los signos mediante la regla de los signos.

b) Se divide los coeficientes.

c) Se divide las letras aplicando Teoría de exponentes.

Ejemplo:

Dividir:

$$E = \frac{-16x^4y^8z^5}{-4x^2y^5z^4}$$

Efectuando:

$$E = 4x^2y^3z$$

II.- Cuando se trata de dos polinomios.

Se puede utilizar cualquiera de los siguientes métodos:

a) Método normal

b) Método de coeficientes separados.

c) Método de Horner.

d) Método de Ruffini.

Método Normal. Para dividir mediante este método se debe seguir los siguientes pasos:

1) Se ordena los polinomios, generalmente en forma decreciente.

2) Se escribe en línea horizontal uno a continuación del otro, utilizando el signo de la división aritmética.

3) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente

4) Este término se multiplica por cada uno de los términos del divisor para restarlos a los correspondientes términos del dividendo. A este resto, se añade el siguiente término del dividendo.

5) Se divide el primer término del resto obtenido entre el primer término del divisor y se obtiene el segundo término del cociente.

6) Se procede desde el paso 4 sucesivamente hasta terminar la división.

Ejemplo:

Efectuar la siguiente división:

$$\frac{6x^5 + 5x^4y - 26x^3y^2 + 33x^2y^3 - 24xy^4 + 6y^5}{2x^2 - 3xy + y^2}$$

Procedimiento:

$$\begin{array}{l|l}
6x^5+5x^4y-26x^3y^2+33x^2y^3-24xy^4+6y^5 & 2x^2-3xy+y^2 \\ \cline{2-2}
\underline{-6x^5+9x^4y-3x^3y^2} & 3x^3+7x^2y-4xy^2+7y^3 \\
\quad +14x^4y-29x^3y^2+33x^2y^3 & \\
\quad \underline{-14x^4y+21x^3y^2-7x^2y^3} & \\
\qquad\quad -8x^3y^2+26x^2y^3-24xy^4 & \\
\qquad\quad \underline{+8x^3y^2-12x^2y^3+4xy^4} & \\
\qquad\qquad\quad +14x^2y^3-20xy^4+6y^5 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-14x^2y^3+21xy^4-7y^5} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad xy^4-y^5 &
\end{array}$$

El cociente es:

$$3x^3 + 7x^2y - 4xy^2 + 7y^3$$

El resto es :

$$xy^4 - y^5$$

Método de coeficientes separados. En este caso, además de las consideraciones anteriores se debe tener en cuenta:

1) Se trabaja solamente con los coeficientes y sus correspondientes signos del dividendo y divisor.

2) En caso de faltar un término con una potencia de la variable, se coloca en su lugar cero, tanto en el dividendo como en el divisor.

3) De esta manera, se obtiene los coeficientes con sus signos del polinomio cociente.

4) Para determinar el grado del cociente y resto se aplica las siguientes propiedades:

$$°|q| = °|D| - °|d|$$

$$°|R| = °|d| - 1$$

5) Este método es recomendable para polinomios de una sola variable.

Ejemplo:

Efectuar la división:

$$\frac{6x^5 - 20x^4 - 13x^3 + 25x^2 - 12x + 7}{3x^2 - x + 1}$$

$$\begin{array}{l|l}
6 - 20 - 13 + 25 - 12 + 7 & 3 - 1 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-6 + 2 - 2} & 2 - 6 - 7 + 8 \\
\quad - 18 - 15 + 25 & \\
\quad \underline{+ 18 - 6 + 6} & \\
\qquad - 21 + 31 - 12 & \\
\qquad \underline{+ 21 - 7 + 7} & \\
\qquad\qquad 24 - 5 + 7 & \\
\qquad\qquad \underline{- 24 + 8 - 8} & \\
\qquad\qquad\quad + 3 - 1 &
\end{array}$$

El cociente es de grado:

$$°|q| = °|D| - °|d| = 5 - 2 = 3$$

El cociente es:

$$q = 2x^3 - 6x^2 - 7x + 8$$

El resto es de grado:

$$°|R| = °|d| - 1 = 2 - 1 = 1$$

El resto es:

$$R = 3x - 1$$

Método de Horner. Este método es un caso particular del método de coeficientes separados y se emplea para la división de dos polinomios de cualquier grado.

Procedimiento:

1) Se escribe los coeficientes del dividendo en una fila con su propio signo.

2) Se escribe los coeficientes del divisor en una columna a la izquierda del primer término del dividendo; el primero de ellos, con su propio signo y los restantes, con signos cambiados.

3) El primer término del dividendo se divide entre el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente.

4) Se multiplica este término del cociente solamente por los términos del divisor, a los cuales se cambió de signo, colocándose los resultados a partir de la segunda fila, corriendo a un lugar hacia la derecha.

5) Se reduce la siguiente columna y se coloca el resultado en la parte superior para dividirlo entre el primer coeficiente del divisor y obtener el segundo término del cociente.

6) Se multiplica este cociente por los términos del divisor a los cuáles se cambió de signo, colocándose el resultado en la tercera fila y corriendo un lugar hacia la derecha.

7) Se continúa este procedimiento hasta obtener el término debajo del último término del dividendo, separando inmediatamente los términos del cociente y resto.

8) Para obtener los coeficientes del residuo se reduce directamente cada una de las columnas que pertenecen.

Ejercicio:

Efectuar la división de polinomios:

$$\frac{8x^5 + 14x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 3x + 2}{4x^2 + x + 3}$$

Solución:

Los grados del cociente y residuo serán

$$°|q| = °|D| - °|d| = 5 - 2 = 3$$

$$°|R| = °|d| - 1 = 2 - 1 = 1$$

Procedimiento:

		12	- 4	+ 8		
4	8	+ 14	+ 5	+ 16	+ 3	+ 2
-1		- 2	- 6			
-3			- 3	- 9		
				+ 1	+ 3	
					- 2	- 6
	2	+ 3	-1	+ 2	4	- 4

coeficientes del cociente — coeficientes del resto

Explicación:

1) Se divide 8 entre 4, igual a 2, este resultado es el primer coeficiente del cociente.

2) 2 se multiplica por los términos del divisor a los cuales se cambió de signo (-1, -3), dando como resultado(-2, -6) que se coloca en la segunda fila, corriendo un lugar hacia la derecha.

3) Se suma la segunda columna (correspondiente al dividendo) y el resultado se divide entre 4, igual a 3; este valor es el segundo coeficiente del cociente.

4) 3 se multiplica por (-1, -3) y de la tercera fila (-3, -9) corriendo, un lugar hacia la derecha.

5) Se suma la tercera columna, da -4, se divide entre 4, da -1, ese resultado es el tercer coeficiente del cociente.

6) -1 se multiplica por (-1, -3) y da la fila (+1, +3) corriendo un lugar hacia la derecha.

7) Se suma la cuarta columna, da +8, se divide ente 4, da 2, este resultado es el cuarto coeficiente del cociente.

8) 2 se multiplica por (-1, -3) y da la fila -2 y -6.

9) Como el último término de este producto queda debajo del último coeficiente del dividendo 2, se separa con una línea los términos obtenidos, los cuales pertenecen al cociente.

10) Se reduce las siguientes columnas, da (4 , -4) y se baja directamente, son los coeficientes del resto.

Escribiendo su parte literal:

$$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$$

$$R(x) = 4x - 4$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el valor de "m" para que la división sea exacta, en:

$$\frac{x^4 - ma^2x^2 + a^4}{x^2 - ax + a^2}$$

Solución:

Dividiendo por el método normal. Si la división es exacta, el residuo debe ser un polinomio idénticamente nulo.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +\ 0 & -\ mx^2a^2 & +\ 0 & +\ a^4 & x^2 - ax + a^2 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +\ x^3a & -\ x^2a^2 & & & x^2 + xa - ma^2 \\
\cline{1-3}
 & x^3a & -\ (m+1)x^2a^2 & & & \\
 & -x^3a & +\ x^2a^2 & -\ xa^3 & & \\
\cline{2-4}
 & & -\ mx^2a^2 & -\ xa^3 & +\ a^4 & \\
 & & mx^2a^2 & -\ mxa^3 & +\ ma^4 & \\
\cline{3-5}
 & & & -\ (1+m)xa^3 & +\ (1+m)a^4 &
\end{array}
$$

Si la división es exacta:

$$-(1 + m)xa^3 + (1 + m)a^4 \equiv 0$$

Factorizando:

$$(1 + m)\ (-xa^3 + a^4) \equiv 0$$

Igualando a cero los factores:

$$1 + m = 0 \quad ; \quad m = -1$$

Rpta.: $m = -1$

2.- Hallar m + n + p si la división que sigue no deja resto:

$$\frac{12x^5 - 9x^4 + 14x^3 - mx^2 + nx - p}{3x^3 + 2x - 6}$$

Solución:

Utilizando el método de coeficientes separados, el resto debe ser un polinomio idénticamente nulo.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
12 & -\ 9 & +\ 14 & -\ m & +\ n & -\ p & 3 + 0 + 2 - 6 \\
\cline{7-7}
-12 & -\ 0 & -\ 8 & +\ 24 & & & 4 - 3 + 2 \\
\cline{1-4}
 & -\ 9 & +\ 6 & +\ 24 - m & +\ n & & \\
 & +\ 9 & +\ 0 & +\ 6 & -\ 18 & & \\
\cline{2-5}
 & & +\ 6 & +\ 30 - m & +\ n - 18 & -\ p & \\
 & & -\ 6 & -\ 0 & -\ 4 & +\ 12 & \\
\cline{3-6}
 & & & 30 - m & +\ n - 22 & -\ p + 12 &
\end{array}
$$

Como la división no deja resto:

$$30 - m + n - 22 - p + 12 = 0$$

$$m + n + p = 20$$

3.- Calcular p y q, si la división es exacta:

$$\frac{x^4 + px^2 + q}{x^2 - 6x + 5}$$

Solución:

Para que una división sea exacta, el resto debe ser un polinomio idénticamente nulo. Dividiendo por el método de Horner:

		6	+p+31		
1	1	0	+p	0	+q
+6		+6	-5		
-5			+36	-30	
				6p+186	-5p-155
	1	+6	p+31	6p+156	-5p+q-155

Luego, el cociente es (grado2):

$$Q(x) = x^2 + 6x + (p + 31)$$

el resto es:

$$(6p + 156)x + (-5p + q - 155)$$

Por condición:

$$R(x) \equiv 0x + 0$$

$$\therefore \quad (6p + 156)x + (-5p + q - 155) \equiv 0x + 0$$

identificando coeficientes:

$$6p + 156 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -26$$

$$-5p + q - 155 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 25$$

Rpta.: $p = -26, \quad q = 25$

4.- Determinar m y n si la división:

$$\frac{x^4 - 3x^3a + x^2a^2 + mxa^3 + na^4}{x^2 - ax + a^2}$$

deja como resto:

$$7xa^3 + 3a^4$$

Solución:

Aplicando la división normal se tendrá:

$$
\begin{array}{lllll|l}
x^4 - 3x^3a & + x^2a^2 & + mxa^3 & + & na^4 & x^2 - ax + a^2 \\
\cline{6-6}
-x^4 + x^3a & - x^2a^2 & & & & x^2 - 2xa - 2a^2 \\
\cline{1-2}
 - 2x^3a & - 0x^2a^2 & + mxa^3 & & & \\
 + 2x^3a & - 2x^2a^2 & + 2xa^3 & & & \\
\cline{1-3}
 & - 2x^2a^2 & + (m+2)xa^3 & + & na^4 & \\
 & + 2x^2a^2 & + 2a^3x & + & 2a^4 & \\
\cline{2-5}
 & & (m+4)xa^3 & + & (n+2)a^4 &
\end{array}
$$

El resto es:

$$(m + 4)xa^3 + (n + 2)a^4$$

Por dato, el resto es:

$$7xa^3 + 8a^4$$

$$\therefore\ (m + 4)xa^3 + (n + 2)a^4 \equiv 7xa^3 + 8a^4$$

identificando coeficientes:

$$(m + 4)a^3 = 7a^3 \quad \Rightarrow \quad m = 3$$

$$(n + 2)a^4 = 8a^4 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

Rpta.: $m = 3$, $n = 6$

5.- Calcular m y n si el resto de división es: $2x - 3$

$$\frac{12x^4 - 23x^3 + 8mx^2 - 35x + n}{4x^2 - 5x + m}$$

Solución:

Dividiendo por el método de Horner:

		-8	5m-10		
4	12	-23	+8m	-35	+n
+5		15	-3m		
-m					
			-10	+2m	
				$\frac{25m-50}{4}$	$\frac{-5m^2+10m}{4}$
	3	-2	$\frac{5m-10}{4}$	$\frac{33m-190}{4}$	$n + \frac{-5m^2+10m}{4}$

El resto es:

$$R(x) = \left(\frac{33m - 190}{4}\right)x + \left(n + \frac{-5m^2 + 10m}{4}\right)$$

Por condición:

$$R(x) = 2x - 3$$

Luego:

$$\left(\frac{33m - 190}{4}\right)x + \left(n + \frac{-5m^2 + 10m}{4}\right) \equiv 2x - 3$$

Identificando coeficientes:

$$\frac{33m - 190}{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad m = 6$$

$$n + \frac{10m - 5m^2}{4} = -3 \quad \Rightarrow \quad n = 27$$

Rpta.: $m = 6$

$n = 27$

6.- Si la división:

$$\frac{20x^4 + 6ax^3 - 3bx^2 - 17cx + 9d}{5x^2 - 7x + 2}$$

da un cociente cuyos coeficientes van aumentando de 4 en 4, y deja un resto igual a $34x + 3$. Hallar el valor de:

$$E = (a + b) - (c + d)$$

Solución:

Dividiendo por el método de Horner:

5	20	+6a	-3b	-17c	+9d
		+28	-8		
+7			56	-16	
-2					
				84	-24
	4	8	12	-17c+68	9d-24

Explicación:

El cociente es:

$$4x^2 + 8x + 12$$

Para el cociente:

1) El segundo coeficiente es 8 ya que aumenta de 4 en 4, luego:

$$\frac{6a + 28}{4} = 8 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

2) El tercer coeficiente es 12, luego:

$$\frac{-3b - 8 + 56}{4} = 12 \quad \Rightarrow \quad b = -4$$

El resto es:

$$(-17c + 68)x + (9d - 24) \equiv 34x + 3$$

identificando coeficientes:

$$-17c + 68 = 34 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$$9d - 24 = 3 \quad \Rightarrow \quad d = 3$$

Por lo tanto: $E = (2 - 4) - (2 + 3) = -7$

Rpta.: $E = -7$

7.- Calcular el valor de:

$E = \dfrac{a + b}{c + 1}$,si la división $\dfrac{x^a - bx + c}{x^2 - 2x + 1}$ es exacta.

Solución:

Dividiendo por el método de Horner:

(a + 1) terminos

1	1	0	0	0	....	0	-b	+c
		2	-1					
+2								
			4	-2				
-1								
						2n-2	-n+1	
							2n	-n
	1	+2	+3		...(n-1)	n	-b+n+1	c-n

El cociente es:

$$Q(x) = x^{a-2} + 2x^{a-3} + 3x^{a-4} + \dots + n$$

El resto es:

$$R(x) = (-b + n + 1)x + (c - n)$$

El coeficiente "n" del cociente corresponde al termino (a - 1) en el dividendo; se tendrá:

1) $n = a - 1 \Rightarrow a = n + 1$

2) Si la división es exacta:

$$R(x) \equiv 0x + 0$$

Luego:

$$(-b + n + 1)x + (c-n) \equiv 0x + 0$$

Identificando coeficientes:

$$-b + n + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = n + 1$$

$$c - n = 0 \quad \Rightarrow \quad c = n$$

En la expresión pedida, reempalzamos los valores de a, b y c:

$$E = \frac{n + 1n + 1}{n + 1} = 2$$

Rpta.: 2

8.- Calcular: $E = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - 3b^2}$,

Si la división: $\dfrac{x^4 + (a - b)x^3 + (a - b)x + b^2}{x^2 - (a - b)x + b^2}$ es exacta

Solución:

Dividiendo por el método de Horner:

1	1	(a-b)	0	(a-b)	b^2
a-b		a-b	$-b^2$		
$-b^2$			$2(a-b)^2$	$-2b^2(a-b)$	
				$(a-b)\{2(a-b)^2-b^2\}$	
					$-b^2\{2(a-b)^2 -b^2\}$
	1	2(a-b)	$[2(a-b)^2-b^2]$		
				$(a-b)(2a^2-4ab-b^2+1)$	
					$+b^2[1-\{2(a-b)^2-b^2\}]$

El cociente es:

$$x^2 + 2(a - b)x + \{2(a - b)^2 - b^2\}$$

El resto es:

$$R(x) = (a - b)\ (2a^2 - 4ab - b^2 + 1)x$$
$$+ b^2[1- \{2(a - b)^2 - b^2\}]$$

Por condición:

$$R(x) \equiv 0x + 0$$

Luego:

$$(a - b)\ (4a^2 + 8ab)x + b^2[1- \{2(a - b)^2\}] \equiv 0x + 0$$

Identificando coeficientes:

$$(a - b)\ (4a^2 - 8ab) = 0 \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

En la expresión; para $a = b$:

$$E = \frac{a^2 + a^2 + a^2}{a^2 - 3a^2} = \frac{3a^2}{-2a^2} = -\frac{3}{2}$$

En la expresión; para $a = 2b$:

$$E = \frac{4b^2 + 2b^2 + b^2}{4b^2 - 3b^2} = 7$$

Rpta.: $E = -3/2$ y $E = 7$

9.- Hallar A + B + C, si la división:

$$\frac{Ax^4 + (A + B)x^3 + (A + B + C)x^2 + (B + C)x - A - B}{Ax^2 + Bx + C}$$

no deja resto.

Solución:

Dividiendo por el método de Horner:

		A	A		
A	A	(A+B)	(A+B+C)	(B+C)	-(A+B)
		-B	-C		
-B					
			-B	-C	
-C					
				-B	-C
	1	1	1	0	-(A+B+C)

El coeciente es:

$$x^2 + x + 1$$

El resto es $-(A + B + C)$

Condición: $R = 0$

Luego: $-(A + B + C) = 0$

$$A + B + C = 0$$

Rpta.: $A + B + C = 0$

10.- Calcular "a" y "b" si la división:

$$\frac{x^7 + ax + b}{x^2 + 2x + 1} \text{ es exacta.}$$

Solución:

Dividiendo por el método de Horner:

		-2	+3	-4	+5	-6		
1	1	0	0	0	0	0	a	+b
		-2	-1					
-2								
			+4	+2				
-1								
				-6	-3			
					+8	+4		
						-10	-5	
							+12	+6
	1	-2	+3	-4	+5	-6	a+7	b+6

El cociente es:

$$q(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

El resto es:

$$R(x) = (a + 7)x + (b + 6)$$

Como la división es exacta:

$$R(x) \equiv 0$$

Es decir:

$$(a + 7)x + (b + 6) \equiv 0x + 0$$

Identificando coeficientes:

$$a + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -7$$

$$b + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -6$$

11.- Calcular la relación entre p y q si la división de:

$x^4 + (p + 2m)x + q - 1$ entre $x^2 + mx - 1$ es exacta.

Solución:

Dividiendo por el método de Horner:

		$-m$	m^2+1		
1	1	0	0	$p+2m$	$q-1$
		$-m$	$+1$		
$-m$					
			$+m^2$	$-m$	
$+1$					
				$-m^3-m$	m^2+1
	1	$-m$	m^2+1	$p-m^3$	m^2+q

El cociente es:

$$q(x) = x^2 - mx + (m^2 + 1)$$

El resto es:

$$R(x) = (p - m^3)x + (m^2 + q)$$

Como la división es exacta:

$$R(x) \equiv 0$$

por lo tanto:

$$(p - m^3)x + (m^2 + q) \equiv 0x + 0$$

identificando coeficientes:

$$p - m^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = m^3 \qquad (I)$$

$$m^2 + q = 0 \quad \Rightarrow \quad -q = m^2 \qquad (II)$$

Elevando (I) al cuadrado y (II) al cubo se obtiene:

$$p^2 = m^6 \quad , \quad -q^3 = m^6,$$

y de estas dos últimas relaciones se obtiene finalmente que:

$$p^2 = -q^3$$

12.- Hallar el valor de "n" si el grado de P(x) y Q(x) es igual a 3 y 4 respectivamente y se conoce que el grado de la expresión:

$$\frac{\{P^7(x) + Q^5(x)\}^{2n}}{\{P^5(x) + Q^4(x)\}^{n+3}}$$

es igual a 4.

Solución:

Determinemos el grado de cada expresión:

$$°|P^7(x)| = 7 \,.\, 3 = 21$$

$$°|Q^5(x)| = 5 \,.\, 4 = 20$$

$$°|P^5(x)| = 5 \,.\, 3 = 15$$

$$°|Q^4(x)| = 4 \,.\, 4 = 16$$

$$°|P^7(x) + Q^5(x)| = 21$$

$$°|P^5(x) + Q^4(x)| = 16$$

$$°|P^7(x) + Q^5(x)|^{2n} = 21 \,.\, (2n) = 42n$$

$$°|Q^5(x) + Q^4(x)|^{n+3} = 16(n + 3)$$

El grado de la expresión es:

$$°\left|\frac{\{P^7(x) + Q^5(x)\}^{2n}}{\{P^5(x) + Q^4(x)\}^{n+3}}\right| = 42n - 16(n + 3)$$

Por condición:

$$42n - 16(n + 3) = 4$$

$$n = 2$$

Rpta.: n = 2

13.- Si la división:

$$\frac{x^4 - ax^2 + bx - c}{x^3 - 3dx^2 + 3d^2x - d^3}$$ es exacta. Calcular:

$$E = \frac{a^3}{b^2}$$

Solución:

Dividiendo por el método de Horner:

		$+3d$			
1	1	0	$-a$	$+b$	$-c$
$+3d$		$+3d$	$-3d^2$	$+d^3$	
$-3d^2$			$9d^2$	$-9d^3$	$+3d^4$
$+d^3$					
	1	$3d$	$-a+6d^2$	$b-8d^3$	$-c+3d^4$

El cociente es:

$$x + 3d$$

Por condición del problema el $R \equiv 0$

Luego:

$$(-a + 6d^2)x^2 + (b - 8d^3)x + (-c + 3d^4) \equiv 0x^2 + 0x + 0$$

identificando los coeficientes:

$$-a + 6d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 6d^2$$

$$b - 8d^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 8d^3$$

$$-c + 3d^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 3d^4$$

Sustituyendo estos valores en la condición:

$$E = \frac{a^3}{b^2} = \frac{(6d^2)^3}{(8d^3)^2} = \frac{216d^6}{64d^6} = 3{,}375$$

Rpta.: $E = 3{,}375$

14.- Hallar la condición para que la división:

$$\frac{x^3 + mx^2 + nx + a \cdot b}{x^2 + ax + b}$$

sea exacta.

Solución:

Dividiendo por el método de Horner:

		$+m-a$		
1	1	m	n	$+ab$
$-a$		$-a$	$-b$	
$-b$			$-a(m-a)$	$-b(m-a)$
	1	$m-a$	$n-b-a(m-a)$	$ab-b(m-a)$

El cociente es:

$$x + (m - a)$$

Por condición: $R \equiv 0$

luego:

$$[n - b - a(m - a)]x + [ab - b(m - a)] \equiv 0x + 0$$

identificando coeficientes:

$$(n - b) - a(m - a) = 0 \qquad (\alpha)$$

$$ab - b(m - a) = 0 \qquad (\beta)$$

reduciendo(β): $ab - bm + ab = 0$

de donde:

$$2a = m$$

o :

$$a = m/2$$

Sustituyendo el valor de m en (α):

$$n - b - a(2a - a) = 0$$

de donde: $n - b = a^2$

Sustituyendo el valor de $a = m/2$

$$n - b = \frac{m^2}{4} \quad ; \quad 4(n - b) = m^2$$

Rpta.: La condición es que $(n - b) = \dfrac{m^2}{4} = a^2$

15.- Calcular m, n y p si el resto es $5x^2 + 7x + 8$, dada la siguiente división:

$$\frac{8x^5 + 4x^3 + mx^2 + nx + p}{2x^3 + x^2 + 3}$$

Solución:

Dividiendo por Horner:

		-4	+6			
2	8	0	+4	+m	+n	+p
		-4	0	-12		
-1						
			+2	0	+6	
0						
-3				-3	0	-9
	4	-2	3	m-15	n+6	p-9

El cociente es:

$$4x^2 - 2x + 3$$

El resto es:

$$(m - 15)x^2 + (n + 6)x + (p - 9)$$

Por condición el resto es:

$$5x^2 + 7x + 8$$

Por lo tanto:

$$(m - 15)x^2 + (n + 6)x + (p - 9) \equiv 5x^2 + 7x + 8$$

identificando coeficientes:

$$m - 15 = 5 \quad \Rightarrow \quad m = 20$$

$$n + 6 = 7 \quad \Rightarrow \quad n = 1$$

$$p - 9 = 8 \quad \Rightarrow \quad p = 17$$

Rpta.: $m = 20$, $n = 1$, $p = 17$

REGLA DE RUFFINI

Se utiliza para dividir polinomios cuando el divisor es un binomio de primer grado. Se estudia 3 casos:

a) Cuando el coeficiente del primer término del divisor es igual a 1.

Su forma general es : $x \pm b$

Se opera así:

- Se escribe los coeficientes del dividendo en línea horizontal.
- Se escribe el término independiente del divisor, con signo cambiado, un lugar a la izquierda y abajo del coeficiente del primer término del dividendo.
- Se divide como en el caso de Horner, teniendo presente que el primer coeficiente del cociente, es igual al primer coeficiente del dividendo
- Para obtener el cociente, se separa la última columna que viene a ser el resto.

Ejemplo:

Obtener el cociente y el resto en la división:

$$\frac{4x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8}{x + 1}$$

Procedimiento:

	4	-5	+6	+7	+8	
-1		-4	+9	-15	+8	
	4	-9	+15	-8	16	← resto

coeficientes del cociente

Grado del cociente:

$$°|q| = °|D| - °|d| = 4 - 1 = 3$$

cociente:

$$q = 4x^3 - 9x^2 + 15x - 8$$

resto: $R = 16$

b) Cuando el coeficiente del primer término del divisor es diferente de cero.

Su forma general es: $ax \pm b$

Se procede así:

- Se transforma el divisor, extrayendo como factor común, el primer término del divisor; es decir:

$$(ax \pm b) = a\left(x \pm \frac{b}{a}\right)$$

- Se divide entre $\left(x \pm \frac{b}{a}\right)$, como en el primer caso.

- Los coeficientes del cociente obtenido se dividen entre el primer coeficiente del divisor.

- El resto obtenido no sufre alteración.

Ejemplo:

Hallar cociente y resto en:

$$\frac{18x^5 - 29x^3 - 5x^2 - 12x - 16}{3x + 2}$$

i) Se factoriza 3 así: $3\left(x + \frac{2}{3}\right)$

ii) Se divide entre $x + \frac{2}{3}$

iii) Previamente, se completa el dividendo con cero,que es el coeficiente de x^4.

	18	0	-29	-5	-12	-16
$-\frac{2}{3}$		-12	+8	+14	-6	+12
	18	-12	-21	+9	-18	$\boxed{-4}$ ← resto

$\underbrace{18 \quad -12 \quad -21 \quad +9 \quad -18}_{\text{coeficientes del cociente}}$

El grado del cociente obtenido es:

$$5 - 1 = 4$$

Cociente primario = $18x^4 - 12x^3 - 21x^2 + 9x - 18$

Dividiendo todo el cociente primario entre 3, porque es el primer coeficiente del divisor, se tiene:

El cociente verdadero:

$$q = 6x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 6$$

El resto: $R = -4$

c) Cuando el divisor es de la forma: $ax^n + b$.

En este caso para que la división se pueda efectuar, los exponentes de la variable del dividendo deben ser múltiplos del exponente de la variable del divisor.

Ejemplo:

Hallar el cociente y el resto en:

$$\frac{6x^{36} + 17x^{27} - 16x^{18} + 17x^9 + 12}{3x^9 + 1}$$

Procedimiento

Observemos que los exponentes de la variable del dividendo son múltiplos del exponente 9 del divisor, luego se puede aplicar el método.

Haciendo $x^9 = y$, la división es:

$$\frac{6y^4 + 17y^3 - 16y^2 + 17y + 12}{3y + 1}$$

Aplicando el segundo caso:

	6	+17	-16	+17	+12
$-\frac{1}{3}$		-2	-5	+7	-8
	6	-15	-21	+24	$\boxed{+4}$

Cociente primario:

$$6y^3 + 15y^2 - 21y + 24$$

Dividiendo entre 3 da el verdadero cociente:

$$2y^3 + 5y^2 - 7y + 8$$

reemplazando $y = x^9$, el cociente es:

$$q = 2x^{27} + 5x^{18} - 7x^9 + 8$$

el resto es:

$$R = +4$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el resto y el cociente en:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + (2 - a^2 - 2a)x - 2a - 2}{x - a - 2}$$

Solución:

Dividiendo por Ruffini:

	1	-2	$+2-a^2-2a$	$-2a-2$
a+2		a+2	a^2+2a	2a+4
	1	a	2	+2

Rpta.: Cociente: $q = x^2 + ax + 2$

Resto: R = 2

2.- Hallar el resto de la siguiente división:

$$\frac{x^5 + \left(3\sqrt{2} - 2\right)x^3 + 2\sqrt{2} + 7}{x - \sqrt{2} + 1}$$

Solución:

Aplicando Ruffini:

	1	0	$3\sqrt{2}-2$	0	0	$+2\sqrt{2}+7$
$\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}-1$	$3-2\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}-1$	$3-2\sqrt{2}$
	1	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	1	$\sqrt{2}-1$	+10

Rpta.:

Cociente:

$$q = x^4 + \left(\sqrt{2} - 1\right)x^3 + \left(\sqrt{2} + 1\right)x^2 + x + \sqrt{2} - 1$$

Resto: R = 10

3.- Calcular "m" si la división es exacta:

$$\frac{6x^3 - 3x^2 - mx - 6}{2x - 3}$$

Solución:

Dividiendo por Ruffini:

	6	-3	-m		-6
$\frac{3}{2}$		+9	+9		$\frac{3}{2}(9-m)$
	6	+6	9-m		$\frac{3}{2}(9-m)$ -6

Cociente primario:

$$6x^2 + 6x + 9 - m$$

Dividiendo entre 2 da el cociente real:

$$3x^2 + 3x + \frac{9 - m}{2}$$

Según el problema, el resto debe ser cero, es decir:

$$\frac{3}{2}(9 - m) - 6 = 0$$

$$m = 5$$

Rpta.: m = 5

4.- Sea el polinomio:

$$abcx^3 - (a^2c + b^2a + c^2b)x^2 + (a^2b + b^2c + c^2a)x - abc$$

se anula para $x = \frac{a}{b}$ y para $x = \frac{b}{c}$

Hállese otro valor que también lo reduzca a cero.

Solución:

	abc	$-a^2c-b^2a-c^2b$	$a^2b+b^2c+c^2a$	-abc
$\frac{a}{b}$	↓	a^2c	$-a^2b-ac^2$	abc
	abc	$-b^2a-c^2b$	b^2c	0
$\frac{b}{c}$	↓	ab^2	$-b^2c$	
	abc	$-c^2b$	0	
$\frac{c}{a}$	↓	c^2b		
	abc	0		

El otro valor es: $\frac{c}{a}$

porque al dividir entre el valor $\frac{c}{a}$ dado para x se anula.

Rpta.: $\frac{c}{a}$

5 .- Hallar el residuo de la división de:

$$6x^3 - 5x^2 + ax - 1 \quad \text{entre } 2x + 1$$

sabiendo que su cociente toma el valor numérico de 2 para x = 1.

Solución:

Dividiendo por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 6 & -5 & +a & -1 \\
 & \downarrow & & & \\
-\frac{1}{2} & & -3 & +4 & -\frac{1}{2}(a+4) \\
\hline
 & 6 & -8 & a+4 & \boxed{-\frac{1}{2}(a+4) - 1}
\end{array}$$

El cociente primario:

$$6x^2 - 8x + a + 4$$

dividiendo entre 2 ,el cociente es:

$$3x^2 - 4x + \left(\frac{a+4}{2}\right)$$

El valor numérico para x = 1 será:

$$3(1)^2 - 4(1) + \frac{a+4}{2} = 2$$

$$3 - 4 + \frac{a+4}{2} = 2$$

eliminado denominadores:

$$6 - 8 + a + 4 = 4$$

$$\therefore \qquad a = 2$$

Si el resto es:

$$R = -\frac{1}{2}(a+4) - 1$$

sustituyendo. a = 2:

$$R = -\frac{1}{2}(2+4) - 1$$

$$R = -4$$

Rpta.: El residuo es -4

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular A + B si la división:

$$\frac{2x^4 + 3x^2 + Ax + B}{2x^2 + 2x + 3}$$

es exacta

a) 2 b) 4 c) 5

d) 12 e) 0

2. Calcular m + n + p si la división deja como resto: $2x^2 + x - 5$

$$\frac{3x^5 - 2x^4 - 3x^3 + mx^2 + nx + p}{3x^3 - 2x^2 + 1}$$

a) 3 b) 2 c) -1

d) 0 e) 10

3. En la división:

$$\frac{3x^4 + 2x^3 + Ax^2 + 7x - 12}{x^3 + x^2 - 3}$$

el cociente es: 3x + B; el resto: $-4x^2 + Cx - 15$

Hallar ABC.

a) 80 b) 16 c) 50

d) 210 e) 49

4. El residuo en la división es -16:

$$\frac{6x^4 - x^3y - 6x^2y^2 + 5xy^3 - 3y^4}{2x^2 + xy - 2y^2}$$

Hallar el valor de "y"

a) 1 b) 3 c) 2

d) -1 e) 4

5. Cuando el polinomio:

$$8x^4 - Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

se divide entre: $2x^2 - x + 1$; se obtiene un cociente cuyos coeficientes van disminuyendo de 1 en 1 a partir del primer término y un residuo igual a $5x + 1$. Hallar: A + B + C + D

a) 24 b) 21 c) 15

d) 12 e) 16

6. Calcular: $\dfrac{6a + 6b + 2c}{b}$

si el polinomio: $x^3 - 7a^2 + 6b^3$
entre: $x^2 - (a + c)x + ac$, deja como resto cero

a) 2 b) 8 c) 4

d) -6 e) 5

7. En la siguiente división exacta:

$$\frac{x^3 + (2a + m)x^2 + (a^2 + b + n)x + ab}{x^2 + ax + b}$$

dar el valor de:

$$E = \frac{n^2 + a^2m^2}{2a^2m^2 + m^2b^2}$$

a) 1 b) 5 c) 4

d) 2 e) 7

8. Si a y b son mayores que cero. Calcular:
E = a +m, sabiendo que el resto de la división:

$$\frac{3x^4 - 4x^3 + ax^2 + 5x - 2}{x^2 - x + m}$$

es R = 8x - 2

a) 13 b) 3 c) 5

d) 10 e) 16

9. Si el polinomio: $x^3 + 2mx^2 + 5ax + b$, es divisible entre: $x^2 - 3mx + 2a$. Encontrar el valor de (a/b).

a) $\dfrac{1}{5m}$ b) $\dfrac{2}{5m}$ c) 5m

d) $\dfrac{5m}{2}$ e) $\dfrac{5}{m}$

10. Indicar el resto que resulta al dividir:

$8x^3 + 4x^2 - 6mx + 15$ entre $(2x - 1)$, sabiendo que la suma de los coeficientes del cociente es 28.

a) -1 b) 1 c) -35

d) 35 e) 36

11. Hallar la relación existente entre "m", "n", "p" si la siguiente división es exacta:

$$\frac{(3x^3 - mx^2 + nx + p)}{(x^2 - a)}$$

a) m + n = p b) 2m - n = 3p

c) mn = -3p d) m-n = 2p

e) Ninguna

12. Hallar n - m si la división es exacta:

$$\frac{2mx^3 - mx^2 + 3nx - 6}{2x^2 - 3x + 1}$$

a) 4 b) -4 c) 2

d) 3 e) 10

13. Evaluar:

$$P(x) = x^8 - 2x^4 - 16x^2 + 4\sqrt{3}$$

para $x = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$

a) -4 b) 3 c) 11

d) 15 e) 4

14. Al efectuar la división:

$$\frac{nx^4 + (n - n^2 + 1)x^3 + x^2 - n^2x + n^2 - 7}{x - n + 1}$$

se observa que la suma algebraica de los coeficientes del cociente es cero. El valor de este último:

a) 4 b) 12 c) -4

d) 1 e) -3

15. El siguiente esquema representa la división por el método Horner:

1	3	a	1	b	c
m		g	d		
2			e	f	
				g	h
	n	-2	p	4	-3

determinar (m + p)

a) -4 b) 4 c) 12

d) 0 e) 3

16. Hallar el valor de E = n - m, si la división:

$$\frac{12x^4 + 29x^3 - 5mx^2 - 49x + n}{4x^2 + 7x - m}$$

es exacta.

a) 5 b) 32 c) -27

d) 37 e) 27

17. Hallar el resto de la división:

$$\frac{x^4 - (a+2)x^3 + ax^2 + x + a^2 + a}{x - a - 1}$$

a) 1 b) 0 c) -1

d) 4 e) Ninguna

18. En el polinomio:

$$P(x) = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x^5 - 2\sqrt{2}\,x^3 - 2\sqrt{3}\,x + 12 + 2\sqrt{6}$$

Calcular $P\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$

a) -6 b) -2 c) 6

d) 2 e) 3

19. En la siguiente división: calcular m + n + p

$$\frac{8x^5 - 4x^3 + mx^2 + nx + p}{2x^3 + x^2 + 3}$$

si el resto es igual a: $5x^2 - 3x + 7$

a) 27 b) 40 c) 35

d) 85 e) Ninguna

20. Determinar $a^2 + b^2$ para que la división:

$$\frac{6x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 10x + a}{3x^2 + 2x + b}$$

sea exacta

a) 625 b) 25 c) 650

d) 620 e) 600

CLAVE DE RESPUESTAS

1) A	2) B	3) A	4) C	5) E
6) B	7) A	8) A	9) A	10) D
11) C	12) E	13) E	14) C	15) B
16) E	17) B	18) C	19) A	20) C

TEOREMA DEL RESTO O DE DESCARTES

Este teorema tiene por objetivo determinar el resto en una división, sin efectuar la división.

ENUNCIADO.- El resto de dividir un polinomio racional y entero en "x" entre un binomio de la forma "ax ± b" es igual al valor numérico que adquiere dicho polinomio cuando se reemplaza en él, x por b/a.

DEMOSTRACIÓN

En forma general, definamos:

Dividendo : P(x), racional y entero

Divisor : $ax \pm b$

Cociente : $q(x)$

Resto : $R = P\left(\mp \frac{a}{b}\right)$

Toda división es de la forma:

$$D = dq + R$$

D = dividendo

d = divisor

q = cociente

R = resto

Reemplazando por sus equivalentes:

$$P(x) \equiv (ax \pm b)\, q(x) + R \qquad (1)$$

Si definimos x como: $x = \mp \frac{b}{a}$

y reemplazamos en (1):

$$P\left(\mp\frac{b}{a}\right) = \left[a\left(\mp\frac{b}{a}\right) \mp b\right] q\left(\mp\frac{b}{a}\right) + R$$

$$P\left(\mp\frac{b}{a}\right) = \left(\mp b \pm b\right) \,.\, q\left(\mp\frac{b}{a}\right) + R$$

El primer factor del segundo es cero, luego:

$$P\left(\mp\frac{b}{a}\right) = R$$

o finalmente:

$$R = P\left(\mp\frac{b}{a}\right)$$

REGLA PRÁCTICA PARA HALLAR EL RESTO

1º Se iguala el divisor a cero:

$$ax \pm b = 0$$

2º Se despeja "x":

$$x = \mp\frac{b}{a}$$

3º Se reemplaza en el polinomio dividendo "x" por.

$$x = \mp\frac{b}{a}$$

$$\therefore \qquad R = P\left(\mp\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo:

Hallar el resto de las siguientes divisiones:

i) $$\frac{(x-3)^{64} + (x-3)^{40} + (x-1)^{16} - 16^4}{x-3}$$

Solución:

- $x - 3 = 0$
- $x = 3$

Sustituyendo

- $R = P(3) = (3-3)^{64} + (3-3)^{40} + (3-1)^{16} - 16^4$

$$R = 0 + 0 + 2^{16} - 16^4$$

$$R = 2^{16} - (2^4)^4 = 2^{16} - 2^{16} = 0$$

$$\therefore \qquad R = 0$$

ii) $$\frac{6x^4 + x^3 - 19x^2 + 14x - 15}{2x - 3}$$

1º $2x - 3 = 0$

2º $x = \frac{3}{2}$

Sustituyendo

3º $R = P\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^4 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 19\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$+ 14\left(\frac{3}{2}\right) - 15$$

$$R = \frac{243}{8} + \frac{27}{8} - \frac{171}{4} + 21 - 15$$

simplificando: $R = -3$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el resto de la división:

$$\frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + (n-2)x^{n-2} - 3n + 16}{x - 1}$$

Solución:

De acuerdo con la regla práctica:

- $x - 1 = 0$
- $x = 1$

Sustituyendo:

- $R = n(1)^n + (n - 1)(1)^{n-1} + (n - 2)(1)^{n-2} - 3n + 16$

$R = n + n - 1 + n - 2 - 3n + 16$

simplificando: $R = 13$

2.- Hallar el resto de la división:

$$\frac{(x + a)^7 - (x^7 + a^7)}{x + 2a}$$

Solución:

Utilizando la regla práctica:

- $x + 2a = 0$
- $x = -2a$

Sustituyendo

- $R = (-2a + a)^7 - [(-2a)^7 + a^7]$

  $R = (-a)^7 - (-128a^7 + a^7) = (-a)^7 - (-127a^7)$

  $R = -a^7 + 127a^7$

  $R = 126a^7$

3.- Hallar el resto en:

$$\frac{(x + y)^2 + (x + y)(2z - 1) + z(z - 1)}{x + y + z - 3}$$

Solución:

Utilizando la regla práctica:

- $x + y + z - 3 = 0$
- $x = 3 - y - z$
- $R = (3 - y - z + y)^2 + (3 - y - z + y)(2z - 1) + z(z - 1)$

Efectuando operaciones y simplificando:

$R = (3 - z)^2 + (3 - z)(2z - 1) + z(z - 1)$

$R = 6$

4.- Hallar el resto en:

$$\frac{(5x^4 + 7x^2 + 5)^2 + (5x^4 + 7x^2 + 7)^3 + 8}{5x^4 + 7x^2 + 8}$$

Solución:

Efectuemos el siguiente cambio de variable:

$$5x^4 + 7x^2 = y$$

Reemplazando, se obtiene la división equivalente:

$$\frac{(y + 5)^2 + (y + 7)^3 + 8}{y + 8}$$

Utilizando la regla práctica:

- $y + 8 = 0$
- $y = -8$
- $R = (-8 + 5)^2 + (-8 + 7)^3 + 8 = 9 - 1 + 8 = 0$

  $R = 16$

5.- Hallar el resto en:

$$\frac{(x - 1)^{4n}(x^3 + 8)^3(x - 4)^3}{x^2 - 2x + 2}$$

Solución:

Efectuando operaciones en el dividendo:

$(x - 1)^{4n}(x^3 + 8)^3(x - 4)^3$

$= [(x - 1)^2]^{2n}[(x + 2)(x^2 - 2x + 4)]^3(x - 4)^3$

$= (x^2 - 2x + 1)^{2n}(x + 2)^3(x^2 - 2x + 4)^3(x - 4)^3$

Ordenando:

$$= (x^2 - 2x + 1)^{2n} (x^2 - 2x + 4)^3 [(x + 2)(x - 4)]^3$$

$$= (x^2 - 2x + 1)^{2n} (x^2 - 2x + 4)^3 [x^2 - 2x - 8]^3$$

Sustituyendo este equivalente en el numerador:

$$\frac{(x^2 - 2x + 1)^{2n}(x^2 - 2x + 4)^3(x^2 - 2x - 8)^3}{x^2 - 2x + 2}$$

y, haciendo: $x^2 - 2x = y$:

resulta en:

$$\frac{(y + 1)^{2n}(y + 4)^3(y - 8)^3}{y + 2}$$

Para hallar el resto se aplica la regla práctica:

- $y + 2 = 0$
- $y = -2$
- $R = (-2 + 1)^{2n} (-2 + 4)^3(-2 - 8)^3 = (1)(2)^3(-10)^3$

$R = -8\ 000$

6.- Hallar el resto en la división:

$$\frac{[3 + (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)]^4}{x(x + 5) + 5}$$

Solución:

Efectuando operaciones en el dividendo:

$$\frac{[3 + (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)]^4}{x(x + 5) + 5}$$

$$\frac{\{3 + (x^2 + 5x + 4)\ (x^2 + 5x + 6)\}^4}{x^2 + 5x + 5}$$

haciendo: $x^2 + 5x = y$

$$\frac{[3 + (y + 4)(y + 6)]^4}{y + 5}$$

Para hallar el resto se aplica la regla práctica:

- $y + 5 = 0$
- $y = -5$
- $R = [3 + (-5 + 4)(-5 + 6)]^4$

$R = 16$

7.- Hallar el resto en:

$$\frac{a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 - 3a^2b^2c^2}{ab + ac + bc}$$

Solución:

Agrupando convenientemente en el numerador:

$$\frac{(ab)^3 + (ac)^3 + (bc)^3 - 3(ab)(ac)(bc)}{ab + ac + bc}$$

Considerando que la variable es el producto ab, se calcula el resto por la regla práctica:

- $ab + ac + bc = 0$
- $ab = -ac - bc = -(ac + bc)$
- $R = [-(ac + bc)]^3 + (ac)^3 + (bc)^3$

$$- 3[-(ac + bc)](ac)(bc)$$

$$R = -(ac + bc)^3 + (ac)^3 + (bc)^3 + 3(ac + bc)(ac)(bc)$$

$$R = -\ (ac)^3 - 3(ac)^2(bc) - 3(ac)(bc)^2$$

$$- (bc)^3 + (ac)^3 + (bc)^3 + 3(ac)^2(bc) + 3(ac)(bc)^2$$

reduciendo términos semejantes:

$R = 0$

8.- Hallar el resto en:

$$\frac{\left(\dfrac{a - b}{2ab}\right)x^2 - \dfrac{a}{b}\,x - \dfrac{b}{a}\,x + \dfrac{(a + b)(a^2 - b^2)}{2ab}}{x - \dfrac{(a + b)^2}{a - b}}$$

Solución:

Aplicando la regla práctica del resto:

$$x - \frac{(a + b)^2}{a - b} = 0$$

$$x = \frac{(a+b)^2}{a-b}$$

$$R = \left(\frac{a-b}{2ab}\right)\left[\frac{(a+b)^2}{a-b}\right]^2 - \frac{a}{b}\,\frac{(a+b)^2}{(a-b)}$$

$$- \frac{b}{a}\,\frac{(a+b)^2}{(a-b)} + \frac{(a+b)(a^2-b^2)}{2ab}$$

Simplificando y agrupando:

$$R = \frac{(a+b)^4}{2ab(a-b)} - \frac{(a+b)^2}{a-b}\left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right]$$

$$+ \frac{(a+b)(a^2-b^2)}{2ab}$$

Efectuando el corchete y multiplicando numerador y denominador por 2:

$$R = \frac{(a+b)^4}{2ab(a-b)} - \frac{2(a+b)^2(a^2+b^2)}{2ab(a-b)}$$

$$+ \frac{(a+b)(a+b)(a-b)(a-b)}{2ab(a-b)}$$

$$R = \frac{(a+b)^4 - 2(a+b)^2(a^2+b^2) + (a+b)^2(a-b)^2}{2ab(a-b)}$$

Sacando el factor común $(a+b)^2$:

$$R = \frac{(a+b)^2\left[(a+b)^2 - 2(a^2+b^2) + (a-b)^2\right]}{2ab(a-b)}$$

Aplicando Legendre a los términos señalados:

$$R = \frac{(a+b)^2\left[2(a^2+b^2) - 2(a^2+b^2)\right]}{2ab(a-b)}$$

$$R = \frac{(a+b)^2\,[0]}{2(ab)(a-b)}$$

$R = 0$

9.- Hallar el resto en:

$$\frac{(x-1)^{n+2} + x^{2n+1}}{x^2 - x + 1}$$

Solución:

Aplicando la regla práctica del resto:

- $x^2 - x + 1 = 0$
- $x^2 = x - 1$

Reemplazando en el denominador esta equivalencia:

$D = (x-1)^{n+2} + (x-1)^n \, . \, x$

sacando factor común $(x-1)^n$:

$D = (x-1)^n\,[(x-1)^2 + x]$

$D = (x-1)^n\,[x^2 - 2x + 1 + x] = (x-1)^n[x^2 - x + 1]$

Sustituyendo:

$$x^2 = x - 1$$

se tiene:

- $R = (x-1)^n\,(x - 1 - x + 1) = (x-1)^n\,(0) = 0$

  $R = 0$

10.- Hallar el resto de la división:

$$\frac{(x+y)^{4m} - (x-y)^{4m}}{(8xy)\,(x^2+y^2)}$$

Solución:

Transformando el divisor mediante la aplicación de productos notables e identidades:

$$8xy(x^2+y^2) = [4xy][2(x^2+y^2)]$$

$$= [(x+y)^2 - (x-y)^2]\,[(x+y)^2 + (x-y)^2]$$

$$= (x+y)^4 - (x-y)^4$$

Haciendo: $(x+y)^4 = a$, $(x-y)^4 = b$, se obtiene:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b}$$

Para hallar el resto se sigue la regla práctica:

- $a - b = 0$
- $a = b$
- $R = a^m - a^m$

  $R = 0$

11.- Calcular "m" y "n" si la división:

$$\frac{x^m(x - a)^{3m} - 256(3a - x)^{2n}}{x - 2a}$$

es exacta.

Solución:

Cálculo del resto, siguiendo la regla práctica:

- $x - 2a = 0$
- $x = 2a$
- $R = (2a)^m(2a - a)^{3m} - 256(3a - 2a)^{2n}$

Según enunciado:

$$(2a)^m(2a - a)^{3m} - 256(3a - 2a)^{2n} = 0$$

efectuando:

$$2^m . a^m . a^{3m} = 256a^{2n}$$

$$2^m a^{4m} = 2^8 a^{2n}$$

Identificando factores con bases iguales:

$2^m = 2^8 \quad \Rightarrow \quad m = 8$

$a^{4m} = a^{2n} \quad \Rightarrow \quad 4m = 2n$

$n = 2m$

$n = 2(8) = 16$

Rpta.: $m = 8$

$n = 16$

12.- Hallar "m" si la división no deja resto:

$$\frac{x^8 + (y^2 - z^2)^2 - mx^4(y^2 + z^2)}{x^2 - y - z}$$

Solución:

Calcularemos del resto, siguiendo la regla práctica:

- $x^2 - y - z = 0$
- $x^2 = y + z$
- $R = (y + z)^4 + (y^2 - z^2)^2 - m(y + z)^2(y^2 + z^2)$

Por enunciado:

$(y + z)^4 + (y^2 - z^2)^2 - m(y + z)^2(y^2 + z^2) = 0$

Por enunciado:

$(y + z)^4 + (y + z)^2 (y - z)^2 = m(y + z)^2(y^2 + z^2)$

$(y + z)^4 [(y + z)^2 + (y - z)^2] = m(y + z)^2(y^2 + z^2)$

simplificando y aplicando Legendre:

$2(y^2 + z^2) = m(y^2 + z^2)$

de donde: $m = 2$

13.- Hallar "m" si la división deja por resto $49a^7$.

$$\frac{(x + 3a)^7 - (x^7 + ma^7)}{x + 2a}$$

Solución:

Cálculo del resto, siguiendo la regla práctica:

- $x + 2a = 0$
- $x = -2a$
- $R = (-2a + 3a)^7 - [(-2a)^7 + ma^7]$

Por condición del problema:

$$(-2a + 3a)^7 - [(-2a)^7 + ma^7] = 49a^7$$

de donde:

$$a^7 - (-128a^7 + ma^7) = 49a^7$$

$$a^7 + 128a^7 - ma^7 = 49a^7$$

operando: $m = 80$

14.- Calcular "m" si la división es exacta:

$$\frac{m(x + y + z)^3 - (x + y)^3 - (x + z)^3 - (x + z)^3}{x + y + 2z}$$

Solución:

Cálculo del resto:

- $x + y + 2z = 0$
- $x = -y - 2z$

- $R = m(-y -2z + y + z)^3 - (-y - 2z + y)^3$
$$- (y + z)^3 - (-y - 2z + z)^3$$

Por condición del problema: R = 0 igualando a cero y operando:

$$m(-z)^3 - (-2z)^3 - (y + z)^3 - [-(y + z)]^3 = 0$$

$$-mz^3 + 8z^3 - (y + z)^3 + (y + z)^3 = 0$$

$$8z^3 = mz^3 \qquad m = 8$$

15.- Hallar "m" para que el polinomio:

$$x^3 + x^2 - 3mx + 5$$

al dividirlo entre (x - 1) de como resto el doble del resto de dividir dicho polinomio entre (x - 2).

Solución:

Cálculo de R_1 (resto de la primera división):

- $x - 1 = 0$
- $x = 1$
- $R_1 = (1)^3 + (1)^2 - 3m(1) + 5$

$R_1 = 7 - 3m$

Cálculo de R_2 (resto de dividir entre x - 2):

- $x - 2 = 0$
- $x = 2$
- $R_2 = (2)^3 + (2)^2 - 3m(2) + 5 = 8 + 4 - 6m + 5$

$R_2 = 17 - 6m$

Condición del problema:

$$R_1 = 2R_2$$

reemplazando:

$$7 - 3m = 2(17 - 6m)$$

efectuando: $m = 3$

16.- Hallar el valor de:

$$E = 2m + 5n$$

si el resto de la división:

$$\frac{mx^8 + nx^6 - 3x^5 - 1}{x^3 + 1}$$

es igual a $8x^2 - 5$

Solución:

Cálculo del resto:

- $x^3 + 1 = 0$
- $x^3 = -1$

El polinomio dividendo se puede escribir así:

$$m(x^3)^2x^2 + m(x^3)^2 - 3(x^3)x^2 - 1$$

luego el resto es:

- $R = m(-1)^2x^2 + n(-1)^2 - 3(-1)x^2 - 1$

operando:

$$R = (m + 3)x^2 + (n - 1)$$

este resto es idéntico al resto que el problema indica; o sea:

$$(m + 3)x^2 + (n - 1) \equiv 8x^2 - 5$$

identificando coeficientes:

$$m + 3 = 8 \quad \Rightarrow \quad m = 5$$

$$n - 1 = -5 \quad \Rightarrow \quad n = -4$$

$$\therefore \quad E = 2(5) + 5(-4) = 10 - 20 = -10$$

Rpta.: E = -10

17.- Hallar el valor de "m" si la división es exacta.

$$\frac{(2m+3)(x+y+z)^2 - (y+z-x)^3 + m(z+x-y)^3 - (x+y-z)^3}{xyz}$$

Solución:

Cálculo del resto:

- haciendo $xyz = 0$
- $x = 0$

- $R = (2m + 3)(y + z)^3 - (y + z)^3$

$$+ m(y + z)^3 - (y - z)^3 = 0$$

agrupando e igualando a cero, por condición:

$$[(2m + 3)(y + z)^3 - (y + z)^3]$$
$$+ \{m [-(y - z)]^3 - (y - z)^3\} = 0$$

extrayendo factor común: $(y + z)^3$ en el corchete y, $-(y - z)^3$ en la llave:

$$(y + z)^3(2m + 3 - 1) - (y - z)^3(m + 1) = 0$$

factorizando:

$$(m + 1) [2(y + z)^3 - (y - z)^3] = 0$$

Igualando los factores a cero, basta con igualar a cero el primer factor:

$$m + 1 = 0$$
$$m = -1$$

18.- Hallar el valor de $E = \dfrac{a}{b}$ si en la división:

$$\frac{(a - b)x^n + (a - b)^2x^{n-1} + (a - b)^3 x^{n-2}}{x - a + b}$$

se obtiene como residuo : $3b^{n+1}$

Solución:

Cálculo del resto:

- $x - a + b = 0$
- $x = a - b$
- $R = (a - b)(a - b)^n + (a - b)^2 (a - b)^{n-1}$

$$+ (a - b)^3(a - b)^{n-2}$$

Pero, según el problema: $R = 3b^{n+1}$

igualando y operando:

$$(a - b)^{n+1} + (a - b)^{n+1} + (a - b)^{n+1} = 3b^{n+1}$$
$$3(a - b)^{n+1} = 3b^{n+1}$$

entonces: $a - b = b$

$$\frac{a}{b} = 2$$

$\therefore \quad E = 2$

19.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{b^2}{a^2 + c^2}$$

si la división:

$$\frac{(a + b)x^3 + (b - c)x^2 + (b + c)x + (a - b)}{x^2 + h^2}$$

es exacta.

Solución:

Para hallar el resto:

- $x^2 + h^2 = 0$
- $x^2 = -h^2$

El dividendo se puede escribir así:

$$(a + b)^2 (x^2)(x) + (b - c)x^2 + (b + c)x + (a - b)$$

Luego, el resto será:

- $R = (a + b)(-h^2)(x) + (b - c)(-h^2)$

$$+ (b + c)x + (a - b)$$

Igualando a cero y operando:

$$-(a + b)h^2x + (b + c)x - (b - c)h^2 + (a - b) \equiv 0$$

$$[-(a + b)h^2 + (b + c)]x + [-(b - c)h^2 + (a - b)] \equiv 0$$

identificando coeficientes a cero:

- $-(a + b)h^2 + (b + c) = 0$

$$h^2 = \frac{b + c}{a + b} \qquad (\alpha)$$

- $-(b - c)h^2 + (a - b) = 0$

$$h^2 = \frac{a - b}{b - c} \qquad (\beta)$$

igualando $(\alpha) = (\beta)$:

$$\frac{b + c}{a + b} = \frac{a - b}{b - c}$$

Producto de medios igual a producto de extremos:

$$b^2 - c^2 = a^2 - b^2$$
$$2b^2 = a^2 + c^2$$

También:

$$2 = \frac{a^2 + c^2}{b^2}$$

$$\therefore \quad E = \frac{1}{2}$$

20.- Determinar "m" para que el polinomio:

$$x^4 + y^4 + z^4 - m(x^2 \cdot y^2 + y^2 \cdot z^2 + x^2 \cdot z^2)$$

sea divisible entre x + y + z

Solución:

Cálculo del resto:

- $x + y + z = 0 \qquad \therefore$
- $x = -y - z$
- $R = \{-(y + z)\}^4 + y^4 + z^4 - m[\{-(y + z)\}^2(y^2 + z^2) + y^2 \cdot z^2]$

Como es divisible, el resto es cero; igualando a cero y operando:

$$(y + z)^4 + y^4 + z^4 = m[(y + z)^2(y^2 + z^2) + y^2z^2]$$

$$[(y + z)^2]^2 + y^4 + z^4 = m[(y^2 + 2yz + z^2)(y^2 + z^2) + y^2z^2]$$

$$(y^2 + 2yz + z^2)^2 + y^4 + z^4 = m[y^4 + 2y^3z + 2y^2z^2 + 2yz^3 + z^4 + y^2z^2]$$

$$y^4 + 4y^2z^2 + z^4 + 4y^3z + 2y^2z^2 + 4yz^3 + y^4 + z^4 = m[y^4 + z^4 + 2y^3z + 3y^2z^2 + 2yz^3]$$

$$2(y^4 + z^4 + 2y^3z + 3y^2z^2 + 2yz^3) = m(y^4 + z^4 + 2y^3z + 3y^2z^2 + 2yz^3)$$

$$m = 2$$

Rpta.: m= 2

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el resto que se obtiene al dividir:

$$\frac{(x^2 + x + 1)^{2n} + (x^2 - x - 1)^n}{(x^2 - x)}$$

siendo "n" un número impar positivo.

a) 1 - (2x + 1)n b) -2x + 1

c) 2x + 1 d) 0

e) -2x

2. Hallar el resto de:

$$\frac{x^{n+1} - (n + 1)x + n}{(x + 1)\ (x - 1)}$$

para n = número par positivo.

a) nx b) x c) 0

d) nx - n e) -nx + m

3. Sabiendo que el polinomio $x^4 + ax^2 + b$ es divisible entre $x^2 + bx + a$, calcular el resto de la división del polinomio entre ax + b.

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

4. Calcular el valor de "a" de tal manera que la expresión:

$$x^n - ax^{n-1} + ax - 1$$

sea divisible por $(x - 1)^2$

a) $\frac{n}{n + 2}$ b) $\frac{n}{n - 2}$ c) $\frac{n - 2}{n}$

d) $\frac{n + 2}{n}$ e) n

5. Calcular el valor de "m" de manera que el polinomio:

$$x^{3a+2} + x^{3b+1} + mx^{3c}$$

sea divisible entre $x^2 + x + 1$

a) 2 b) 3 c) 4

d) 1 e) 7

6. Calcular m de manera que la división:

$$\frac{x^4 (y + z)^2 + y^4(x + z)^2 + z^4(x + y)^2}{x^2(y + z)x + yz}$$

$$\underline{+ 2(xy + xz + yz)^3 - mx^2y^2z^2}$$

Se exacta:

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

7. Hallar la diferencia m - n, si la división es exacta:

$$\frac{3x^2 + mxy + 4y^2 + 5y + ny}{x + y}$$

a) 2 b) -2 c) 12

d) -12 e) 7

8. Si un polinomio P(x) se divide entre $(x^2 + x + 1)$ el resto es $3x + 2$, si el cociente se divide entre $(x^3 + 7)$, el resto es $2x^2 - x + 3$. Hallar el resto de la división de P(x) entre:

$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 7)$$

Dar la suma de sus coeficientes.

a) 10 b) 14 c) 15

d) 17 e) 19

9. Si el siguiente polinomio:

$$(mx + 1)^2 + (m + x)^2 + mx$$

es divisible ente (x + 1). Calcular "m".

a) 2 b) -2 c) 4

d) 5 e) 0

10. Calcular "m" si el resto de la división de:

$$x^3 - mx^2 + 7x - 1 \quad \text{entre} \quad x - 2$$

es el triple del resto de dividir:

$$x^2 - (m + 2)x - 11 \quad \text{entre} \quad x + 2$$

a) -3 b) 4 c) 5

d) 3 e) -4

11. Si el polinomio:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 32x + 15$$

se anula para x = -5 y x = 3. Calcular el otro valor de x para el cual también se anula.

a) 162 b) -1/2 c) 1

d) -1 e) Ninguna

12. Hallar m + n si la siguiente división es exacta:

$$(m+1)x^{28} - (n+2)x^{22} + mx^{15} - nx^8 + (2m - 2)x^7 + 1$$

entre $(x^7 + 1)$

a) 3 b) 4 c) 7

d) 1 e) -1

13. Hallar el resto al dividir:

$$P(x) = (x - 1)^6x^3(2 - x)^3 \quad \text{entre} \quad (x^2 - 2x - 2)$$

a) +128 b) -128 c) -216

d) 216 e) 0

14 Al dividir un polinomio P(x) entre $(x + a)^4$ se obtuvo como residuo:

$$(x^3 - 3a^2x + 2a^3)$$

Calcular el resto de dividir P(x) entre $(x + a)^2$

a) x + a b) 4 c) $xa^2 + 4a^3$

d) $4a^3$ e) x + 4a

15. Al dividir un polinomio P(x) entre $(x - 3)^2$ deja un residuo (x - 3). ¿Cuál es el resto de dividir el cuadrado de P(x) entre (x - 3)?

a) 3 b) 9 c) 0

d) -3 e) 8

16. Al dividir un polinomio P(y) entre (y - 3) se obtuvo un cociente Q(y) y un resto igual a - 2; al dividir Q(y) entre (y + 2) se obtiene un resto igual a 2. Calcular el término independiente del residuo al dividir P(y) entre (y - 3)(y + 2).

a) -8 b) 8 c) 12

d) -12 e) 15

17. Hallar el término cuadrático de un polinomio P(x) de cuarto grado, si se sabe que sus respectivos coeficientes son números enteros consecutivos, se sabe además que si se divide dicho polinomio entre (x - 1) el resto es 35.

a) 5 b) 6 c) 7

d) 8 e) 9

18. Si al dividir un polinomio P(x) entre x^4-1 se obtuvo como residuo:

$$3x^3 + bx^2 + cx - 2$$

si se sabe además que el resto de dividir P(x) entre (x^2 - 1) es dos veces más que el resto de la división de P(x) entre (x^2 + 1). Decir cuánto vale: b + c.

a) -5 b) -3 c) 2

d) 3 e) 5

19. Hallar el residuo de:

$$\left[x^{3^{n+2}} + 3^{3^n}\right] \div \left[x^9 + 3\right]$$

a) 3^n b) $3^{3^n} + 1$ c) $3^{3^n} - 1$

d) 0 e) $1 - 3^{n^3}$

20. Hallar el resto de dividir el polinomio:

$$P(x) = \frac{(x-n)(x-p)}{(m-n)(m-p)}a + \frac{(x-m)(x-p)}{(n-m)(n-p)}b + \frac{(x-m)(x-n)}{(p-m)(p-n)}c$$

entre el divisor (x - m)(x - n)(x - p)

a) $x^2 + x + 1$ b) x c) $x^2 + 1$

d) x - 1 e) $x^2 - 1$

CLAVE DE RESPUESTAS

1) E	2) C	3) C	4) B	5) D
6) B	7) C	8) E	9) A	10) D
11) A	12) D	13) C	14) D	15) C
16) A	17) C	18) E	19) D	20) B

DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA

Este capítulo tiene por finalidad determinar polinomios desconocidos, dadas ciertas condiciones, y también obtener restos que no se puede obtener fácilmente por división o por aplicación directa del teorema del resto.

Para tal efecto, se necesita conocer los siguientes principios:

PRINCIPIOS DE LA DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA

1º Para determinar la suma de coeficientes de un polinomio se hace la variable, o variables, igual a 1. Es decir:

$$\sum \text{ de coeficientes de } P(x,y) = P(1,1)$$

donde: $\sum$ significa sumatoria.

2º Para determinar el término independiente de un polinomio se hace la variable respecto a la cual se refiere el polinomio, igual a cero. Esto es:

$$\text{T.I. del polinomio } P(x) = P(0)$$

3º Si un polinomio es divisible separadamente entre dos o más binomios, será divisible entre el producto de ellos.

$$\text{Si} \quad P(x) \div (x - a), \qquad R = 0$$
$$P(x) \div (x - b), \qquad R = 0$$
$$P(x) \div (x - c), \qquad R = 0$$

entonces:

$$P(x) \div (x - a)(x - b)(x - c), \quad R = 0$$

4º Si un polinomio es divisible entre el producto de varios binomios, será divisible separadamente por cada uno de ellos. Esto significa que:

$$\text{Si} \quad P(x) \div (x - a)(x - b)(x - c), \quad R = 0$$

entonces:

$$P(x) \div (x - a), \qquad R = 0$$
$$P(x) \div (x - b), \qquad R = 0$$
$$P(x) \div (x - c), \qquad R = 0$$

5º En toda división, si al dividendo y divisor se le multiplica por una misma cantidad el resto queda multiplicado por dicha cantidad. Para determinar el resto verdadero se divide el resto obtenido entre la cantidad por la cual se multiplicó dividendo y divisor.

En general: $D = dq + R$

multiplicando por “m”:

$$D \,.\, m = d \,.\, m \,.\, q + R \,.\, m$$

$$\text{Resto verdadero} = \frac{\text{Resto obtenido}}{m} = \frac{R \,.\, m}{m} = R$$

6º En toda división, si al dividendo y divisor se le divide por una misma cantidad, el resto queda dividido por dicha cantidad. Para determinar el

resto verdadero, se multiplica el resto obtenido por la cantidad por la cual se dividió dividendo y divisor.

En general: $D = dq + R$

dividiendo entre "m":

$$\frac{D}{m} = \frac{d}{m} \cdot q + \frac{R}{m}$$

El resto verdadero = Resto obtenido . m

$$= \frac{R}{m} \cdot m = R$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar la suma de coeficientes del polinomio:

$$P(x) = (8x^3-7x + 2)^{n+3} (5x^5 - 3x + 7)^{n-1} - (10x - 1)^{n+1}(4x - 1)^{n-1}$$

Solución:

Como se pide calcular la suma de coeficientes del polinomio, se halla su valor para $x = 1$:

$$P(1) = (8 - 7 + 2)^{n+3} (5 - 3 + 7)^{n-1} - (10 - 1)^{n+1}(4 - 1)^{n-1}$$

$$P(1) = (3)^{n+3}(9)^{n-1} - (9)^{n+1}(3)^{n-1}$$

$$P(1) = (3^{n+3}) (3^2)^{n-1} - (3^2)^{n+1}(3)^{n-1}$$

$$P(1) = 3^{n+3} . 3^{2n-2} - 3^{2n+2} . 3^{n-1}$$

$$P(1) = 3^{3n+1} - 3^{3n+1} = 0$$

$\therefore \sum$ coeficientes $= P(1) = 0$

Rpta.: $\sum$ coeficientes $= 0$

2.- Si el polinomio:

$$P(x) = (5x - 1)^{2n-1} (2x + 5)^n + [(3x + 1)(x + 5)]^n + (x^2 + n)(x - 2)$$

tiene como término independiente (-36)
Calcular n.

Solución:

Se halla el T.I., para lo cual se hace $x = 0$:

$$P(0) = (-1)^{2n-1} (5)^n + [(1)(5)]^n + (n)(-2)$$

$2n - 1$ es número impar, por lo tanto:

$$(-1)^{2n-1} = -1$$

entonces:

$$P(0) = (-1) (5)^n + 5^n - 2n = -5^n + 5^n - 2n$$

$$P(0) = -2n$$

Este es el T.I., según el enunciado su valor es -36. Luego:

$\therefore$ $-2n = -36$
$n = 18$

Rpta.: $n = 18$

3.- Determinar $E = abc$ si el polinomio:

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$$

es divisible entre $(x - 1)(x + 1)(x - 3)$

Solución:

si el polinomio es divisible entre $(x -1)(x +1)(x - 3)$, será divisible separadamente entre $(x-1)$, $(x + 1)$ y $(x-3)$.

Dividiendo tres veces consecutivas por Ruffini:

	1	-2	-6	+a	+b	+c
1		+1	-1	-7	+a-7	+b+a-7
	1	-1	-7	a-7	b+a-7	a+b+c-7
-1		-1	+2	+5	-a+2	
	1	-2	-5	a-2	b-5	
3		+3	+3	-6		
	1	+1	-2	a-8		

Los restos deben ser cero, así:

$$a + b + c - 7 = 0 \qquad (\alpha)$$

$$b - 5 = 0 \qquad (\beta)$$

$$a - 8 = 0 \qquad (\gamma)$$

De (γ): $a = 8$

De (β): $b = 5$

De (α): $8 + 5 + c - 7 = 0$
$c = -6$

$\therefore$ $E = (8)(5)(06) = -240$

4.- Determinar "a" y "b" si el polinomio:

$$ax^8 + bx^7 + 1$$

es divisible entre $(x-1)^2$

Solución:

Como es divisible entre $(x - 1)^2$ será divisible doblemente por $(x - 1)$. Dividiendo consecutivamente entre $(x - 1)$, por Ruffini:

	a	b	0	0	0	0	0	0	1
	↓								
1		a	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b
	a	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b+1
	↓								
1		a	2a+b	3a+2b	4a+3b	5a+4b	6a+5b	7a+6b	
	a	2a+b	3a+2b	4a+3b	5a+4b	6a+5b	7a+6b	8a+7b	

Por ser divisible debe cumplirse que:

i) $a + b + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = -1 \qquad (\alpha)$

ii) $8a + 7b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{-7b}{8} \qquad (\beta)$

Sustituyendo en (β) en (α):

$$\frac{-7b}{8} + b = -1$$

$$b = -8$$

Sustituyendo en (β):

$$a = \frac{-7b}{8}(-8)$$

$$a = 7$$

5.- Hallar el cociente entre "q" y "r" si el cociente es exacto:

$$\frac{x^5 - 5qx + 4r}{(x-c)^2}$$

Solución:

Si el cociente es exacto, el polinomio dividendo es divisible entre $(x - c)^2$ y también dos veces es divisible entre $(x - c)$, dividiendo por Ruffini:

	1	0	0	0	$-5q$	$+4r$
	↓					
c		c	c^2	c^3	c^4	$-5qc+c^5$
	1	c	c^2	c^3	$-5q+c^4$	$4r-5qc+c^5$
	↓					
c		c	$2c^2$	$3c^3$	$+4c^4$	
	1	$2c$	$3c^2$	$4c^3$	$-5q+c^4+4c^4$	

Como el cociente es exacto, debe cumplirse que:

i) $4r - 5qc + c^5 = 0 \qquad (\alpha)$

ii) $-5q + 5c^4 = 0$

$$c^4 = q \qquad (\beta)$$

Sustituyendo (β) en (α):

$$4r - 5c^5 + c^5 = 0$$

$$r = c^5 \qquad (\gamma)$$

De (β) a la quinta y (γ) a la cuarta potencia, se obtiene:

$$c^{20} = q^5 \qquad (\rho)$$

$$r^4 = c^{20} \qquad (\theta)$$

de estas dos últimas relaciones:

$$r^4 = q^5$$

6.- Hallar "n" y "a" si la división es exacta:

$$\frac{(x^2 + x + 2)^4 - a\left[(x + 1)^2 - x + 1\right]^3 - nx^4(x + 1)^4}{x^3 - 1}$$

Solución:

Como el divisor es:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Por productos notables, el dividendo será divisible entre $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ y también entre cada uno de ellos. Si es divisible por $(x - 1)$, aplicando el Teorema del resto se obtiene:

$R = P(1) = (1+1+2)^4 - a(4-1+1)^3 - n(1)^4(2)^4 = 0$

$$256 - 64a - 16n = 0$$

$$4a + n = 16 \qquad (\alpha)$$

Si es divisible entre $(x^2 + x + 1)$, aplicamos el Teorema del Resto, previo cambio de forma del dividendo, de esta manera:

$(x^2 + x + 2)^4 - a(x^2 + 2x + 1 - x + 1)^3 - n(x^2 + x)^4$

o: $(x^2 + x + 2)^4 - a\,(x^2 + x + 2)^3 - n(x^2 + x)^4$

(Dividendo)

Igualando a cero el divisor:

$$x^2 + x + 1 = 0 \qquad x^2 + x = -1$$

Sustituyendo en el dividendo:

$R = (-1 + 2)^4 - a(-1 + 2)^3 - n(-1)^4 = 1 - a - n$

Como la división es exacta el resto es cero, esto es:

$$1 - a - n = 0$$

$$a + n = 1 \qquad (\beta)$$

Restando $(\alpha) - (\beta)$:

$$3a = 15$$

$$a = 5$$

Sustituyendo en (α):

$$n = -4$$

7.- Calcular "a" y "b" si el polinomio:

$$2x^4 + ax^3 + bx^2 + 27x - 10$$

es divisible entre $x^2 - 6x + 5$

Solución:

Transformando a producto el divisor por productos notables, entonces el polinomio será divisible separadamente por $(x - 5)$ y $(x - 1)$

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$$

Dividiendo por Ruffini dos veces:

	2	+a	+b	27	-10
	↓				
1		2	a+2	a+b+2	a+b+29
	2	a+2	a+b+2	a+b+29	a+b+29-10
	↓				
5		10	5a+60	30a+5b+310	
	2	a+12	6a+b+62	31a+6b+339	

Por condición del problema:

$$a + b + 29 - 10 = 0$$

$$a + b = -19 \qquad (\alpha)$$

También:

$$31a + 6b + 339 = 0$$

$$31a + 6b = -339 \qquad (\beta)$$

De (α):

$$b = -19 - a$$

sustituyendo en (β):

$$31a + 6(-19 - a) = -339$$

$$a = -9$$

sustituyendo en (α):

$$-9 + b = -19$$

$$b = -10$$

8.- Un polinomio de tercer grado cuyo primer coeficiente es 1, es divisible por $(x - 2)$ y $(x - 1)$ y al ser dividido por $(x - 3)$ da resto 20. Hallar su término independiente.

Solución:

Datos:

i) P(x) es de tercer grado

ii) Primer coeficiente es 1

iii) $P(x) \div (x - 2), \quad R = 0$

iv) $P(x) \div (x - 1), \quad R = 0$

v) $P(x) \div (x - 3), \quad R = 20$

Incógnita: T.I. = P(0)

De los datos (3) y (4) se obtiene:

$$P(x) \div (x - 2)(x - 1), \qquad R = 0$$

En toda división:

$$D = dq + R$$

si R = 0, la división es exacta, para este problema, por lo tanto:

$$P(x) \equiv (x - 2)(x - 1)\ q(x)$$

Por dato (1), P(x) es de tercer grado:

$$\underbrace{P(x)}_{3er.grado} \equiv \underbrace{(x - 2)(x - 1)}_{2do.grado}\ \underbrace{q(x)}_{1er.grado}$$

se concluye que q(x) es de primer grado y es de la forma:

$$q(x) = ax + b$$

Luego: $P(x) \equiv (x - 2)(x - 1)(ax - b)$

Por dato (2) el primer coeficiente es 1, luego:

$$a = 1$$

Por lo tanto se puede escribir:

$$P(x) \equiv (x - 2)(x - 1)(x + b) \qquad (\alpha)$$

Por dato (5); $P(3) = 20$

Sustituyendo x = 3 en (α) e igualando a 20:

$$(3 - 2)\ (3 - 1)\ (3 + b) = 20$$

$$b = 7$$

El polinomio buscado es:

$$P(x) \equiv (x - 2)(x - 1)(x + 7)$$

$$P(0) = (0 - 2)(0 - 1)(0 + 7) = 14$$

9.- Un polinomio P(x) divisible entre:

$$(x^{n-1} + 1)$$

tiene como T.I. -3 y grado "n". Calcular el valor de "n" si se sabe que al dividirlo separadamente entre (x - 1) y (x - 3), los restos que se obtienen son: -2 y 732 respectivamente.

Solución:

Datos:

i) $P(x) \div (x^{n-1} + 1)$, R = 0

ii) P(x) es de grado "n"

iii) $P(x) \div (x - 1)$, R = -2

iv) $P(x) \div (x - 3)$, R = +732

v) T.I. de P(x) es -3

Incógnita: n

Por el dato (1):

$$P(x) \equiv (x^{n-1} + 1)\ q(x)$$

Por el dato (2):

$$\underbrace{P(x)}_{\text{grado } n} \equiv \underbrace{\underbrace{(x^{n-1} + 1)}_{\text{grado }(n-1)}\ \underbrace{q(x)}_{\text{grado }(1)}}_{\text{grado } n}$$

por lo tanto, q(x) es de primer grado y de la forma:

$$q(x) = ax + b$$

y, el polinomio adopta la forma:

$$P(x) \equiv (x^{n-1} + 1)\ (ax + b)$$

Por dato 5:

$$T.I. = P(0) = -3 \qquad (\alpha)$$

$$P(0) \equiv (0 + 1)(0 + b) \qquad (\beta)$$

Igualando (α) y (β)

$$(0 + 1)(0 + b) = -3$$

$$b = -3$$

Con lo cual el polinomio hasta este momento tiene la forma:

$$P(x) \equiv (x^{n-1} + 1)\ (ax - 3)$$

Por el dato (3):

$$P(1) = -2$$

$$P(1) = (1^{n-1} + 1)(a - 3) = -2$$

Esto es:

$$(1^{n-1} + 1)(a - 3) = -2$$
$$a = 2$$

El polinomio finalmente será:

$$P(x) \equiv (x^{n-1} + 1)(2x - 3)$$

Por el dato (4):

$$P(3) = 732 \qquad (\rho)$$

$$P(3) = (3^{n-1} + 1)(6 - 3) \qquad (\pi)$$

Igualando (ρ) y (π):

$$(3^{n-1} + 1)(6 - 3) = 732$$

$$3^{n-1} + 1 = 244 \;\; ; \;\; 3^{n-1} = 243 \quad 3^{n-1} = 3^5$$

Como las bases son iguales, los exponentes también serán iguales:

$$n - 1 = 5 \;\; ; \;\; n = 6$$

10.- Un polinomio P(x) de sexto grado tiene raíz cuadrada exacta, es divisible separadamente por (x^2+1) y $(x + 3)$ y si se le divide por $(x + 2)$ el resto es 225.

Hallar la suma de sus coeficientes.

Solución:

Datos:

i) P(x) es de sexto grado

ii) P(x) tiene raíz exacta

iii) $P(x) \div (x^2 + 1)$, R = 0

iv) $P(x) \div (x + 3)$, R = 0

v) $P(x) \div (x + 2)$, R = 225

Por los datos (2), (3) y (4):

$$P(x) \div (x^2 + 1)^2, \;\; R = 0$$

$$P(x) \div (x + 3)^2, \;\; R = 0$$

de aquí se concluye que:

$$P(x) \div (x^2 + 1)^2 \, (x + 3)^2, \;\; R = 0$$

luego:

$$P(x) \equiv (x^2 + 1)^2 \; (x + 3)^2 \; q(x)$$

Por dato (1):

$$\underbrace{P(x)}_{\text{6to. grado}} \equiv \underbrace{\underbrace{(x^2 + 1)^2}_{\text{4to.}} \; \underbrace{(x + 3)^2}_{\text{2do.}} \; \underbrace{q(x)}_{0}}_{\text{6to.grado}}$$

se concluye que q(x) es de grado cero y toma la forma de:

$$q(x) = A$$

el polinomio será:

$$P(x) \equiv (x^2 + 1)^2 \; (x + 3)^2 \; A$$

Por el dato (5):

$$P(-2) = 225$$

$$P(-2) \equiv (4 + 1)^2 \; (-2 + 3)^2 \; A = 225$$

$$(5)^2 \; (1)^2 \; A = 225$$

$$A = 9$$

El polinomio es:

$$P(x) = (x^2 + 1)^2 \; (x + 3)^2 \, (9)$$

La suma de coeficientes será:

$$P(1) = (1 + 1)^2 \, (1 + 3)^2 9 = (4)(16)9 = 576$$

$$P(1) = 576$$

11.- Determinar el polinomio P(x) de 5to. grado que sea divisible entre $(2x^4 - 3)$ y que al dividirlo separadamente entre $(x + 1)$ y $(x - 2)$ los restos obtenidos sean 7 y 232 respectivamente.

Solución:

Datos:

$P(x) \div$ 5to. grado

$P(x) \div (2x^4 - 3)$, R = 0

$P(x) \div (x + 1)$, R = 7

$P(x) \div (x - 2)$, R = 232

a) Como $P(x) \div (2x^4 - 3)$, da $R = 0$

$$P(x) = (2x^4 - 3)\, q(x)$$

b) Como $P(x)$ es de 5to. grado, $q(x)$ es de primer grado:

$$q(x) = ax + b$$

Luego: $P(x) = (2x^4 - 3)(ax + b) \qquad (\alpha)$

c) Aplicando el Teorema del resto:

$$P(x) \div (x + 1)$$

haciendo: $x + 1 = 0$

$$x = -1$$

$$R = P(-1) = 7$$

En (α):

$$P(-1) = [2(-1)^4 - 3][a(-1) + b] = 7$$

$$(-1)(-a + b) = 7$$

$$+a - b = 7 \qquad (\beta)$$

d) $P(x) \div (x - 2)$

haciendo: $x - 2 = 0$

$$x = 2$$

$$R = P(2) = 232$$

En (α):

$$P(2) = [2(2)^4 - 3][a(2) + b] = 232$$

$$29(2a + b) = 232$$

$$2a + b = 8 \qquad (\gamma)$$

Sumando (β) y (γ):

$$3a = 15$$

$$a = 5$$

En (β):

$$5 - b = 7$$

$$b = -2$$

e) Reemplazando valores en (a):

$$P(x) = (2x^4 - 3)(5x - 2)$$

efectuando:

$$P(x) = 10x^5 - 4x^4 - 15x + 6$$

12.- Hallar el resto de la división:

$$\frac{(x - 3)^8 + (x - 4)^5 + 6}{(x - 3)(x - 4)}$$

Solución:

En toda división se cumple:

$$D = dq + R$$

En este caso:

$$(x - 3)^8 + (x - 4)^5 + 6 \equiv (x - 3)(x - 4)\, q(x) + ax + b$$

Como es una identidad, se cumple para cualquier valor de x, así:

para $x = 3$ se obtiene:

$$(3 - 3)^8 + (3 - 4)^5 + 6 \equiv (3 - 3)(3 - 4)\, q(3) + 3a + b$$

$$-1 + 6 = 3a + b$$

$$3a + b = 5 \qquad (\alpha)$$

para $x = 4$ se obtiene:

$$(4 - 3)^8 + (4 - 4)^5 + 6 \equiv (4 - 3)(4 - 4)\, q(4) + 4a + b$$

$$4a + b = 7 \qquad (\beta)$$

restando $(\beta) - (\alpha)$:

$$a = 2$$

En (α): $6 + b = 5$

$$b = -1$$

$$R = ax + b$$

$$R = 2x - 1$$

13.- Hallar el resto en:

$$\frac{(x - 5)^3 (x + 4)^2 (x^3 - 3x - 17)^n}{(x - 2)(x + 4)(x - 5)}$$

Solución:

Dividiendo al dividendo y al divisor entre $(x - 5)(x + 4)$, se obtiene:

$$\frac{(x - 5)^2 (x + 4) (x^3 - 3x - 17)^n}{(x - 3)}$$

Aplicando el Teorema del resto:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Sustituyendo en el dividendo:

$$R = (3 - 5)^3 (3 + 4)(27 - 9 - 17)^n = (4)(7)(1)^n = 28$$

Como previamente se dividió, dividendo y divisor entre el producto (x-5) (x+4), para obtener el resto verdadero se tendrá que multiplicar el resto 28 por (x-5) (x+4), así:

$$R.verdadero = 28(x - 5)(x + 4)$$

efectuando:

$$R = 28x^2 - 28x - 560$$

14.- Hallar el resto en:

$$\frac{x^{102} - x^{51} - x^4 + 2}{x^2 - x + 1}$$

Solución:

Multiplicando el dividendo y divisor por (x+1) se obtiene:

$$\frac{(x^{102} - x^{51} - x^4 + 2)(x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x + 1)}$$

efectuando:

$$\frac{x^{103} - x^{52} - x^5 + 2x + x^{102} - x^{51} - x^4 + 2}{x^3 + 1}$$

descomponiendo parcialmente en potencias de "x^3":

$$\frac{(x^3)^{34}(x) - (x^3)^{17}(x) - (x^3)(x^2) + 2x + (x^3)^{34}}{x^3 + 1}$$

$$\underline{- (x^3)^{17} - (x^3)(x) + 2}$$

aplicando Teorema del resto:

$$x^3 + 1 = 0$$

$$\therefore \qquad x^3 = -1$$

$$R = (-1)^{34} (x) - (-1)^{17}(x) - (-1)(x^2) + 2x$$

$$+ (-1)^{34} - (-1)(x) + 2 - (-1)^{17}$$

$$R = x + x + x^2 + 2x + 1 + x + 2 + 1$$

$$R = x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$$

Como se ha multiplicado dividendo y divisor por (x + 1), se tendrá que dividir por este mismo valor el resto para obtener el verdadero.

El resto verdadero será:

$$R.\ verdadero = \frac{(x + 1)(x + 4)}{(x + 1)}$$

$$R.\ verdadero = x + 4$$

15.- Si se divide un polinomio P(x) entre (x - 1) se obtiene un resto que es 3; al cociente se divide entre (x + 1), el resto es 5; al nuevo cociente se divide entre (x + 2), el resto es 8. Hallar el resto de la división P(x) entre (x - 1)(x + 1)(x + 2)

Solución:

Datos:

i) $P(x) \div (x - 1) = q(x), \quad R = 3$

ii) $q(x) \div (x + 1) = q_1(x), \quad R = 5$

iii) $q_1(x) \div (x + 2) = q_2(x), \quad R = 8$

Operando para resolver el ejercicio:

Por el dato (1):

$$P(x) = (x - 1)\ q(x) + 3 \qquad (\alpha)$$

Por el dato (2):

$$q(x) = (x + 1)\ q_1(x) + 5 \qquad (\beta)$$

Por el dato (3):

$$q_1(x) = (x + 2)\ q_2(x) + 8 \qquad (\gamma)$$

Sustituyendo (γ) en (β):

$$q(x) = (x + 1)\ [(x + 2)\ q_2(x) + 8] + 5$$

$$q(x) = (x + 1)\ (x + 2)\ q_2(x) + 8(x + 1) + 5 \quad (\phi)$$

Sustituyendo (ϕ) en (α):

$$P(x) = (x - 1)\ [(x + 1)(x + 2)\ q_2(x)$$

$$+ 8(x + 1) + 5] + 3$$

efectuando:

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 1)\ q_2(x)$$
$$+ 8(x + 1)(x - 1) + 5(x - 1) + 3$$

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)\ q_2(x)$$
$$+ 8x^2 - 8 + 5x - 5 + 3$$

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)\ q_2(x)$$
$$+ 8x^2 + 5x - 10$$

La división completa será en consecuencia:

$$P(x) \div (x - 1)(x + 1)(x + 2) = q_2(x) + (8x^2 + 5x - 10)$$

Rpta.: $8x^2 + 5x - 10$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un polinomio P(x) de tercer grado y de primer coeficiente la unidad, al ser dividido entre el polinomio:

$$(x^2 + 3x + 1)$$

deja de residuo cero. ¿Entre cuáles de los siguientes binomios es divisible P(x) si al dividir P(x) entre (x+1) deja de residuo -1?

a) $x + 4$ b) $x = 2$ c) $x + 3$

d) $x - 1$ e) $x - 3$

2. ¿Cuál es la suma de los coeficientes del polinomio f(x) si se sabe que es de tercer grado, su primer coeficiente es la unidad, es divisible entre: $(x - 2)(x + 1)$ y carece de término cuadrático?

a) 4 b) 1 c) 2

d) -3 e) -4

3. Al dividir dos polinomios enteros en "x" se observa que el término independiente del dividendo es 5 veces el término independiente del divisor y el residuo 2 veces el del divisor. Hallar el término independiente del cociente.

a) 1 b) 3 c) 2

d) 4 e) 5

4. Hallar el valor de (m-n) sabiendo que el polinomio:

$$P(x) = 10x^5 + x^4 - 9x^3 + 16x^2 + mx + n$$

es divisible entre $(x - 1)(2x + 3)$

a) 4 b) -4 c) 0

d) 8 e) -18

5. ¿Cuál es el valor de "m" si el polinomio:

$$P(x) = x^3 + m(a - 1)x^2 + a^2\ .\ (mx + a - 1)$$

es divisible entre $x - a + 1$?

a) a b) $a^2 + 1$ c) $a + 1$

d) -1 e) -a

6. ¿Qué valor deberá asignarse a "α" para que el polinomio:

$$5x^3 - \alpha(x^2 + x - 1)$$

admita como divisor a : $5x^2 + 2x - 4$?

a) -4 b) 6 c) 8

d) 8 e) 7

7. Al dividir un polinomio P(x) entre $x^3 + 1$, se obtiene como resto:

$$6x^2 + 2x - 3$$

Hallar la suma de los coeficientes del resto de dividir P(x) entre $(x - 1)(x + 1)$, sabiendo que la suma de los coeficientes de P(x) es 8.

a) 6　　b) 12　　c) 4

d) 8　　e) 5

8. Averiguar el valor de $(a^2 - b^2)$ si la diferencia entre los restos que se obtienen al dividir separadamente el polinomio:

$$ax^4 + bx^3 + c$$

entre $(x^2 + 1)$ y $(x^3 + 1)$ respectivamente es:

$$2x - 12$$

a) -24　　b) -16　　c) -20

d) -12　　e) -8

9. Hallar el resto que se obtiene al dividir:

$$\frac{x^{3a} + 2x^{3b+1} + x^{3c+2} + 1}{x^2 + x + 1}$$

a) x - 1　　b) x　　c) x + 1

d) -x　　e) faltan datos

10. Hallar el resto de la división:

$$\frac{(x + 2)^6 + 2x^3 + 6}{(x + 3)\ (x + 1)}$$

a) 3x + 1　　b) 26x + 31　　c) 4x + 1

d) 1　　e) 2

11. Un polinomio P(x) al dividirlo entre $x^2 + x + 1$ y $x^2 - x + 1$ nos da como resto 1 - x y 3x + 5. Hallar el resto que daría al dividirlo entre:

$$x^4 + x^2 + 1$$

a) 1　　b) 4　　c) 6

d) 12　　e) -6

12. El resto de dividir un polinomio M(x) entre $(x - 2)^5$ es:

$$x^3 - 2x + 1$$

Otro polinomio N(x) al dividirlo entre (x - 2) da como resto:

$$2x^2 + 3x - 6$$

Si en ambos casos el polinomio es el mismo, ¿Cuál es el resto de dividir M(x) + N(x) entre $x^2 - 4x + 5$?

a) 20x - 25　　b) x + 5　　c) 4x =2

d) 3x +1　　e) x

13. Hallar a y b de manera que:

$$x^3 + ax^2 + 11x + 6 \quad y \quad x^3 + bx^2 + 14x + 8$$

sea divisible por $x^2 + mx + n$

a) a = 1, b = 3　　b) a = 5, b = 7　　c) a = 8, b =10

d) a = 6, b = 7　　e) a = 4, b = 3

14. Un polinomio de 4to. grado en x, cuyo primer coeficiente es la unidad es divisible por $(x^2 - 1)$ y por (x - 4) y al dividirlo por (x + 3) da como residuo 56. Calcular cuánto dará de residuo al dividirlo por (x - 2).

a) 48　　b) 12　　c) 24

d) 50　　e) 15

15. Encontrar un polinomio de sexto grado, cuyo T.I. es 100, que tenga raíz cuadrada exacta, que sea divisible entre $(x^2 + 2)$ y que al dividirlo entre (x - 1) el resto obtenido sea 81. Hallar el resto del mencionado polinomio cuando se le divide por (x + 1).

a) 36　　b) 144　　c) 225

d) 324　　e) 441

16. Un polinomio de grado n + 1 cuyo primer coeficiente es 1 es divisible entre $(x^n + 2)$. Si el resto de dividirlo separadamente entre (x + 1) y (x + 2) son respectivamente 12 y 258. Calcular "n".

a) 2　　b) 4　　c) 6

d) 8　　e) 5

17. Tres números reales y diferentes verifican las condiciones siguientes:

$$a^3 + pa + q = 0$$

$$b^3 + pb + q = 0$$

$$c^3 + cp + q = 0$$

Calcular : $E = \frac{q}{p}\left(\frac{ab + ac + bc}{abc}\right)$

a) 1 b) -1 c) a

d) b e) c

18. Un polinomio P(x) de 2do. grado y el primer coeficiente la unidad al ser dividido entre (x - 2) da como resultado un cierto cociente Q(x) y un resto 6. Si se divide P(x) entre el cociente aumentado en 3 la división resulta exacta. Hallar el resto de dividir P(x) entre (x - 5).

a) 5 b) 20 c) 10

d) 4 e) 12

19. Calcular "a" si se cumple la siguiente identidad:

$$3x^5 - 2x^4 + 3x - 7 \equiv a(x-1)^5 + b(x-1)^4 + c(x-1)^3 + d(x-1)^2 + e(x-1) + f$$

a) 22 b) 18 c) 10

d) 13 e) 8

20. Hallar el resto de la siguiente división:

$$\frac{a(x-b)^{2n} + b(x-a)^{2n}}{(x-a)(x-b)}$$

a) ax - b b) bx - a

c) $(a + b)^{2n}x + b$ d) $(a - b)^{2n}x$

CLAVE DE RESPUESTAS

1) B	2) E	3) B	4) C	5) D
6) C	7) D	8) A	9) C	10) B
11) C	12) A	13) D	14) A	15) E
16) C	17) B	18) B	19) B	20) D

COCIENTES NOTABLES

DEFINICIÓN.-

Se denomina cocientes notables, a ciertos cocientes cuyo desarrollo se puede escribir sin efectuar la división. Se caracterizan por ser cocientes exactos.

FORMA GENERAL DE LOS COCIENTES NOTABLES

Todo cociente notable se puede presentar de la siguiente forma general:

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$$

donde se observa:

1) El dividendo y el divisor tienen, cada uno, dos términos.

2) Las bases del dividendo y divisor "x", "a" respectivamente son iguales.

3) Los exponentes en cada uno de los términos del dividendo son iguales.

4) Hay cuatro formas de cocientes notables, que se obtiene combinando los signos:

$$\left(\frac{+}{+}, \frac{+}{-}, \frac{-}{+}, \frac{-}{-}\right)$$

Como consecuencia, se presenta 4 casos.

ESTUDIO DEL PRIMER CASO: $\frac{x^m + a^m}{x + a}$

Dividendo: $x^m + a^m$

Divisor: $x + a$

Cociente: C.N.

Resto: 0

Aplicando Teorema del resto, regla práctica:

1º $x + a = 0$

2º $x = -a$

3º $R = (-a)^m + a^m = 0$

Hay dos casos:

a) Que "m" sea par, luego:

$$R = (-a)^m + a^m = a^m + a^m = 2a^m \neq 0$$

No es cociente notable, porque el resto es diferente de cero.

b) Que "m" sea impar, luego:

$$R = (-a)^m + a^m = -a^m + a^m$$

Sí es cociente notable.

CONCLUSIÓN.- La forma:

$$\frac{x^m + a^m}{x + a}$$

es C.N. cuando "m" es impar.

ESTUDIO DEL SEGUNDO CASO: $\frac{x^m - a^m}{x + a}$

Cálculo del resto:

1º $x + a = 0$

2º $x = -a$

3º $R = (-a)^m - a^m$

para que sea cero, m debe ser número par así:

$$R = a^m - a^m = 0$$

CONCLUSIÓN.- La forma:

$$\frac{x^m - a^m}{x - a}$$

es C.N. cuando "m" es un número par.

ESTUDIO DEL TERCER CASO: $\frac{x^m + a^m}{x - a}$

Cálculo del resto:

1º $x - a = 0$

2º $x = a$

3º $R = (a)^m + a^m = 2a^m \neq 0$

Como el resto es diferente de cero, no es C.N.

CONCLUSIÓN.- La forma:

$$\frac{x^m + a^m}{x - a}$$

no es cociente notable para ningún valor de "m".

ESTUDIO DEL CUARTO CASO: $\frac{x^m - a^m}{x - a}$

Cálculo del resto:

1º $x - a = 0$

2º $x = a$

3º $R = (a)^m - a^m = 0$

Como el resto es cero, sí es C.N.

CONCLUSIÓN.- La forma:

$$\frac{x^m - a^m}{x - a}$$

es cociente notable para cualquier valor de "m"

DESARROLLO DEL COCIENTE NOTABLE

Para desarrollar el C.N. se realiza la división por Ruffini, aplicado a un caso, pero se generaliza para los tres casos de cocientes notables con las reglas prácticas que se hará al final de la demostración.

Sea el C.N. $\frac{x^m + a^m}{x + a}$ para m = # impar

Dividiendo por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & +a^m \\
 & \downarrow & & & & & & \\
-a & & -a & +a^2 & -a^3 & & +a^{m-1} & -a^m \\
\hline
 & 1 & -a & +a^2 & -a^3 & \dots & +a^{m-1} & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

El cociente es de grado = m - 1

$$q(x) = -x^{m-1} - x^{m-2}a^1 + x^{m-3}a^2 - x^{m-4}a^3 + \dots + a^{m-1}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - x^{m-2}a^1 + x^{m-3}a^2 - x^{m-4}a^3 + \dots + a^{m-1}$$

REGLAS PRACTICAS PARA ESCRIBIR EL DESARROLLO DE CUALQUIER COCIENTE NOTABLE

1) El primer término del cociente es igual alcociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor.

2) El último término del cociente es igual al cociente entre el segundo término del dividendo y el segundo término del divisor.

3) A partir del segundo término del cociente el exponente de "x" comienza a disminuir de 1 en 1 hasta el valor cero.

4) También a partir del segundo término del cociente, aparece "a" con exponente "1" y en cada término posterior su exponente aumenta de 1 en 1 hasta "m - 1".

5) Para los signos de cada término se debe tener en cuenta:

   a) Cuando el divisor es de la forma (x + 1) los signos de los términos del cociente son alternados (+) y (-) comenzando por (+).

   b) Cuando el divisor es de la forma (x - a) los signos de los términos del cociente son positivos.

NOTA.- El dividendo en ambos casos (a y b) puede ser:

$(x^m + a^m)$ ó $(x^m - a^m)$

Ejemplos:

Desarrollar:

i) $\frac{x^5 + a^5}{x + a} = x^4 - x^3a + x^2a^2 - xa^3 + a^4$

ii) $\frac{x^6 - a^6}{x + a} = x^5 - x^4a + x^3a^2 - x^2a^3 + xa^4 - a^5$

iii) $\frac{x^8 - a^8}{x - a} = x^7 + x^6a + x^5a^2 + x^4a^3 + x^3a^4 + x^2a^5 + xa^6 + a^7$

iv) $\frac{x^{10} + a^{20}}{x^2 + a^4} = \frac{(x^2)^5 + (a^4)^5}{(x^2) + (a^4)} = (x^2)^4 - (x^2)^3(a^4)$

$+ (x^2)^2(a^4)^2 - (x^2)(a^4)^3 + (a^4)^4$

o, en forma inmediata:

$$\frac{x^{10} + a^{20}}{x^2 + a^4} = x^8 - x^6a^4 + x^4a^8 - x^2a^{12} + a^{16}$$

DETERMINACIÓN DE UN TÉRMINO CUALQUIERA DE UN COCIENTE NOTABLE

En forma general:

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} = x^{m-1} \mp x^{m-2}a^1 + x^{m-3}a^2 \mp x^{m-4}a^3 + x^{m-5}a^4 \ldots \pm a^{m-1}$$

DEDUCCIÓN DE LA FORMULA, para el término k.

1er. término: $(\text{signo})x^{m-1}a^{1-1}$

2do. término: $(\text{signo})x^{m-2}a^{2-1}$

3er. término: $(\text{signo})x^{m-3}a^{3-1}$

4to. término: $(\text{signo})x^{m-4}a^{4-1}$

.

.

.

10mo. término: $(\text{signo})x^{m-10}a^{10-1}$

.

.

kmo. término: $(\text{signo})x^{m-k}a^{k-1}$

$\therefore \quad t(k) = (\text{signo})x^{m-k}a^{k-1}$

REGLA PARA EL SIGNO

1) Cuando el divisor es de la forma (x - a) el signo de cualquier término es positivo.

2) Cuando el divisor es de la forma (x + a) el signo de los términos que ocupan un lugar par son negativos y los que ocupan lugar impar son positivos.

Ejemplo:

Hallar el t_{25} y t_{40} en el desarrollo del C.N.:

$$\frac{x^{150} - a^{100}}{x^3 + a^2}$$

Solución: Dando la forma de C.N.:

$$\frac{(x^3)^{50} - (a^2)^{50}}{(x^3) + (a^2)}$$

de donde:

1ra. base del divisor: (x^3)

2da. base del divisor: (a^2)

$m = 50$

Luego para k = 25:

$$t_{(25)} = +(x^3)^{50-25}\,(a^2)^{25-1}$$

$$t_{25} = +x^{75}a^{48}$$

Para k = 40:

$$t_{40} = -(x^3)^{50-40}\,(a^2)^{40-1}$$

$$t_{40} = -x^{30}a^{78}$$

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE EL COCIENTE:

$$\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q} \text{ SEA NOTABLE}$$

Establecidas las condiciones de divisibilidad, el cociente:

$$\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$$

será notable cuando:

$$\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q} = \frac{(x^p)^r \pm (a^q)^r}{x^p \pm a^q}$$

donde:

$$pr = m$$

$$\therefore \qquad r = \frac{m}{p} \qquad (\alpha)$$

$$qr = n$$

$$\therefore \qquad r = \frac{n}{q} \qquad (\beta)$$

Es decir, los cocientes entre $\frac{m}{p}$ y $\frac{n}{q}$, deben ser enteros e iguales.

NÚMERO DE TÉRMINOS DEL COCIENTE NOTABLE

De (α) y (β):

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \text{\# de términos del cociente notable.}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Simplificar:

$$E = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \ldots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + \frac{x^{n-1}}{a^{n+1}(a-x)}$$

Solución:

Sumando todos menos el último sumando:

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots + \frac{x^n}{a^{n+1}}$$

$$= \frac{a^n + a^{n-1}x + a^{n-2}x^2 + a^{n-3}x^3 + \ldots + x^n}{a^{n+1}}$$

escribiendo el numerador como C.N.:

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots + \frac{x^n}{a^{n+1}} = \frac{\dfrac{a^{n+1} - x^{n+1}}{a - x}}{a^{n+1}}$$

$$= \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)}$$

Sustituyendo en la expresión:

$$E = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)} + \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)} = \frac{a^{n+1} - x^{n+1} + x^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)}$$

simplificando:

$$E = \frac{a^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)} = \frac{1}{a - x} = (a - x)^{-1}$$

Rpta.: $E = (a - x)^{-1}$

2.- Hallar el término independiente del cociente:

$$\frac{(x + a)^n - a^n}{x}$$

Solución:

Dando la forma de C.N. y desarrollando:

$$\frac{(x + a)^n - a^n}{(x + a) - a} = (x + a)^{n-1} + (x + a)^{n-2}a^1 + (x + a)^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1}$$

El término independiente del C.N. es:

$$P(0) = \underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}a^1 + a^{n-3}.\ a^2 + \ldots + a^{n-1}}_{\text{“n términos”}}$$

$$= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1}}_{\text{“n veces”}}$$

$$\text{T.I.C.} = na^{n-1}$$

3.- Simplificar:

$$E = \frac{x^{78} + x^{76} + x^{74} + \ldots + x^4 + x^2 + 1}{x^{38} + x^{36} + x^{34} + \ldots + x^4 + x^2 + 1}$$

Solución:

Escribiendo el numerador y denominador como C.N.:

$$E = \frac{\dfrac{(x^2)^{40} - 1^{40}}{(x^2) - 1}}{\dfrac{(x^2)^{20} - 1^{20}}{(x^2) - 1}}$$

efectuando y simplificando:

$$E = \frac{x^{80} - 1}{x^{40} - 1} = \frac{(x^{40})^2 - 1^2}{x^{40} - 1}$$

$$E = \frac{(x^{40} + 1)\,(x^{40} - 1)^2}{(x^{40} - 1)} = x^{40} + 1$$

4.- Hallar el cociente y el resto en:

$$\frac{x^{34} + x^2 - 1}{x^{32} + x^{30} + x^{28} + \ldots + x^4 + x^2 + 1}$$

Solución:

Transformando el divisor a Cociente Notable:

$$\frac{\dfrac{x^{34}+x^2-1}{\dfrac{x^{34}-1}{x^2-1}}}{} = \frac{(x^{34}+x^2-1)(x^2-1)}{x^{34}-1}$$

$$= \frac{x^{36}+x^4-x^2-x^{34}-x^2+1}{x^{34}-1}$$

Dividiendo por el método normal:

$$\begin{array}{l|l} x^{36} - x^{34} + x^4 - 2x^2 + 1 & x^{34} - 1 \\ \cline{2-2} -x^{36} \qquad\qquad + x^2 & x^2 - 1 \\ \hline \quad - x^{34} + x^4 - x^2 + 1 & \\ \quad + x^{34} \qquad\quad - 1 & \\ \cline{1-1} \qquad + x^4 \; - \; x^2 & \end{array}$$

Como Resto verdadero = $\dfrac{\text{Resto Verdadero}}{x^2 - 1}$

$$= \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1} = x^2$$

Rpta.: El cociente es : $q(x) = x^2 - 1$

5.- Hallar (m + n) si el t (25) del desarrollo de:

$$\frac{x^{129m} - a^{86n}}{x^{3m} - a^{2n}}$$

es $x^{270}a^{288}$

Solución:

Cálculo de t(25):

Escribiendo la división como C.N.:

$$\frac{(x^{3m})^{43} - (a^{2n})^{43}}{(x^{3m}) - (a^{2n})}$$

$$t(25) = +\,(x^{3m})^{43-25}\,(a^{2n})^{25-1} = x^{54m}\,a^{48n} = x^{270}a^{288}$$

Por datos:

identificando los exponentes:

$$54m = 270 \quad \Rightarrow \quad m = 5$$

$$48n = 288 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

6.- Si los grados absolutos de todos los términos van disminuyendo de 3 en 3 y si además el t(40) de su desarrollo tiene grado absoluto (G.A.) = 87, hallar el número de términos siendo el C.N.:

$$\frac{x^{np} - a^p}{x^n - a}$$

Solución:

1) Cálculo del t(40):

$$t(40) = (x^n)^{p-40}\,(a)^{40-1}$$

Por dato:

$$G.A.t(40) = n(p - 40) + 39 = 87$$

$$n(p - 40) = 48 \qquad (\alpha)$$

2) Cálculo del t(41):

$$t(41) = (x^n)^{p-41}\,(a)^{41-1}$$

$$t(41) = (x^n)^{p-41}\,(a)^{40}$$

por ser término consecutivo, y los grados absolutos según el problema disminuyen de 3 en 3, se tiene:

$$G.A.t(41) = n(p - 41) + 40 = 84$$

$$n(p - 41) = 44 \qquad (\beta)$$

Dividiendo $(\alpha) : (\beta)$:

$$\frac{n(p-40)}{n(p-41)} = \frac{48}{44} = \frac{12}{11}$$

$\therefore \quad p = 52$

7.- Si el siguiente cociente:

$$\frac{x^{6n+3} + a^{6n-22}}{x^{\left(\frac{n-6}{2}\right)} + a^{\left(\frac{n-8}{2}\right)}}$$

es notable. Calcular:

a) El valor de n.

b) El número de términos.

c) El término 19.

Solución:

Si es C.N., por fórmula:

$$\frac{\frac{6n+3}{\frac{n-6}{2}}}{} = \frac{6n-22}{\frac{n-8}{2}} = \#\text{ de términos.}$$

a) Simplificando:

$$\frac{6n+3}{n-6} = \frac{6n-22}{n-8}$$

Multiplicando medios y extremos:

$$(6n+3)(n-8) = (6n-22)(n-6)$$

$$6n^2 - 48n + 3n - 24 = 6n^2 - 36n - 22n + 132$$

$$13n = 156$$

$\therefore \quad n = 12$

b) El número de términos es:

$$\# = \frac{6n+3}{\frac{n-6}{2}} = \frac{6(12)+3}{\frac{12-6}{2}} = \frac{75}{3} = 25$$

c) El cociente notable es:

$$\frac{x^{75} + a^{50}}{x^3 + a^2} = \frac{(x^3)^{25} + (a^2)^{25}}{(x^3) + (a^2)}$$

Por fórmula:

$$t_{19} = +(x^3)^{25-19}\,(a^2)^{19-1}$$

$$t_{19} = x^{18}a^{36}$$

8.- En el cociente notable:

$$\frac{x^a - y^b}{x^3 - y^7}$$

hay un término central, que es igual a:

$$x^c\,y^{231}$$

Hallar: $E = a + b + c$

Solución:

Si es cociente notable, llamando m al número de términos, se tiene:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = m \qquad (\alpha)$$

Luego, el k- ésimo término será:

$$t(k) = (x^3)^{m-k}\,(y^7)^{k-1}$$

si hay término central, entonces:

$$(x^3)^{m-k}(y^7)^{k-1} = x^c y^{231}$$

identificando exponentes:

$$3(m-k) = c \qquad (\beta)$$

$$7(k-1) = 231$$

$\therefore \quad k = 34$

El lugar del término central es 34, entonces habrá:

$$\underbrace{\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{33}\; 34 \;\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{33}}_{m\,=\,33\,+\,33\,+\,1\,=\,67\text{ términos}}$$

En (α) : $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = m = 67$

de aquí: $\frac{a}{b} = 67 \quad \Rightarrow \quad a = 201$

$\frac{b}{7} = 67 \quad \Rightarrow \quad b = 469$

En (β):

$3(67 - 34) = c \quad \Rightarrow \quad c = 99$

Luego, el valor pedido es:

$$E = 201 + 469 + 99 = 769$$

9.- Sabiendo que el t(5) del cociente notable:

$$\frac{a^{4^x} - b^{4^x}}{a^{5^y-9} - b^{5^y-9}}$$

es: $a^{176}b^{64}$. Calcular el número de términos.

Solución:

Desarrollando el Cociente Notable:

$$\frac{a^{4^x} - b^4}{a^{5^y-9} - b^{5^y-9}} = a^{4^x-(5^y-9)} + a^{4^x-2(5^y-9)}$$

$$.\,b^{5^y-9} + a^{4^x-3(5^y-9)}\,.\,b^{2(5^y-9)} + a^{4^x-4(5^y-9)}$$

$$.\,b^{3(5^y-9)} + a^{4^x-5(5^y-9)} + b^{4(5^y-9)} + \dots$$

Por dato:

$$t_{(5)} = a^{4^x - 5(5^y - 9)}\, b^{4(5^y - 9)} = a^{176}\, b^{64}$$

identificando exponentes de a:

$$4^x - 5(5^y - 9) = 176 \qquad (\alpha)$$

exponentes de b:

$$4(5^y - 9) = 64$$

$$5^y - 9 = 16$$

$$5^y = 5^2$$

de donde: $y = 2$

En (α): $4^x - 5(16) = 176$

$$4^x = 256 = 4^4$$

$\therefore \quad x = 4$

El número de términos es:

$$\frac{4^x}{5^y - 9} = \frac{4^4}{5^2 - 9} = \frac{256}{16} = 16$$

10.- Cuál es el lugar que ocupa un término en el sigueinte C.N.:

$$\frac{x^{350} - y^{140}}{x^5 - y^2}$$

contado a partir del primer término sabiendo que la diferencia del grado absoluto (G.A.) de éste con el G.A. del término que ocupa la misma posición contado a partir del extremo final es 9.

Solución:

a) Cálculo del t(k) contado a partir del extremo inicial:

$$T(k) = (x^5)^{70-k}\,(y^2)^{k-1}$$

$$G.A.t(k) = 5(70 - k) + 2(k - 1) = 348 - 3k$$

b) Cálculo del t(k) contado a partir del extremo final.

Sean los términos y sus respectivas posiciones.

$$\overbrace{1, 2, 3, 4, \ldots \quad \ldots\ldots, \underbrace{\overset{}{k}}_{\substack{\uparrow \\ (n - k + 1)}}, \underbrace{\ldots\ldots \ \ldots\ldots, \quad n}_{(n - k)}}^{\text{“n”}}$$

El t(k) contado a partir del extremo final ocupa la posición $n - k + 1$ contado a partir del extremo inicial. Luego:

$$t(n - k + 1) = t(70 - k + 1) = t(71 - k)$$

$$= (x^5)^{70-(71-k)}\,(y^2)^{71-k-1}$$

$$t(71 - k) = (x^5)^{k-1}\,(y^2)^{70-k}$$

G.A. :

$$t(71 - k) = 5(k - 1) + 2(70 - k) = 3K + 135$$

Por la condición del problema:

$$(348 - 3k) - (3k + 135) = 9$$

de donde: $k = 34$

El término ocupa el lugar 34.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si la expresión es un cociente notable:

$$\frac{x^{2(4m+1)} - y^{5m}}{x^{m-1} + y^{m-3}}$$

hallar el valor de "m":

a) 3 b) 6 c) 8

d) 5 e) N.A.

2. En el desarrollo del cociente:

$$\frac{x^{120} - y^{30}}{x^4 - y}$$

un término que ocupa el lugar k supera en grado absoluto en 30 unidades el grado absoluto del término que ocupa el lugar k - 1 contado a partir de la derecha. Hallar k.

a) 8 b) 9 c) 10

d) 11 e) 12

3. ¿Qué relación debe cumplirse entre los valores a y b de tal manera que la expresión:

$$\frac{x^{a+b}y^{ab} - y^{a^3+b^3+ab}}{(xy)^{ab} - y^{a^2+b^2}}$$

sea cociente notable?

a) ab = -1 b) a + b = 1 c) a + b = -1

d) ab = 1 e) a = b

4. En el siguiente cociente:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^{3^m-1} - y^{3^m-1}}$$

tiene como segundo término $x^{16}y^8$. Hallar el número de términos.

a) 5 b) 7 c) 4

d) 6 e) 9

5. En el desarrollo de:

$$\frac{x^{371} - y^{212}}{x^7 - y^4}$$

un término que ocupa la posición "r" contando a partir del extremo, supera en G.A. en 12 unidades al término que ocupa la posición (r - 2) contado a partir del primer término. Hallar el G.A. del t(r + 7).

a) 250 b) 244 c) 254

d) 256 e) 260

6. Hallar m y n sabiendo que el término tercero del desarrollo de:

$$\frac{x^{4n+3} + y^{3(2m-1)}}{x^m + y^n}$$

es igual a $x^{14}y^{16}$

a) n = 7, m = 4 b) n = 7, m = 8 c) n = 8, m = 7

d) n = 1, m = 3 e) Ninguno

7. Siendo "n" un número natural, calcular el lugar que ocupa el término de grado 135 en el siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{2n^2-3} - y^{2n^2+22}}{x^{n-3} + y^{n-2}}$$

a) 16 b) 17 c) 18

d) 19 e) 20

8. Simplificar:

$$L = \frac{\dfrac{1}{a-x} + \dfrac{x}{(a-x)^2} + \dfrac{x^2}{(a-x)^3} + \ldots + \dfrac{x^n}{(a-x)^{n+1}}}{\dfrac{1}{a-x} - \dfrac{x}{(a-x)^2} + \dfrac{x^2}{(a-x)^3} - \ldots - \dfrac{x^n}{(a-x)^{n+1}}}$$

siendo: "a" diferente de x"

"n" es número impar.

a) a b) a - x c) a + x

d) $\frac{a}{a - 2x}$ e) $\frac{x}{a - x}$

9. Siendo n un número impar, calcular el cuadrado del término central del siguiente desarrollo considerado como C.N.:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(p+q)^n - (p-q)^n}{q}\right]$$

a) $(p + q)^{n-1} . (p - q)^n$ b) $(p + q)^{n-1} . (p - q)^{n+1}$

c) $(p + q)^n . (p - q)^{n-1}$ d) $(p^2 - q^2)^n$

e) $(p^2 - q^2)^{n-1}$

10. Calcular el término idéntico de los desarrollos de:

$$\frac{x^{75} - y^{100}}{x^3 - y^4} \qquad \frac{x^{102} - y^{68}}{x^3 - y^2}$$

a) $x^{10}y^{12}$ b) $x^{40}y^{25}$ c) $x^{45}y^{36}$

d) $x^{20}y^{40}$ e) $x^{12}y^{13}$

11. Sabiendo que $(x - a)^2 = A$ y $x^2 - b = B$, cuánto términos en función de A y B tiene el cociente:

$$\frac{(x-a)^{32} - (x^2-b)^{16}}{x^2 - 2ax + b}$$

a) 15 b) 14 c) 32

d) 16 e) 10

12. Hallar el coeficiente de x^2y^2 en el cociente:

$$\frac{(x^2 + xy + y^2)^3 + (x^2 - xy + y^2)^3}{2(x^2 + y^2)}$$

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

13. Cuántos términos tiene el siguiente producto:

$$(x^{n+5} + x^{n+4} + x^{n+3} + \ldots + x^7 + x^6)$$
$$(2x^8 - 5x^7 + 8x^6 - 5x^5)$$

a) 1 b) 2 c) 3

d) 6 e) 4

14. Hallar el término entero del desarrollo del cociente notable:

$$\frac{16\sqrt[3]{4} - 8\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{2}}$$

a) 512 b) 256 c) 1 024

d) 2 048 e) 4096

15. Calcular la suma de todos los valores de "n" si el cociente:

$$\frac{x^n - x^{-2n}}{x - x^{-2}}$$

debe tener 20 términos enteros.

a) 58 b) 61 c) 60

d) 119 e) 121

16. En el desarrollo de un cociente notable se obtuvieron dos términos consecutivos:

$$\ldots - x^{18}y^{27} + x^{16}y^{30} - \ldots$$

hallar el dividendo del cociente notable.

a) $x^{40} + y^{60}$ b) $x^{40} - y^{60}$

c) $x^{20} - y^{30}$ d) $x^{20} - y^{30}$

e) $x^{30} + y^{45}$

17. Encontrar el número de términos del desarrollo de:

$$\frac{x^a - y^a}{\sqrt[b]{x} - \sqrt[b]{y}}$$

donde a y b son número enteros.

a) a - b b) ab c) a - b - 1

d) ab - 1 e) a - b + 1

18. Hallar el primer término del cociente notable:

$$\frac{(a + b + c)^4 - (a + b - c)^4}{c}$$

a) $2(a + b - c)^3$ b) $2(a - b + c)^3$

c) $2(a - b - c)^3$ d) $2(a + b + c)^3$

e) $2(a - b - c)^3$

19. Hallar el número de términos del C.N.:

$$\frac{x^p - y^{507}}{x^3 - y^p}$$

a) p - 3 b) 507 - p c) 36

d) 13 e) 468

20. Hallar α + β en la identidad:

$$4xy[(x + y)^6 - (x^2 - y^2)^2(x + y)^2 + (x^2 - y^2)^2(x + y)^2 - (x + y)^6] = (x + y)^\alpha - (x + y)^\beta$$

a) 4 b) 6 c) 8

d) 14 e) 16

CLAVE DE RESPUESTAS

1) B	2) D	3) D	4) A	5) D
6) A	7) A	8) D	9) E	10) C
11) D	12) E	13) D	14) A	15) D
16) B	17) C	18) D	19) C	20) E

FACTORIZACIÓN

DEFINICIÓN.-

Es la operación que tiene por finalidad transformar una expresión algebraica racional y entera en otra equivalente, que sea igual al producto de sus factores primos racionales y enteros. En general, factorizar significa convertir una suma algebraica en un producto de factores.

MÉTODOS PARA FACTORIZAR

(A) FACTOR COMÚN

De dos o más expresiones algebraicas, es la parte numérica y/o literal que esté repetida en dichas expresiones. El factor común puede ser de tres tipos:

1) Factor común monomio
2) Factor común polinomio
3) Factor común por agrupación

A.1) FACTOR COMÚN MONOMIO.

Cuando el factor común a todos los términos del polinomio es un monomio.

Ejemplo: Factorizar:

$$72x^{2a}y^b + 48x^{a+1}y^{b+1} + 24x^ay^{2b}$$

El factor común es $24x^ay^b$, de esta manera:

$$72x^{2a}y^b + 48x^{a+1}y^{b+1} + 24x^ay^{2b} = 24x^ay^b\ (3x^a + 2xy + y^b)$$

Explicación.- Para sacar el factor común monomio: en primer lugar se saca el coeficiente común (24), a continuación, se saca las letras comunes afectadas por los menores exponentes (x^ay^b), luego se divide cada término del polinomio entre el factor común monomio y los resultados se escribe dentro del paréntesis.

A.2) FACTOR COMÚN POLINOMIO.

Cuando el factor común que aparece es un polinomio.

Ejemplo: Factorizar:

$$(a + 1)^7 (a^2 + 1)^{10} - (a + 1)^5 (a^2 + 1)^{11}$$

El factor común es $(a + 1)^5(a^2 + 1)^{10}$, así:

$$(a + 1)^7 (a^2 + 1)^{10} - (a + 1)^5 (a^2 + 1)^{11}$$

$$= (a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10} [(a + 1)^2 - (a^2 + 1)]$$

efectuando:

$$= (a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10} [a^2 + 2a + 1 - a^2 - 1]$$

$$= (a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10} (2a)$$

Luego:

$$(a + 1)^7 (a^2 + 1)10 - (a + 1)^5 (a^2 + 1)^{11}$$

$$= 2a(a + 1)^5 (a^2 + 1)^{10}$$

A.3) FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN.

Cuando no hay un factor común a todos los términos del polinomio.

Ejemplo: Factorizar

$$x^{m+n} + y^{m+n} + (xy)^m + (xy)^n$$

Efectuando operaciones:

$$x^m x^n + y^m y^n + x^m y^m + x^n y^n$$

No hay factor monomio ni polinomio, por lo tanto se agrupa términos de 2 en 2:

$$(x^m x^n + x^m y^m) + (y^m y^n + x^n y^n)$$

sacando factores comunes en cada paréntesis:

$$x^m(x^n + y^m) + y^n (y^m + x^n)$$

sacando el factor común binomio:

$$(x^n + y^m)(x^m + y^n)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$E = (x+3)(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1) + (x+1)$$

Solución:

Extrayendo factor común (x + 1)

$$E = (x + 1)[(x + 3)(x + 2) + (x + 2) + 1]$$

efectuando:

$$E = (x + 1)[x^2 + 5x + 6 + x + 2 + 1]$$

$$E = (x + 1)(x^2 + 6x + 9)$$

$$E = (x + 1)(x + 3)^2$$

2.- Factorizar:

$$E = (x + y)^9 (x - y)^5 - (x^2 - y^2)^7$$

Solución:

Transformemos previamente:

$$(x^2 - y^2)^7 = [(x + y)(x - y)]^7 = (x + y)^7 (x - y)^7$$

De este modo:

$$E = (x + y)^9 (x - y)^5 - (x + y)^7 (x - y)^7$$

extrayendo factor común $(x + y)^7 (x - y)^5$:

$$E = (x + y)^7 (x - y)^5 [(x + y)^2 - (x - y)^2]$$

efectuando por Legendre:

$$E = (x + y)^7 (x - y)^5 [4(x . y)]$$

finalmente:

$$E = 4xy(x + y)^7 (x - y)^5$$

3.- Factorizar:

$$E = (x + 1)^4 + (x + 2)^3 + (x + 3)^2 - 7(x + 2) + 2$$

Solución:

Haciendo x + 1 = a, se obtiene:

$$E = a^4 + (a + 1)^3 + (a + 2)^2 - 7(a + 1) + 2$$

operando:

$$E = a^4 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a^2 + 4a + 4 - 7a - 7 + 2$$

simplificando:

$$E = a^4 + a^3 + 4a^2$$

factorizando:

$$E = a^2(a^2 + a + 4)$$

reponiendo el valor de a:

$$E = (x + 1)^2 [(x + 2)^2 + (x + 1) + 4]$$

efectuando:

$$E = (x + 1)^2 [x^2 + 2x + 1 + x + 1 + 4]$$

$$E = (x + 1)^2 (x^2 + 3x + 6)$$

4.- Factorizar:

$$E = x^y y^x + xy + x^{y+1} + y^{x+1}$$

Solución:

Agrupando en forma adecuada:

$$E = (x^y y^x + x^{y+1}) + (y^{x+1} + xy)$$

extrayendo factor común en cada agrupación:

$$E = x^y(y^x + x) + y(y^x + x)$$

el paréntesis es un factor común, luego:

$$E = (y^x + x)(x^y + y)$$

5.- Factorizar:

$$E = \underbrace{x^6y} + \underline{x^4z^3} - \underline{\underline{x^6z}} + \overbrace{y^6z} - \overbrace{x^4y^2z} - \underbrace{x^2y^5}$$
$$- \underline{y^4z^3} + \underline{\underline{x^2y^4z}}$$

Solución:

Agrupemos los que tienen igual señal y extraigamos factores comúnes:

$$E = x^2y(x^4 - y^4) + z^3(x^4 - y^4) - x^2z(x^4 - y^4)$$
$$- y^2z(x^4 - y^4)$$

extrayendo factor común al polinomio:

$$E = (x^4 - y^4)(x^2y + z^3 - x^2z - y^2z)$$

agrupando al interior del segundo paréntesis:

$$E = (x^4 - y^4)[x^2(y - z) - z(y^2 - z^2)]$$

$$E = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)[x^2(y - z) - z(y + z)(y - z)]$$

finalmente:

$$E = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(y - z)(x^2 - zy - z^2)$$

6.- Factorizar:

$$E = (a + b + c)(ab + ac + bc) - abc$$

Solución:

Agrupemos covenientemente:

$$E = [(a + b) + c]\ [c(a + b) + ab] - abc$$

$$E = c(a + b)^2 + abc + c^2(a + b) + ab(a + b) - abc$$

$$E = c(a + b)^2 + c^2(a + b) + ab(a + b)$$

factorizando:

$$E = (a + b)(ac + bc + c^2 + ab)$$

agrupando nuevamente:

$$E = (a + b)\ [c(a + c) + b(a + c)]$$

factorizando dentro del corchete:

$$E = (a + b)(a + c)(b + c)$$

7.- Factorizar:

$$E = 1 + xy + a(x + y) - (xy + 1)a - x - y$$

Solución:

Agrupando:

$$E = [(1 + xy) - (1 + xy)a] + [a(x + y) - (x + y)]$$

extrayendo factor común en cada corchete:

$$E = (1 + xy)\ (1 - a) - (x + y)(1 - a)$$

factorizando (1 - a):

$$E = (1 - a)(1 + xy - x - y)$$

$$E = (1 - a)[(1 - x) - (y - xy)]$$

$$E = (1 - a)[(1 - x) - y(1 - x)]$$

finalmente:

$$E = (1 - a)(1 - x)(1 - y)$$

8.- Factorizar:

$$(z - x - y)(2a - b) - (x + y - z)(a + 2b)$$

Solución:

Se observa que un factor tiene signo diferente que el otro, factorizando el signo:

$$(z - x - y)(2a - b) - [-(z - x - y)]\ (a + 2b)$$

efectuando los signos y quitando corchetes:

$$(z - x - y)(2a - b) + (z - x - y)(a + 2b)$$

factorizando:

$$(z - x - y)(2a - b + a + 2b)$$

$$(z - x - y)(3a + b)$$

9.- Factorizar:

$$E = bd(a^2 + c^2) + bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)$$
$$+ ac(b^2 + d^2)$$

Solución:

Efectuando operaciones:

$$E = a^2bd + \underline{\underline{bc^2d}} + a^2bc + \underline{\underline{bcd^2}} + \underbrace{ab^2d}$$
$$+ \underline{ac^2d} + \underbrace{ab^2c} + \underline{acd^2}$$

Factorizando por pares, como se indica:

$E = a^2b(d+c) + bcd(c+d) + ab^2(d+c) + acd(c+d)$

extrayendo factor común:

$E = (d + c)\,(a^2 + bcd + ab^2 + acd)$

factorizando por pares:

$E = (d + c)\,[ab(a + b) + cd(b + a)]$

factorizando (a + b):

$E = (d + c)(a + b)(ab + cd)$

$E = (a + b)(c + d)(ab + cd)$

10.- Factorizar:

$E = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

Solución:

Agrupando:

$E = [(a + b) + c]^3 - a^3 - b^3 - c^3$

Efectuando el corchete:

$E =(a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2$
$+ c^3 - a^3 - b^3 - c^3$

efectuando:

$E = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2$
$+ c^3 - a^3 - b^3 - c^3$

reduciendo:

$E = 3ab(a + b) + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2$

factorizando:

$E = 3(a + b)\,[ab + c(a + b) + c^2)]$

efectuando:

$E = 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2)$

factorizando por pares:

$E = 3(a + b)\,[a(b + c) + c(b + c)]$

factorizando (b + c):

$E = 3(a + b)(b + c)(a + c)$

(B) MÉTODO DE IDENTIDADES

B.1) DIFERENCIA DE CUADRADOS.

Es una diferencia de dos cuadrados perfectos. Para factorizar, se extrae la raíz cuadrada de los cuadrados perfectos y se forma un producto de la suma de las raíces multiplicada por la diferencia de ellas. En general:

$$a^{2m} - b^{2n} = (a^m + b^n)\,(a^m - b^n)$$

B.2) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.

Se caracteriza por:

1) Tener 2 términos que son cuadrados perfectos.
2) El otro término es el doble producto de las raíces cuadradas de los cuadrados perfectos.
3) Los cuadrados perfectos siempre deben tener signo positivo.

El trinomio de estos caracteres se reduce a un binomio al cuadrado así:

$$a^{2m} \pm 2a^mb^n + b^{2n} = (a^m \pm b^n)^2$$

B.3) SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS.

Se caracterizan por tener 2 cubos perfectos. Para factorizar se recuerda el producto notable, así:

$$a^{3m} + b^{3n} = (a^m + b^n)(a^{2m} - a^mb^n + b^{2n})$$

$$a^{3m} - b^{3n} = (a^m - b^n)(a^{2m} + a^mb^n + b^{2n})$$

EJERCICIO RESUELTOS

1.- Factorizar:

$E = x^4 + y^4 + 2xy(x^2 + y^2) + 3x^2y^2$

Solución:

Se puede reescribir como:

$E = (x^4 + y^4 + 2x^2y^2) + 2xy(x^2 + y^2) + x^2y^2$

factorizando el trinomio cuadrado perfecto:

$E = (x^2+y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(xy) + (xy)^2$

toda la expresión es un trinomio cuadrado perfecto, así:

$$E = [(x^2 + y^2) + xy]^2$$

$$E = (x^2 + xy + y^2)^2$$

2.- Factorizar:

$$E = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 1$$

Solución:

Descomponiendo $-3x^4$, así:

$$-3x^4 = x^4 - 4x^4$$

y, reemplazando se obtiene:

$$E = x^6 + 2x^5 + x^4 - 4x^4 + 4x^2 - 1$$

agrupando:

$$E = (x^6 + 2x^5 + x^4) - (4x^4 - 4x^2 + 1)$$

factorizando los trinomios cuadrados perfectos:

$$E = (x^3 + x^2)^2 - (2x^2 - 1)^2$$

ésta es una diferencia de cuadrados, luego:

$$E = (x^3 + x^2 + 2x^2 - 1)\ (x^3 + x^2 - 2x^2 + 1)$$

finalmente:

$$E = (x^3 + 3x^2 - 1)\ (x^3 - x^2 + 1)$$

3.- Factorizar:

$$E = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab + cd)^2$$

Solución:

Es una diferencia de cuadrados, luego se transforma en el producto de una suma por una diferencia:

$$E = [(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2(ab + cd)]$$
$$[(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 2(ab + cd)]$$

reordenando los términos dentro de cada corchete:

$$E = [(a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2)]$$
$$[(a^2 - 2ab + b^2) - (c^2 + 2cd + d^2)]$$

reduciendo los trinomios cuadrados perfectos:

$$E = [(a + b)^2 - (c - d)^2][(a - b)^2 - (c + d)^2]$$

factorizando las diferencias de cuadrados:

$$E = [(a + b) + (c - d)][(a + b) - (c - d)]$$
$$[(a - b) + (c + d)][(a - b) - (c + d)]$$

$$E = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a-b-c-d)$$

4.- Factorizar:

$$E = (a + b)^7 + c^3(a + b)^4 - c^4(a + b)^3 - c^7$$

Solución:

Haciendo $(a + b) = x$:

$$E = x^7 + c^3x^4 - c^4x^3 - c^7$$

agrupando por parejas:

$$E = x^4(x^3 + c^3) - c^4(x^3 + c^3)$$

factorizando $(x^3 + c^3)$:

$$E = (x^3 + c^3)\ (x^4 - c^4)$$

desarrollando cada paréntesis:

$$E = (x + c)\ (x^2 - xc + c^2)(x^2 + c^2)\ (x + c)(x - c)$$

reponiendo el valor de x:

$$E = (a+b+c)\ [(a+b)^2 - (a+b)c+c^2][(a+b)^2 + c^2]$$
$$(a + b + c)(a + b - c)$$

$$E = (a + b + c)^2\ (a + b - c)\ [(a + b)^2 + c^2][(a + b)^2 - (a + b)c + c^2]$$

5.- Factorizar:

$$E = (x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1$$

Solución:

Factorizando el signo en el paréntesis:

$$E = (x + y)^3 + 3xy[-(x + y - 1)] - 1$$

quitando el corchete:

$$E = (x + y)^3 - 3xy(x + y - 1) - 1$$

agrupando:

$$E = [(x + y)^3 - 1] - 3xy(x + y - 1)$$

factorizando la diferencia de cubos en el corchete y luego desarrollando:

$$E = [(x + y) - 1][(x + y)^2 + (x + y) + 1] - 3xy(x + y - 1)$$

$$E = (x + y - 1)(x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1 - 3xy)$$

$$E = (x + y - 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1)$$

6.- Factorizar:

$$E = (z^2 - y^2)^2(x^2 - a^2) + 4x^2y^2z^2$$

Solución:

Efectuando el cuadrado indicado:

$$E = (z^4 - 2z^2y^2 + y^4)(x^2 - a^2) + 4x^2y^2z^2$$

$$E = z^4x^2 - 2x^2y^2z^2 + x^2y^4 - a^2z^4 + 2a^2y^2z^2 - a^2y^4 + 4x^2y^2z^2$$

reduciendo y agrupando:

$$E = (z^4x^2 + 2x^2y^2z^2 + x^2y^4) - (a^2z^4 - 2a^2y^2z^2 + a^2y^4)$$

cada paréntesis es un cuadrado perfecto, que es igual a:

$$E = (z^2x + xy^2)^2 - (az^2 - ay^2)^2$$

Es una diferencia de cuadrados que se puede escribir así:

$$E = (z^2x + xy^2 + az^2 - ay^2)(z^2x + xy^2 - az^2 + ay^2)$$

7.- Factorizar:

$$E = 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^4$$

Solución:

Sumando y restando $(x^2+y^2+z^2)^2$:

$$E = 2(x^4 + y^4 + z^4) - 2(x^2 + y^2 + z^2)^2 + [(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z)^4]$$

El corchete es el desarrollo de un binomio al cuadrado, luego:

$$E = 2(x^4 + y^4 + z^4) - 2(x^2 + y^2 + z^2)^2 + [(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2]^2$$

factorizando 2 y efectuando el segundo paréntesis fuera y dentro del corchete:

$$E = 2(x^4 + y^4 + z^4 - x^4 - y^4 - z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2) + [x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2xz - 2yz]^2$$

reduciendo:

$$E = -4(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + 4[xy + xz + yz]^2$$

nótese que el signo en el corchete se elimina debido al cuadrado. Factorizando 4:

$$E = 4[(xy + xz + yz)^2 - (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)]$$

efectuando:

$$E = 4[x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2x^2yx + 2xy^2z + 2xyz^2 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2]$$

reduciendo:

$$E = 4[2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2]$$

factorizando, finalmente:

$$E = 8xyz(x + y + z)$$

8.- Factorizar:

$$E = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^6$$

Solución:

Factorizando la diferencia de cuadrados:

$$E = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + x^3)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - x^3)$$

reduciendo y agrupando convenientemente:

$$E = [(x^6 + 2x^3 + 1) + (x^5 + x^2) + (x^4 + x)][(x^6 + x^5 + x^4) + (x^2 + x + 1)]$$

factorizando sucesivamente:

$$E = [(x^3 + 1)^2 + x^2(x^3 + 1) + x(x^3 + 1)]$$
$$[x^4(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)]$$

$$E = (x^3 + 1)(x^3 + 1 + x^2 + x)(x^2 + x + 1)(x^4 + 1)$$

$$E = (x + 1)(x^2 - x + 1)[x(x^2 + 1) + (x^2 + 1)]$$
$$(x^2 + x + 1)(x^4 + 1)$$

$$E = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$$
$$(x^4 + 1)$$

$$E = (x + 1)^2(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + 1)$$

9.- Factorizar:

$$E = ab^2c^4 - a^4b^2c + a^2b^4c - a^2bc^4 + a^4bc^2 - ab^4c^2$$

Solución:

Agrupando y factorizando por parejas:

$$E = ab^2c^2(c^2 - b^2) + a^4bc(c - b) - a^2bc(c^3 - b^3)$$

descomponiendo en sus factores, diferencia de cuadrados y diferencia de cubos:

$$E = ab^2c^2(c + b)(c - b) + a^4bc(c - b)$$
$$- a^2bc(c - b)(c^2 + cb + b^2)$$

factorizando:

$$E = abc(c - b)(\underline{bc^2} + \underline{\underline{b^2c}} + \underline{\underline{\underline{a^3}}} - \underline{ac^2} - \underline{\underline{acb}} - \underline{\underline{\underline{ab^2}}})$$

agrupando por parejas en la forma señalada:

$$E = abc(c - b)[c^2(b - a) + bc(b - a) - a(b + a)(b - a)]$$

factorizando (b - a) en el corchete:

$$E = abc(c - b)(b - a)(c^2 + bc - ab - a^2)$$

agrupando y factorizando en el tercer paréntesis:

$$E = abc(c - b)(b - a)\ [(c + a)(c - a) + b(c - a)]$$

finalmente:

$$E = abc(c - b)(b - a)(c - a)(a + b + c)$$

10.- Factorizar :

$$E = x^3(x^3 + 2y^2 - x) + y(y^3 - 2x^2 - y)$$

Solución:

Efectuando:

$$E = x^6 + 2x^3y^2 - x^4 + y^4 - 2x^2y - y^2$$

efectuando:

$$E = (x^6 + 2x^3y^2 + y^4) - (x^4 + 2x^2y + y^2)$$

los paréntesis son desarrollos de binomios al cuadrado:

$$E = (x^3 + y^2)^2 - (x^2 + y)^2$$

factorizando; finalmente:

$$E = (x^3 + y^2 + x^2 + y)(x^3 + y^2 - x^2 - y)$$

(C) MÉTODO DEL ASPA

C.1) ASPA SIMPLE.

Se utiliza para factores trinomios de la forma:

$$ax^{2n} \pm bx^n \pm c$$

o de la forma: $x^{2n} \pm bx^n \pm c$

Para factorizar, se descompone en dos factores los términos ax^{2n} o x^{2n}, según sea el caso. Se coloca estos factores en las puntas de la izquierda del aspa. El término independiente, incluyendo el signo, también se descompone en dos factores,los cuales se coloca en las puntas de la derecha del aspa. El término central del trinomio debe ser igual a la suma de los porductos del aspa. Por último los factores de la nueva expresión son las sumas en forma horizontal de los extremos del aspa.

Ejemplo: Factorizar:

$$x^{4n} + 7x^{2n} + 12$$

a) x^{4n} se descompone en dos factores:

$$x^{2n} \ .\ x^{2n}$$

b) 12 tambien se descompone en dos factores:

$$4 \ .\ 3$$

Se pone estos factores en los extremos izquierdo y derecho del aspa respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} x^{2n} & & +4 \\ & \times & \\ x^{2n} & & +3 \end{array}$$

c) La suma de los productos:

$$3x^{2n} + 4x^{2n} = 7x^{2n}$$

es igual al término central.

Nótese que la expresión factorizada es el producto de la suma, tomada horizontalmente, así:

$$x^{4n} + 7x^{2n} + 12 = (x^{2n} + 4)\ (x^{2n} + 3)$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{x^{2n} \qquad\qquad +4} \\ \times \\ \boxed{x^{2n} \qquad\qquad +3} \end{array}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$E = 64x^{12}y^3 - 68x^8y^7 + 4x^4y^{11}$$

Solución:

Extrayendo factor común: $4x^4y^3$:

$$E = 4x^4y^3(16x^8 - 17x^4y^4 + y^8)$$

aplicando aspa simple al paréntesis, donde:

$$16x^8 = (16x^4)(x^4) \qquad y^8 = (-y^4)(-y^4)$$

$$\begin{array}{ccc} 16x^4 & & -y^4 \\ & \times & \\ x^4 & & -y^4 \end{array}$$

La expresión propuesta factorizada será:

$$E = 4x^4y^3(16x^4 - y^4)(x^4 - y^4)$$

factorizando las diferencias de cuadrados en forma sucesiva:

$$E = 4x^4y^3(4x^2 + y^2)(2x + y)\ (2x - y)$$
$$(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

2.- Factorizar:

$$E = (5x + 4y)^3 + (10x + 8y)^2 + 15x + 12y$$

Solución:

Extrayendo factor común 2 en el segundo paréntesis y 3 en los dos últimos sumandos:

$$E = (5x + 4y)^3 + [2(5x + 4y)]^2 + 3(5x + 12y)$$

haciendo $5x + 4y = a$, se obtiene:

$$E = a^3 + 4a^2 + 3a$$

extrayendo factor común “a” y aplicando aspa el paréntesis:

$$E = a(a^2 + 4a + 3)$$

$$\begin{array}{ccc} a & & -3 \\ & \times & \\ a & & +1 \end{array}$$

La expresión será:

$$E = a(a + 3)(a + 1)$$

reemplazando el valor de a:

$$E = (5x + 4y)(5x + 4y + 3)(5x + 4y + 1)$$

3.- Factorizar:

$$E = 2^{2m+5} - 3 \,.\, 2^{m+2} - 35$$

Solución:

La expresión se puede escribir como:

$$E = 2^{2m} \,.\, 2^5 - 3 \,.\, 2^m \,.\, 2^2 - 35$$

$$E = 32 \,.(2^m)^2 - 12 \,.\, (2^m) - 35$$

haciendo: $2^m = a$:

$$E = 32a^2 - 12a - 35$$

aplicando aspa:

$$32a^2 = (8a)\,.\,(4a) \qquad\qquad -35 = (+7)(-5)$$

$$\begin{array}{ccc} 8a & & +7 \\ & & \\ 4a & & -5 \end{array}$$

La expresión será:

$$E = (8a + 7)(4a - 5)$$

reemplazando "a" por su valor:

$$E = (2^3\,.\,2^m + 7)(2^2\,.\,2^m - 5)$$

finalmente:

$$E = (2^{m+3} + 7)\,(2^{m+2} - 5)$$

4.- Factorizar:

$$abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc$$

Solución:

Aplicando aspa simple, donde:

$$abcx^2 = (abx)(cx) \qquad\qquad abc = (-c)(-ab)$$

$$\begin{array}{ccc} abx & & -c \\ & & \\ cx & & -ab \end{array}$$

Luego la expresión factorizada es:

$$E = (abx - c)(cx - ab)$$

5.- Factorizar:

$$E = (a + d)^4 - 2(b^2 + c^2)(a + d)^2 + (b^2 - c^2)^2$$

Solución:

Haciendo $(a + d)^2 = x$, y desarrolando el tercer término

$$(b^2 - c^2)^2 = [(b + c)\,(b - c)]^2 = (b + c)^2\,(b - c)^2$$

se obtiene:

$$E = x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b + c)^2\,(b - c)^2$$

Aplicando aspa simple, donde:

$$x^2 = (x)(x)$$

$$(b + c)^2(b - c)^2 = [-(b + c)^2]\,[-(b - c)^2]$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -(b + c)^2 \\ & & \\ x & & -(b - c)^2 \end{array}$$

Comprobación para el término central:

$$-(b - c)^2x - (b + c)^2x = -[(b + c)^2 + (b - c)^2]x$$
$$= -2(b^2 + c^2)x$$

por lo tanto:

$$E = [x - (b + c)^2]\,[x - (b - c)^2]$$

reemplazando el valor de x:

$$E = [(a + d)^2 - (b + c)^2]\,[(a + d)^2 - (b - c)^2]$$

factorizando la diferencia de cuadrados:

$$E = [(a + d) + (b + c)][(a + d) - (b + c)][(a + d) + (b - c)][(a + d) - (b - c)]$$

finalmente:

$$E = (a + d + b + c)(a + d - b - c)(a + d + b - c)(a + d - b + c)$$

C.2) ASPA DOBLE.

Se aplica para factorizar polinomios de la forma:

$$ax^{2n} \pm bx^ny^n \pm cy^{2n} \pm dx^n \pm ey^n \pm f$$

y también para algunos polinomios de 4° grado.

PROCEDIMIENTO:

Primero se ordena convenientemente; es decir, en forma decreciente para una de las variables, luego se traza y ejecuta un aspa simple para los tres primeros términos con rayas continuas o llenas. A continuación, y pegada a este aspa, se traza otra

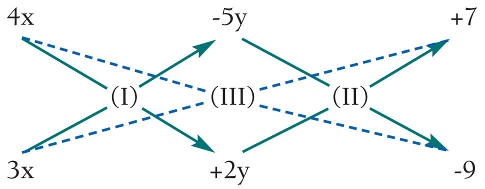
de tal modo que el producto de los elementos del extremo derecho de este aspa–multiplicados verticalmente sea el término independiente.

Finalmente: primer factor es la suma de los elementos tomados horizontalmente de la parte superior; el segundo factor es la suma de los elementos tomados horizontalmente de la parte inferior.

Ejemplo:

Factorizar:

$$12x^2 - 7xy - 10y^2 + 59y - 15x - 63$$



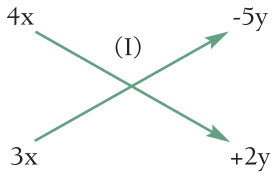
verificando los términos:

(I)	(II)	(III)
$8xy +$	$45y +$	$-36x$
$-15xy$	$14y$	$+21x$
$-7xy$	$59y$	$-15x$

EXPLICACIÓN:

1) A los 3 primeros términos se les aplica un aspa simple (I) :

$$12x^2 - 7xy - 10y^2$$

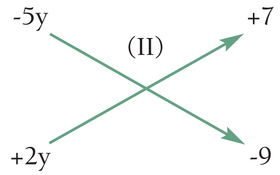


se verifica (I):

$$\begin{array}{r} 8xy \\ -15xy \\ \hline -7xy \end{array}$$

2) A los términos 3°, 4° y 6°, se les aplica un aspa simple (II):

$$-10y^2 + 59y - 63$$

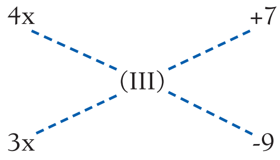


se verifica (II):

$$\begin{array}{r} 45y \\ +14y \\ \hline 59y \end{array}$$

3) A los términos 1°, 5° y 6° se les aplica un aspa simple (III):

$$12x^2 - 15x - 63$$



se verifica (III):

$$\begin{array}{r} -36x \\ +21x \\ \hline -15x \end{array}$$

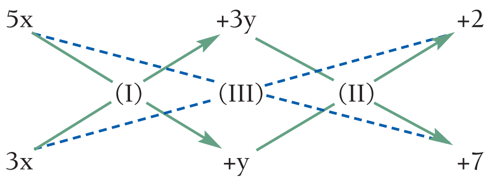
Luego la expresión factorizada es:

$$(4x - 5y + 7)(3x + 2y - 9)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$15x^2 + 14xy + 3y^2 + 23y + 41x + 14$$



Verificando los términos:

(I)	(II)	(III)
$5xy +$	$21y +$	$35x +$
$9xy$	$2y$	$6x$
$14xy$	$23y$	$41x$

La expresión factorizada es:

$$(5x + 3y + 2)(3x + y + 7)$$

2.- Factorizar:

$$abx^2 + (a^2 + b^2)xy + aby^2 + (a - b)y - (a - b)x - 1$$

$$\begin{array}{ccc} ax & +by & +1 \\ bx & +ay & -1 \end{array}$$

$$(ax + by + 1)(bx + ay - 1)$$

3.- Factorizar:

$$6x^4 - 5x^2y - 25y^2 - 5yz - 23x^2z + 20z^2$$

$$\begin{array}{ccc} 3x^2 & +5y & -4z \\ 2x^2 & -5y & -5z \end{array}$$

$$(3x^2 + 5y - 4z)(2x^2 - 5y - 5z)$$

4.- Factorizar:

$$2x^{2m} + 5x^my^n - 3y^{2n} + 7y^n + 7x^m + 6$$

$$\begin{array}{ccc} 2x^m & -y^n & +3 \\ x^m & +3y^n & +2 \end{array}$$

$$(2x^m - y^n + 3)(x^m + 3y^n + 2)$$

5.- Factorizar:

$$28xy - 44y^2 - 23y + 35x + 40$$

Solución:

Se observa que falta un término, que es "x^2", se completa con $0x^2$ y se completa el polinomio:

$$0x^2 + 28xy - 44y^2 + 35x - 23y + 40$$

$$\begin{array}{ccccc} Ox & & +4y & & +5 \\ & (I) & (III) & (II) & \\ 7x & & -11y & & +8 \end{array}$$

$$E = (4y + 5)(7x - 11y + 8)$$

C.3) ASPA DOBLE ESPECIAL.

Se utiliza para factorizar polinomios de 4to grado de la forma general:

$$ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm dx \pm e$$

Para factorizar se procede así:

a) Se descompone los términos extremos (primero y quinto) en sus factores primos con signos adecuados.

b) Se efectúa el producto de los factores primos en aspa y se reduce. De esta manera se obtiene un término de 2° grado.

c) A este resultado se le debe sumar algebraicamente otro término de 2° grado para que sea igual al tercer término.

d) Con este otro término de 2do. grado colocado como tercer término del polinomio, se descompone en sus factores en forma conveniente tal, que cumpla los requisitos del aspa doble:

- Aspa simple entre el primer término y el término de segundo grado ubicado como sustituto, para verificar el segundo término.
- Aspa simple auxiliar entre el sumando de segundo grado ubicado y el quinto término para verificar el 4to. término.

e) Los factores se toman en forma horizontal.

Ejemplo: Factorizar:

$$x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10$$

Solución:

Descomponiendo los extremos en sus factores:

$$x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & +5 \\ & (I) & \\ x^2 & & +2 \end{array}$$

Para (I):

$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ 5x^2 \\ \hline 7x^2 \end{array}$$

Como el tercer término es $11x^2$ y el producto en aspa de los extremos es $7x^2$ faltarán $4x^2$ que es la cantidad que se debe agregar.

Se descompone $4x^2$ en sus factores en forma conveniente y se verifica el segundo y cuarto términos:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 14x + 10$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & -2x & & +5 \\ & \text{(II)} & & \text{(III)} & \\ x^2 & & -2x & & +2 \end{array}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{array}{r} -2x^3 \\ -2x^3 \\ \hline -4x^3 \end{array} \qquad\qquad \text{(III)}\quad \begin{array}{r} -\ 4x \\ -10x \\ \hline -14x \end{array}$$

Como verificar las condiciones del aspa doble, los términos están bien descompuestos.

La expresión factorizada es:

$$(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 2x + 2)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$x^4 - 10x^3 + 19x^2 - 18x + 9$$

Solución:

Descomponiendo los términos extremos:

$$x^4 - 10x^3 + 19x^2 - 18x + 9$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & +9 \\ & \text{(I)} & \\ x^2 & & +1 \end{array}$$

En el aspa (I):

$$9x^2 + x^2 = 10x^2$$

se observa que faltan $19x^2 - 10x^2 = 9x^2$.

Luego:

$$x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 18x + 9$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & -9x & & +9 \\ & \text{(II)} & & \text{(III)} & \\ x^2 & & -x & & +1 \end{array}$$

Verificando el aspa doble:

$$\text{(II)}\quad \begin{array}{r} -x^3 \\ -9x^3 \\ \hline -10x^3 \end{array} \qquad\qquad \text{(III)}\quad \begin{array}{r} -\ 9x \\ -\ 9x \\ \hline -18x \end{array}$$

La expresión factorizada es:

$$(x^2 - 9x + 9)(x^2 - x + 1)$$

2.- Factorizar:

$$2x^8 + x^6 - 16x^4 + 8x^2 - 1$$

Solución:

Descomponiendo los términos extremos:

$$2x^8 + x^6 - 16x^4 + 8x^2 - 1$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \text{(I)} \\ 2x^4 & & +1 & = & x^4 \\ & \text{(I)} & & & \\ x^4 & & -1 & = & -2x^4 \\ \hline & & & & -\ x^4 \end{array}$$

Como el tercer término es $-16x^4$ y el producto en aspa de los extremos es $-x^4$ falta $-15x^2$ que es la cantidad que se debe agregar. Se descompone $-15x^2$ en sus factores en forma conveniente y se verifica el 2do. y 4to. términos:

$$\begin{array}{ccccc} 2x^4 & & -5x^2 & & +1 \\ & \text{(II)} & & \text{(III)} & \\ x^4 & & +3x^2 & & -1 \end{array}$$

En (II): $\begin{array}{r} 6x^6 \\ -5x^6 \\ \hline +x^6 \end{array}$ En (III): $\begin{array}{r} +5x^2 \\ +3x^2 \\ \hline +8x^2 \end{array}$

Como se verifica las condiciones del aspa doble,la expresión factorizada es:

$$(2x^4 - 5x^2 + 1)(x^4 + 3x^2 - 1)$$

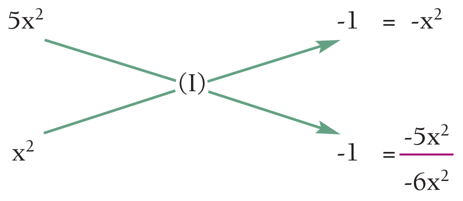
3.- Factorizar:

$$5x^4 - 11x^2 - 4x + 1$$

Solución:

Completando el polinomio con $0x^3$ y descomponiendo los términos extremos:

$$5x^4 + 0x^3 - 11x^2 - 4x + 1$$

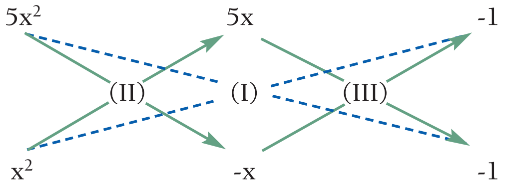


faltarían:

$$(-11x^2) - (-6x^2) = -5x^2$$

Verificando el aspa doble:

$$5x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 1$$



$$(5x^2 + 5x - 1)(x^2 - x - 1)$$

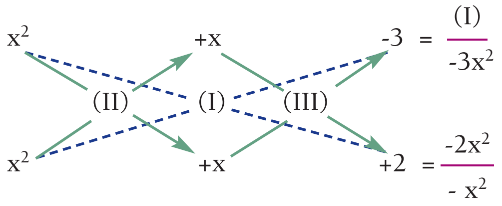
4.- Factorizar:

$$x^4 + 2x^3 - x - 6$$

Solución:

Completando el polinomio con $0x^2$ y descomponiendo los términos extremos:

$$x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 6$$



falta: $0x^2 - (-x^2) = x^2$

Verificación del aspa doble:

(II) $x^3 + x^3 = 2x^3$

(III) $2x - 3x = -x$

El polinomio factorizado es:

$$(x^2 + x - 3)(x^2 + x + 2)$$

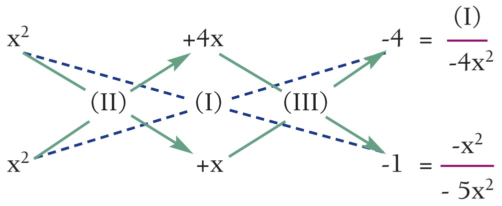
5.- Factorizar:

$$x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4$$

Solución:

Completando el polinomio con 0x y descomponiendo a los términos extremos:

$$x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 0x + 4$$



falta: $-9x^2 - (-5x^2) = -4x^2$

Verificación del aspa doble:

(II) $\begin{array}{r} x^3 \\ -4x^3 \\ \hline -3x^3 \end{array}$ (III) $\begin{array}{r} +4x \\ -4x \\ \hline 0x \end{array}$

El polinomio factorizado es:

$$(x^2 - 4x - 4)\ (x^2 + x - 1)$$

(D) MÉTODO DE DIVISORES BINOMIOS

FINALIDAD.-Permite la factorización de un polinomio de cualquier grado que acepte factores de primer grado de la forma general:

$$x \pm B \quad ; \quad Ax \pm B$$

por ejemplo: $x + 2$; $2x + 3$

DIVISOR BINOMIO

Es aquel que siendo de primer grado está contenido un número entero de veces en un polinomio.

Ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 5x + 6$$

contiene exactamente a $(x - 2)$ ya que si se calcula el resto, éste es igual a cero.

FUNDAMENTO TEORICO

Este método se fundamenta en la aplicación del teorema del resto -en forma- inversa y de la división de Ruffini.

Si $P(x) : (x-a)$, da $R = 0$; $(x-a)$ es un divisor de $P(x)$.

si $x = a$ y $R = P(a) = 0$, por el teorema del resto: $x - a = 0$.

$\therefore$ x-a es un divisor del polinomio $P(x)$.

CEROS DE UN POLINOMIO

Son todos los valores que puede tomar la variable de un polinomio y que hacen que su valor numérico sea igual a cero.

Ejemplo:

Sea el polinomio:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 9$$

Valor numérico para $x = 1$:

$$P(1) = 1 + 3 + 5 - 9$$

$$P(1) = 0$$

Por lo tanto el número 1 es un cero del polinomio. Se observa que al obtener un cero del polinomio se obtiene también un divisor binomio que es $(x - 1)$.

DETERMINACIÓN DE LOS POSIBLES CEROS DE UN POLINOMIO

(1) Cuando el primer coeficiente del polinomio es "1" se toman todos los divisores del término independiente con su doble signo.

Ejemplo: Sea el polinomio:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + 7x - 12$$

$$P.C. = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \pm 12$$

(2) Cuando el coeficiente del primer término es diferente de "1", se procede como en el caso anterior y además, se considera las fracciones que resultan de dividir todos los divisores del término independiente entre los divisores del primer coeficiente.

Ejemplo: Sea el polinomio:

$$P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3x - 9$$

Posibles ceros:

$$\pm 1, \pm 3, \pm 9, \ \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{9}{4}$$

FORMAS DE FACTORIZACIÓN

(1) Se determina por los menos un cero del polinomio.

(2) De acuerdo con el cero, se halla el divisor, que es un divisor binomio o factor.

(3) El otro factor se determina dividiendo el polinomio entre el divisor obtenido mediante la regla de Ruffini.

OBSERVACIONES

- El número de ceros, está determinado por el grado del polinomio.
- El número de ceros mínimo debe ser tal que, al dividir sucesivamente, por Ruffini, se obtenga un cociente de segundo grado.

Ejemplo: Factorizar:

$$x^3 - 4x^2 - 25x + 28$$

Solución:

(1) Se determinan los posibles ceros del polinomio para valores de:

$$x = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 7,\ \pm 14,\ \pm 28$$

(2) Para x = 1, el valor numérico del polinomio es:

$$(1)^3 - 4(1)^2 - 25(1) + 28 = 1 - 4 - 25 + 28 = 0$$

luego (x - 1) es un factor.

(3) Dividiendo el polinomio entre el factor obtenido, usando la regla de Ruffini:

	1	-4	-25	+28
1		+1	-3	-28
	1	-3	-28	0

de donde se obtiene el cociente:

$$x^2 - 3x - 28$$

que, es el otro factor buscado.

(4)Luego el polinomio factorizado es:

$$(x - 1)(x^2 - 3x - 28)$$

y, finalmente podemos convertir a:

$$(x - 1)(x + 4)(x - 7)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$E = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

Solución:

Para x = 1

$P(1) = 0 \quad \therefore \quad (x - 1)$ es un factor

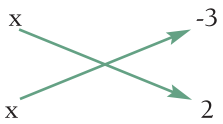
Para x = 2

$P(2) = 0 \quad \therefore \quad (x - 2)$ es otro factor.

Dividiendo dos veces por Ruffini:

	1	-4	-1	+16	-12
	↓				
1		+1	-3	-4	+12
1		-3	-4	+12	0
	↓				
2		+2	-2	-12	
	1	-1	-6	0	

El otro factor es $(x^2 - x - 6)$, el cual se factoriza por el método del aspa:



resulta: $(x - 3)(x + 2)$

Por lo tanto el polinomio factorizado es:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

2.- Factorizar:

$$x^5 + 4x^4 - 10x^2 - x + 6$$

Solución:

Posibles ceros: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$

Para x = 1; P(1) = 0, luego (x - 1) es un factor.

Para x = -1; P(-1) = 0, luego (x + 1) es otro factor.

Para x = -2; P(-2) = 0, luego (x + 2) es otro factor.

Dividiendo tres veces por Ruffini:

	1	+4	+0	-10	-1	+6
	↓					
1		+1	+5	+5	-5	-6
	1	+5	+5	-5	-6	0
	↓					
-1		-1	-4	-1	+6	
	1	+4	+1	-6	0	
	↓					
-2		-2	-4	+6		
	1	+2	-3	0		

El otro factor es: $x^2 + 2x - 3$, el cual se factoriza por el aspa:

$$\begin{array}{cc} x & +3 \\ x & -1 \end{array}$$

que resulta en: $(x + 3)(x - 1)$

Por lo tanto el polinomio factorizado es:

$$(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x - 1)$$

3.- Factorizar:

$$2(2x - a)^3 - 27a^2x$$

Solución:

Desarrollandose el cubo:

$$2(8x^3 - 12x^2a + 6xa^2 - a^3) - 27a^2x$$

$$16x^3 - 24x^2a + 12xa^2 - 2a^3 - 27a^2x$$

reduciendo:

$$16x^3 - 24x^2a - 15a^2x - 2a^3$$

aplicando divisores binomios:

Posibles ceros: $\pm a, \ \pm 2a, \ \pm \frac{a}{2}, \ \pm \frac{a}{4}, \ \ldots\ldots$

Para $x = 2a$; $P(2a) = 0$; luego tiene divisor $(x - 2a)$ que es un factor.

Dividiendo el polinomio por Ruffini entre $(x - 2a)$:

	16	$-24a$	$-15a^2$	$-2a^3$
		↓		
$2a$		$+32a$	$+16a^2$	$+2a^3$
	16	$+8a$	$+a^2$	0

en consecuencia el otro factor: $16x^2 + 8a^2 + a^2$; el cual, se factoriza por el método del aspa:

$$\begin{array}{cc} 4x & a \\ 4x & a \end{array}$$

Resultando en: $(4x + a)(4x + a)$

Finalmente el polinomio factorizado es:

$$(x - 2a)(4x + a)^2$$

4.- Factorizar:

$$E = 4(x^2 + xy + y^2)^3 - 27x^2y^2(x + y)^2$$

Solución:

Efectuando y agrupando:

$$4(x^2 + xy + y^2)^3 - 27(xy)^2(x^2 + 2xy + y^2)$$

haciendo un cambio de variables para tener en forma más sencilla el polinomio:

$$x^2 + y^2 = a$$
$$xy = b$$

se obtiene:

$$E = 4(a + b)^3 - 27(b)^2 (a + 2b)$$

$$E = 4(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - 27b^2(a + 2b)$$

$$E = 4a^3 + 12a^2b + 12ab^2 + 4b^3 - 27b^2a - 54b^3$$

$$E = 4a^3 + 12a^2b - 15ab^2 - 50^3$$

P.C. = $\pm b, \ \pm 2b, \ \pm 5b, \ \pm 25b, \ \pm 50b, \ \ldots$

Para $a = 2b$:

$$P(2b) = 4(2b)^3 + 12(2b)^2b - 15(2b)b^2 - 50b^3$$

$$P(2b) = 32b^3 + 48b^3 - 30b^3 - 50b^3 = 0$$

Luego, un factor es $(a - 2b)$; el otro factor podemos hallarlo por Ruffini:

	4	$+12b$	$-15b^2$	$-50b^3$
		↓		
$2b$		$8b$	$+40b^2$	$+50b^3$
	4	$+20b$	$+25b^2$	0

Por lo tanto, el otro factor es: $4a^2 + 20ab + 25b^2$

que se puede expresar también como:

$$(2a + 5b)^2$$

y, que factorizado da:

$$(2a + 5b)(2a + 5b)$$

Luego, el polinomio factorizado es:

$$(a - 2b)(2a + 5b)(2a + 5b)$$

Reponiendo el valor de $(a = x^2 + y^2)$ y $(b = xy)$

$$E = (x^2+y^2-2xy)[2(x^2+y^2)+5xy][2(x^2+y^2)+5xy]$$

$$E =(x - y)^2\ (2x^2 + 5xy + 2y^2)^2$$

Factorizando el segundo paréntesis por aspa simple:

$$[2(x^2 + y^2) + 5xy]$$

$$2x^2 + 2y^2 + 5xy$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & y \\ & \times & \\ x & & 2y \end{array}$$

$$(2x + y)(x + 2y)$$

$$E = (x - y)^2\ [(2x + y)(x + 2y)]^2$$

$$E = (x - y)^2(2x + y)^2(x + 2y)^2$$

(E) MÉTODO DE ARTIFICIOS DE CALCULO

E.1) REDUCCIÓN A DIFERENCIA DE CUADRADOS:

Este método consiste en transformar una expresión (trinomio en general), a una diferencia de cuadrados, sumando y restando una misma cantidad de tal manera que se complete el trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo: Factorizar:

$$a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$$

Solución:

Analizando el trinomio, se observa que los extremos son cuadrados perfectos, para que sea el desarrollo de una suma al cuadrado, el término intermedio debe ser doble del producto de las raíces de estos términos; es decir, debe ser:

$$2(a^2)\ .\ (3b^2) = 6a^2b^2$$

Luego, se observa que le falta $4a^2b^2$

Sumando y restando $4a^2b^2$ se obtiene:

$$E = (a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4) - (4a^2b^2)$$

el primer paréntesis es el desarrollo de un binomio al cuadrado:

$$E = (a^2 + 3b^2)^2 - (2ab)^2$$

factorizando la diferencia de cuadrados:

$$E = (a^2 + 3b^2 - 2ab)(a^2 +3b^2 + 2ab)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$E = 49x^{4m} + 5x^{2m}y^{4n} + y^{8n}$$

Solución:

Se observa que los extremos son cuadrados perfectos, luego el término intermedio debe ser:

$$2(7x^{2m})\ .\ (y^{4n}) = 14x^{2m}y^{4n}$$

Sumando y restando $9x^{2m}y^{4n}$:

$$E = (49x^{4m} + 14x^{2m}y^{4n} + y^{8n}) - 9x^{2m}y^{4n}$$

$$E = (7x^{2m} + y^{4n})^2 - (3x^my^{2n})^2$$

factorizando la diferencia de cuadrados:

$$E = (7x^{2m} + y^{4n} - 3x^my^{2n})(7x^{2m} + y^{4n} + 3x^my^{2n})$$

2.- Factorizar:

$$E = (2x^6 + 1)^3 + (x + 1)^3\ (x - 1)^3\ (x^4 + x^2 + 1)^3$$

Solución:

La expresión se puede escribir como:

$$E = (2x^6 + 1)^3 + [(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)]^3$$

efectuando:

$$E = (2x^6 + 1)^3 + [(x^6 - 1)]^3$$

factorizando la suma de cubos:

$$E = [(2x^6 + 1) + (x^6 - 1)]\ [(2x^6 + 1)^2+(x^6 - 1)^2 - (2x^6 + 1)(x^6 - 1)]$$

$E = [3x^6]\,[(4x^{12} + 1 + 4x^6 + x^{12} - 2x^6 + 1) - (2x^6 + 1)(x^6 - 1)]$

$E = [3x^6]\,[(5x^{12} + 2x^6 + 2) - (2x^{12} - 2x^6 + x^6 - 1)]$

$E = (3x^6)(5x^{12} + 2x^6 + 2 - 2x^{12} + 2x^6 - x^6 + 1)$

$E = (3x^6)(3x^{12} + 3x^6 + 3)$

factor común del segundo paréntesis:

$E = (3x^6)\,3(x^{12} + x^6 + 1)$

Sumando y restando al segundo paréntesis x^6:

$E = 9x^6(x^{12} + x^6 + 1 - x^6 + x^6)$

$E = 9x^6[(x^{12} + 2x^6 + 1) - (x^6)]$

$E = 9x^6[(x^6 + 1)^2 - (x^3)^2]$

$E = 9x^6(x^6 + 1 + x^3)(x^6 + 1 - x^3)$

3.- Factorizar:

$E = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$

Solución:

Sumando y restando $4a^2b^2$:

$E = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$

agrupando:

$E = (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) - 4a^2b^2$

factorizando:

$E = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2$

es una diferencia de cuadrados, luego:

$E = (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)$

agrupando:

$E = [(a^2 - 2ab + b^2) - c^2][(a^2 + 2ab + b^2) - c^2]$

$E = [(a - b)^2 - c^2][(a + b)^2 - c^2]$

finalmente desarrollando las diferencias de cuadrados

$E = (a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)$

E.2) MÉTODOS DE SUMAS Y RESTAS

Consiste en sumar y restar una misma cantidad de tal manera que se forme una suma o diferencia de cubos al mismo tiempo que se presenta el factor:

$$x^2 + x + 1 \quad ó \quad x^2 - x + 1$$

Algunas veces también se completa el polinomio.

Ejemplos:

i) Factorizar: $x^5 + x^4 + 1$

Solución:

Primera forma: Completando el polinomio.

Sumando y restando:

$$x^3 + x^2 + x$$

agrupando y factorizando así:

$E = x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1)$

finalmente:

$E = (x^2 + x + 1)\,(x^3 - x + 1)$

Segunda forma: Sumando y restando x^2:

$E = x^5 - x^2 + x^4 + x^2 + 1$

agrupando y factorizando:

$E = x^2(x^3 - 1) + (x^4 + x^2 + 1)$

sumando y restando x^2 al segundo paréntesis:

$E = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1)$

$E = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x^2 - x + 1)$

finalmente:

$E = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$

ii) Factorizar: $x^5 + x - 1$

Solución:

Sumando y restando x^2:

$E = x^5 + x^2 - x^2 + x + 1$

agrupando:

$E = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1)$

factorizando suma de cubos:

$E = x^2(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1)$

finalmente:

$E = (x^2 - x + 1)\ (x^3 + x^2 - 1)$

iii) Factorizar: $x^6(x^4 + 2) + (x + 1)(x - 1)$

Solución:

Efectuando:

$E = x^{10} + 2x^6 + x^2 - 1$

agrupando:

$E = (x^{10} + 2x^6 + x^2) - 1$

el paréntesis es el desarrollo de una suma al cuadrado:

$E = (x^5 + x)^2 -1$

factorizando:

$E = (x^5 + x - 1)(x^5 + x + 1) \qquad \text{(I)}$

del ejercicio (ii), recordemos que:

$(x^5 + x - 1) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1) \qquad \text{(a)}$

Por otra parte factorizando: $(x^5 + x + 1)$, sumando y restando x^2

sumando y restando x^2:

$x^5 + x + 1 = x^5 + x + 1 + x^2 - x^2$

agrupando y factorizando:

$x^5 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$x^5 + x + 1 = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) \qquad \text{(b)}$

Sustituyendo(a) y (b) en (I):

$E = (x^2 + x +1)(x^3 - x^2 + 1)(x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$

iv) Factorizar: $x^7 + x^5 - 1$

Solución:

Sumando y restando x:

$E = x^7 - x + x^5 + x - 1 \qquad \text{(I)}$

previamente, veamos que:

$(x^7 - x) = x(x^6 - 1) = x(x^3 + 1)(x^3 - 1)$

$(x^7 - x) = x(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^3 - 1) \qquad \text{(a)}$

también por el ejercicio número (ii)

$x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1) \qquad \text{(b)}$

sustituyendo (a) y (b) en (I):

$E = x(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^3 - 1)$
$\qquad + (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 -1)$

$E = (x^2 - x + 1)\ (x^5 - x^2 + x^4 - x + x^3 + x^2 - 1)$

finalmente:

$E = (x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 - x - 1)$

v) Factorizar: $x^7 + x^6 - x^5 + x^3 - 2x + 1$

Solución:

Descomponiendo $-2x = -x - x$

$E = x^7 + x^6 - x^5 + x^3 - x - x + 1$

Sumando y restando x^2:

$E = \underline{\underline{x^7}} + \underline{\underline{x^6}} - \underline{\underline{x^5}} + \underline{\underline{\underline{x^3}}} - \underline{x} - \underline{\underline{\underline{x}}} + \underline{1} + \underline{\underline{\underline{x^2}}} - \underline{x^2}$

agrupando en la forma señalada:

$E = x^5\ (x^2 + x - 1) + x(x^2 + x - 1) - (x^2 + x - 1)$

$E = (x^2 + x - 1)(x^5 + x - 1)$

por el ejercicio número(ii), se sabe el resultado del segundo paréntesis:

$E = (x^2 + x - 1)(x^2- x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$

vi) Factorizar: $x^3 +y^3 +z^3 - 3xyz$

Solución:

Trataremos de formar $(x + y)^3$, sumando y restando: $3x^2y$, $3y^2x$:

$$E = (x^3 + y^3 + 3x^2y + 3y^2x) - 3xyz - 3x^2y - 3xy^2 + z^3$$

$$E = (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z)$$

factorizando la suma de cubos:

$$E = [(x + y) + z]\,[(x + y)^2 - (x + y)\ z + z^2] - 3xy(x + y + z)$$

Extrayendo factor común $(x + y + z)$:

$$E = (x + y + z)(x^2 + y^2 + 2xy - xz - zy + z^2 - 3xy)$$

finalmente:

$$E = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

E.3) CAMBIO DE VARIABLE

Consiste en cambiar una variable por otra, de tal manera que se obtenga una forma de factorización más simple.

Ejemplo:

Factorizar:

$$E = 1 + x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

Solución:

Agrupemos adecuadamente, así:

$$E = 1 + [x(x + 3)][(x + 1)(x + 2)]$$
$$= 1 + (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)$$

haciendo $x^2 + 3x = a$:

$$E = 1 + a(a + 2)$$

efectuando:

$$E = 1 + a^2 + 2a$$

es el desarrollo de una suma al cuadrado, por lo que:

$$E = (a + 1)^2$$

reemplazando a por su valor:

$$E = (x^2 + 3x + 1)^2$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$E = (2x^2 - 9x + 1)^2 + 24x(x - 1)(2x - 1)$$

Solución:

Efectuando los dos binomios:

$$E = (2x^2 - 9x + 1)^2 + 24x(2x^2 - 3x + 1)$$

haciendo $2x^2 + 1 = a$:

$$E = (a - 9x)^2 + 24x(a - 3x)$$

efectuando:

$$E = a^2 - 18ax + 81x^2 + 24ax - 72x^2$$

reduciendo:

$$E = a^2 + 6ax + 9x^2$$

que es el desarrollo de una suma al cuadrado, así:

$$E = (a + 3x)^2$$

reemplazando "a" por su valor:

$$E = (2x^2 + 3x + 1)^2$$

factorizando por aspa simple el paréntesis:

$$\begin{array}{ccc} 2x & & +1 \\ x & & +1 \end{array} \qquad (2x + 1)(x + 1)$$

luego:

$$E = [(2x + 1)(x + 1)]^2 = (2x + 1)2(x + 1)^2$$

2.- Factorizar:

$$E = 4[ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)]^2 + [(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) - 4abxy]^2$$

Solución:

Haciendo:

$ab = m$; $\quad x^2 - y^2 = n$;

$xy = r$; $\quad a^2 - b^2 = s$;

$$E = 4(mn + rs)^2 + (ns - 4mr)^2$$

efectuando operaciones:

$E = 4m^2n^2 + 8mnrs + 4r^2s^2 + n^2s^2 - 8mnr + 16m^2r^2$

reduciendo y agrupando convenientemente:

$E = n^2(4m^2 + s^2) + 4r^2(4m^2 + s^2)$

factorizando:

$E = (4m^2 + s^2)(n^2 + 4r^2)$

reemplazando los valores asignados:

$E = [(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2][(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2]$

efectuando:

$E = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$

$E = (a^2 + b^2)^2(x^4 + y)^2$

3.- Factorizar:

$E = x(ax - 1)(ax - a - 1)(x + 1) + a$

Solución:

Efectuando de la siguiente manera:

$E = [x(ax - a - 1)][(ax - 1)(x + 1)] + a$

efectuando:

$E = (ax^2 - ax - x)(ax^2 + ax - x - 1) + a$

haciendo $ax^2 - x = y$

$E = (y - ax)(y + ax - 1) + a$

efectuando nuevamente y simplificando:

$E = y^2 - y - ax(ax - 1)+a$

reemplazando y por el valor asignado:

$E = (ax^2 - x)^2 - (ax^2 - x) - ax(ax - 1) + a$

extrayendo el factor común en los dos primeros paréntesis:

$E = x^2(ax - 1)^2 - x(ax - 1) - ax(ax - 1) + a$

agrupando y factorizando en los dos primeros y los dos últimos:

$E = x(ax - 1)[(ax - 1)x - 1] - a[x(ax - 1) - 1]$

factorizando el corchete:

$E = [(ax - 1)x - 1]\ [x(ax - 1) - a]$

$E = (ax^2 - x - 1)(ax^2 - x - a)$

4.- Factorizar:

$E = (a + 2b + c)(b + 2c + a)(c + 2a + b)$
$\quad + (a + b)(a + c)(b + c)$

Solución:

Se puede reescribir la expresión como:

$E = (a + b + b + c)(b + c + c + a)(c + a + a + b)$
$\quad + (a + b)(a + c)(b + c)$

haciendo:

$a + b = x;\ \ b + c = y;\ \ a + c = z;$

$E = (x + y)(y + z)(x + z) + xyz$

efectuando progresiva y convenientemente:

$E = [y^2 + (x + z)y + xz][x + z] + xyz$

$E = y^2(x + z) + (x + z)^2y + xz(x + z) + (xyz)$

agrupando de dos en dos y extrayendo factor común:

$E = y(x + z)[y + x + z] + xz(x + y + z)$

factorizando:

$E = (x + y + z)(xy + yz + xz)$

reponiendo los valores asignados:

$E = (a + b + b + c + a + c)\ [(a + b)(b + c)$
$\quad + (b + c)(a + c) + (a + b)(a + c)]$

reduciendo y efectuando:

$E = 2(a+b+c)\ [b^2 + ab + ac + bc + c^2 + ac + bc + ab$
$\quad + a^2 + ac + ab + bc]$

$$E = 2(a + b + c)\ (a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3ac + 3bc)$$

$$E = 2(a + b + c)\ [(a + b + c)^2 + ab + ac + bc]$$

E .4) FACTORIZACIÓN RECÍPROCA

POLINOMIO RECÍPROCO.- Es aquel que se caracteriza porque los coeficientes de los términos equidistantes del centro son iguales.

El polinomio:

$$P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

es recíproco siempre y cuando A = E; B = D.

Ejemplos:

i) $4x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 9x + 4$

ii) $7x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 4x + 7$

PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO RECIPROCO.

1) Se extrae, como factor común, la parte literal del término central, que al final se debe eliminar.

2) Se realiza el siguiente cambio de variables:

$$x + \frac{1}{x} = a$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 \qquad\qquad x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$$

3) Se realiza las operaciones y se factoriza.

4) Se repone los valores asignados a las variables.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 6$$

Solución:

Extrayendo factor común x^2:

$$E = x^2\left(6x^2 + 5x + 6 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$

agrupando de la siguiente manera:

$$E = x^2\left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6\right]$$

haciendo:

$$x + \frac{1}{x^2} = a \ ; \ x^2 + \frac{1}{x} = a^2 - 2$$

$$E = x^2[6(a^2 - 2) + 5a + 6]$$

efectuando:

$$E = x^2(6a^2 + 5a - 6)$$

aplicando aspa simple al paréntesis:

$$\begin{array}{ll} 3a & -2 \\ 2a & +3 \end{array} \qquad (3a - 2)(2a + 3)$$

luego:

$$E = x^2(3a - 2)(2a + 3)$$

reemplazando el valor de "a":

$$E = x^2\left[3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\right]\left[2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3\right]$$

operando:

$$E = x^2\left[\frac{3x^2 + 3 - 2x}{x}\right]\left[\frac{2x^2 + 2 + 3x}{x}\right]$$

Simplificando:

$$E = (3x^2 - 2x + 3)(2x^2 + 3x + 2)$$

2.- Factorizar:

$$E = x^6 + 15x^5 + 78x^4 + 155x^3 + 78x^2 + 15x + 1$$

Solución:

Extrayendo factor común "x^3"

y agrupando:

$$E = x^3\left[\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 78\left(x + \frac{1}{x}\right) + 155\right]$$

haciendo:

$$x + \frac{1}{x} = a$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 \qquad\qquad x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$$

$E = x^3(a^3 - 3a + 15a^2 - 30 + 78a + 155)$

$E = x^3(a^3 + 15a^2 + 75a + 125)$

$E = x^3[a^3 + 3(a^2)(5) + 3(a)(5^2) + (5)^3]$

que se puede escribir como:

$E = x^3(a + 5)^3$

reemplazando a por el valor asignado:

$$E = x^3\left(x + \frac{1}{x} + 5\right)^3$$

$$E = \frac{x^3(x^2 + 1 + 5x)^3}{x^3}$$

$E = (x^2 + 5x + 1)^3$

3.- Factorizar:

$E = x^7 + 8x^6 + 17x^5 + 9x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 8x + 1$

Solución:

Como se observa el polinomio tiene un número par de términos; por lo tanto, factorizaremos por divisores binomios previamente:

Para x = -1 se obtiene P(-1) = 0, luego un factor es (x + 1) y el otro se obtiene dividiendo por Ruffini:

	1	+8	+17	+9	+9	+17	+8	+1
	↓							
-1		-1	-7	-10	+1	-10	-7	-1
	1	+7	+10	-1	+10	+7	+1	0

El otro factor es:

$E_1 = x^6 + 7x^5 + 10x^4 - x^3 + 10x^2 + 7x + 1$

Este es un polinomio recíproco, al que aplicaremos el método de factorización recíproca:

$$E_1 = x^3\left[\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 7\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right]$$

haciendo:

$$x + \frac{1}{x} = a$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 \qquad\qquad x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$$

$E_1 = x^3(a^3 - 3a + 7a^2 - 14 + 10a - 1)$

$E_1 = x^3(a^3 + 7a^2 + 7a - 15)$

llamando:

$E_2 = a^3 + 7a^2 + 7a - 15$

factorizando por divisiones sucesivas; para a = 1, P(1) = 0; luego un factor es (a - 1) y dividiendo por Ruffini:

	1	+7	+7	-15
	↓			
1		+1	+8	+15
	1	+8	+15	0

El otro factor es:

$a^2 + 8a + 15 = (a + 3)(a + 5)$

Luego:

$E_2 = a^3 + 7a^2 + 7a - 15 = (a - 1)(a + 3)(a + 5)$

por lo tanto:

$E_1 = x^3(a - 1)(a + 3)(a + 5)$

reponiendo el valor de a:

$$E_1 = x^3\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)\left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 5\right)$$

efectuando:

$$E_1 = x^3\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)\left(\frac{x^2 + x + 3x}{x}\right)\left(\frac{x^2 + 1 + 5x}{x}\right)$$

Simplificando:

$E_1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1)$

finalmente:

$E = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1)$

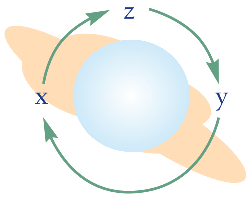
E.5) FACTORIZACIÓN SIMETRICA Y ALTERNADA

POLINOMIO SIMETRICO.- Se dice que un polinomio es simétrico respecto a sus variables cuando su valor no se altera por el intercambio de cualquier par de ellas y además es homogéneo.

Ejemplo: Sea el polinomio:

$P(x,y,z) = z^2(x + y) + y^2(x + z) + x^2(y + z) + 2xyz$

Nótese que la expresión sigue una forma circular o cíclica:



intercambiando dos cualquiera de sus variables sean éstas "x" ó "y", es decir reemplazando a "x" por "y" y a "y" por "x", se tiene:

$P(x,y,z) = z^2(y + x) + x^2(y + z) + y^2(x + z) + 2y \cdot xz$

ordenando en forma circular:

$P(x,y,z) = z^2(x + y) + y^2(x + z) + x^2(y + z) + 2xyz$

se obtiene la misma expresión, entonces la expresión es simétrica.

REPRESENTACIÓN DE EXPRESIONES SIMÉTRICAS

Con dos variables: x, y.

	Forma particular	Forma general
1er.Grado	$x + y$	$A(x + y)$
2do.Grado	$x^2 + xy + y^2$	$A(x^2 + y^2) + Bxy$
3er.Grado	$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$	$A(x^3+y^3)+B(x^2y+xy^2)$

Con tres variables: x, y, z.

	Forma particular	Forma general
1er.Grado	$x + y + z$	$A(x + y + z)$
2do.Grado	$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$	$A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + xz + yz)$
3doGrado	$x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z$ $+ y^2z + y^2x + z^2x + z^2y + xzy$	$A(x^3 + y^3 + z^3) + B(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y)$ $+ Cxyz$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE UN POLINOMIO SIMÉTRICO.- Las operaciones de un polinomio simétrico con expresiones simétricas dan como resultado también expresiones simétricas.

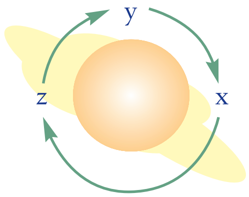
POLINOMIO ALTERNO.- Se dice que un polinomio es alterno respecto a sus variables, cuando su signo se altera pero no su valor absoluto al intercambiar un par cualquiera de ellas, y es homogéneo.

Ejemplo:

Sea el polinomio:

$$P(x,y,z) = x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - x)$$

El polinomio sigue una forma circular o cíclica:



intercambio "x" e "y", se tiene:

$$y^2(z - x) + x^2(y - z) + z^2(x - y)$$

cambiando de signos:

$$-y^2(x - z) - x^2(z - y) - z^2(y - x)$$

$$-[x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - x)]$$

o también: $-P(x,y,z)$

Por lo tanto, el polinomio es alterno.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE UN POLINOMIO ALTERNO.

(1) No hay expresiones alternas que contengan más de dos variables y sean de primer grado.

(2) Generalmente los polinomios alternos son circulares o cíclicos y están escritos en forma de diferencia.

(3) El producto de una expresión simétrica por una alterna da como resultado una expresión alterna.

PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS SIMÉTRICOS Y ALTERNOS.

(1) Una expresión simétrica o alterna de variables x,y,z, si es divisible entre "x", entonces también será divisible entre "y", y entre "z".

(2) Una expresión simétrica o alterna de variables x,y,z, si es divisible entre $(x \pm y)$, entonces también será divisible entre $(y \pm z)$ y $(z \pm x)$.

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO SIMÉTRICO Y ALTERNO.

1º Se averigua si el polinomio es simétrico o alterno.

2º Encontrar los factores de la expresión aplicando el Teorema del Resto y ampliarlo aplicando las propiedades del polinomio simétrico y alterno.

3º Calcular el cociente, planteando la identidad de 2 polinomios y aplicando el criterio de los valores numéricos.

Ejemplo: Factorizar:

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

Solución:

1) Intercambiando "x" por "y" la expresión es alterna.

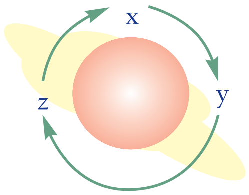
2) Cálculo de los factores.

Valor numérico para $x = y$:

$$(y - y)^3 + (y - z)^3 + (z - y)^3 = (y - z)^3 + [-(y - z)]^3$$
$$= (y - z)^3 - (y - z)^3 = 0$$

$\therefore$ El polinomio es divisible entre $(x - y)$.

Por ser el polinomio alterno, también será divisible entre los factores obtenidos en forma circular en el sentido indicado.



Es decir: $(y - z), (z - x)$.

$\therefore$ El polinomio es divisible entre el producto: $(x - y)(y - z)(z - x)$.

3) Se plantea la identidad de polinomios siguiente:

$$\underbrace{(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}_{\text{3er.Grado}}$$

$$\equiv \underbrace{(x - y)(y - z)(z - x)}_{\text{3er.Grado}} \cdot \underbrace{Q}_{\text{Grado cero}}$$

Por ser el polinomio de tercer grado, Q debe ser de grado cero, es decir debe ser un número:

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 \equiv Q(x - y)(y - z)(z - x)$$

Probemos un juego de valores para x,y,z.

Para $x = 1, y = 2, z = 3$:

$$(1 - 2)^3 + (2 - 3)^3 + (3 - 1)^3 = Q(1 - 2)(2 - 3)(3 - 1)$$

$$(-1)^3 + (-1)^3 + (2)^3 = Q\ (-1)(-1)(2)$$

$$-1 - 1 = 8 = Q(2)$$

$$3 = Q$$

la expresión factorizada es finalmente:

$$3(x - y)(y - z)(z - x)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$E = (a^3 + b^3)(a - b) + (b^3 + c^3)(b - c) + (c^3 + a^3)(c - a)$$

Solución:

1) Intercambiando a por b, el polinomio es alterno.

2) Para a = 0:

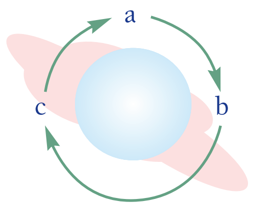
$$-b^4 + (b^3 + c^3)(b - c) + c^4 \neq 0$$

(no hay factores monomios)

3) Para a = b:

$$(b^3 + c^3)(b - c) + (b^3 + c^3)(c - b) = 0$$

Como se anula, entonces un factor es $(a - b)$, y como es alterno, los otros factores siguen un orden circular, en el sentido indicado, es decir:



$(b - c)$

$(c - a)$

4) El polinomio es de 4to.grado y los factores obtenidos dan producto de 3er.grado, por lo que hace falta un polinomio de primer grado simétrico y de tres variables de la forma:

$$M(a + b + c)$$

Realizando la identidad de polinomios:

$$E = (a^3 + b^3)(a - b) + (b^3 + c^3)(b - c)$$
$$+ (c^3 + a^3)(c - a) \equiv M(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$$

Dando valores para $a = 1, b = 0, c = 2$, se obtiene:

$$1 - 16 + 9 = M(3)(1)(-2)(1)$$

$\therefore\quad M = 1$

finalmente:

$$E = (a + b + c)(a - b)(c - a)(b - c)$$

2.- Factorizar:

$$E = (a + b)^5 - a^5 - b^5$$

Solución:

1) Intercambiando "a" y "b" el polinomio, es simétrico.

2) Para a = 0; V.N.P. = 0, un factor es "a" y el otro "b" por propiedad de polinomios simétricos.

3) Para a = -b. V.N.P. = 0; otro factor es $(a + b)$.

4) El polinomio es de 5to. grado y $ab(a + b)$ es de 3er. grado, falta un polinomio simétrico de 2do. grado de dos variables de la forma:

$$M(a^2 + b^2) + Nab$$

realizando la identidad de polinomios:

$$E = (a + b)^5 - a^5 - b^5 = a \cdot b(a+b)\{M(a^2 + b^2) + Nab\}$$

dando valores para a = 1, b = 1:

$$32 - 1 - 1 = 1(2)(2M + N)$$

$$2M + N = 15 \qquad \text{(I)}$$

para a = 1, b = 2:

$$243 - 1 - 32 = 2(3)\ (5M + 2N)$$

$$5M + 2N = 35 \qquad \text{(II)}$$

resolviendo (I) y (II), para lo cual operamos (I) (-2) + (II):

$$\begin{array}{r} -4M - 2N = -30 \\ 5M + 2N = \ \ 35 \\ \hline M = \ \ 5 \end{array}$$

Sustituyendo en (I):

$$10 + N = 15$$

$$N = 5$$

Luego, el polinomio factorizado es:

$$E = ab(a + b)[5(a^2 + b^2) + 5ab]$$

$$E = 5ab(a + b)(a^2 + b^2 + ab)$$

3.- Factorizar:

$$E = (a + b + c)^4 - (b + c)^4 - (a + c)^4 - (a + b)^4 + a^4 + b^4 + c^4$$

Solución:

i) Intercambiando a por b, el polinomio es simétrico.

ii) Haciendo a = 0, se obtiene:

$$E = (b + c)^4 - (b + c)^4 - c^4 - b^4 + b^4 + c^4 = 0$$

Luego, "a" es un factor; y los otros, "b" y "c".

iii) El producto abc es de tercer grado y como el polinomio es de cuarto grado, se necesita un polinomio simétrico de primer grado y de tres variables de la forma M(a + b + c).

Realizando la identidad de polinomios:

$$E = (a + b + c)^4 - (b + c)^4 - (a + c)^4 - (a + b)^4 + a^4 + b^4 + c^4 \equiv Mabc(a + b + c)$$

dando valores a = 1, b = 2, c = -1:

$$(1 + 2 - 1)^4 - (2 - 1)^4 - (1 - 1)^4 - (1 + 2)^4 + (1)^4 + (2)^4 + (-1)^4 = M(1)(2)(-1)(1 + 2 - 1)$$

$$16 - 1 - 81 + 1 + 16 + 1 = -4M$$

$$M = 12$$

entonces, finalmente:

$$E = 12(abc)(a + b + c)$$

4.- Factorizar:

$$E = m^3(n - p) + n^3(p - m) + p^3(m - n)$$

Solución:

1) Intercambio n por p, el polinomio es alterno.

2) Cálculo de los factores. Para n = p:

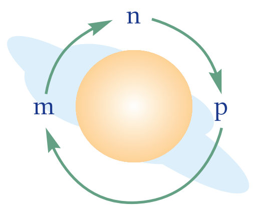
$$V_E = m^3(p - p) + n^3(p - m) + n^3(m - p)$$

$$V_E = 0 + n^3(p - m) + n^3[-(p - m)]$$

$$V_E = n^3(p - m) - n^3(p - m) = 0$$

Luego, E es divisible por "n - p".

Por ser el polinomio alterno, también será divisible entre los factores obtenidos en forma circular en el sentido indicado.



es decir: (p - m), (m - n).

Luego, E es divisible entre:(n - p)(p - m) (m - n)

3) $\underbrace{E}_{4°} = \underbrace{Q}_{1°}\ \underbrace{(n - p)(p - m)(m - n)}_{3°}$

Por ser el polinomio de cuarto grado, Q debe ser de primer grado y de la forma A(m + n + p); es decir: simétrico, de primer grado y 3 variables:

$$m^3(n - p) + n^3(p - m) + n^3(m - n) \equiv A(m + n + p)(n - p)(p - m)(m - n)$$

Dando un juego de valores m = 1, n = 2, p = 3.

$$(1)^3(2 - 3) + 2^3(3-1) + 3^3(1 - 2) = A(1 + 2 + 3)(2 - 3)(3 - 1)(1 - 2)$$

$$(1)(-1) +8(2) +27(-1) = A(6)(-1)(2)(-1)$$

$$-1 + 16 - 27 = 12A$$

$$\therefore\ A = -1$$

El polinomio factorizado es, por lo tanto:

$$E = -(m + n + p)(n - p)(p - m)(m - n)$$

E.6) OTROS ARTIFICIOS.

Cualquier otro artificio matemático dependera del cuidado,ingenioy atención que ponga el operador para introducirla.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Factorizar:

$$E = x^6 + 21x^4 + 119x^2 - 1$$

Solución:

En este ejercicio, se trata de hallar dos trinomios cuadrados perfectos. Se puede escribir la expresión como:

$$E = x^6 + 22x^4 + 121x^2 - (x^4 + 2x^2 + 1)$$

factorizando:

$$E = (x^3 + 11x)^2 - (x^2 + 1)^2$$

factorizando la diferencia de cuadrados:

$$E = (x^3 + 11x + x^2 + 1)(x^3 + 11x - x^2 - 1)$$

finalmente:

$$E = (x^3 + x^2 + 11x + 1)(x^3 - x^2 + 11x - 1)$$

2.- Factorizar:

$$E = 4x^4 + 4xy^2 - y^4 + 1$$

Solución:

Se trata de obtener dos trinomios cuadrados perfectos, sumando y restando $4x^2$:

$$E = (4x^4 + 4x^2 + 1) - (4x^2 - 4xy^2 + y^4)$$

factorizando:

$$E = (2x^2 + 1)^2 - (2x - y^2)^2$$

factorizando la diferencia de cuadrados:

$$E = (2x^2 + 1 + 2x - y^2)(2x^2 + 1 - 2x + y^2)$$

finalmente:

$$E = (2x^2 + 2x - y^2 + 1)(2x^2 - 2x + y^2 + 1)$$

3.- Factorizar: $x^3 + y^3 - 3xy + 1$

Solución:

Sumando y restando: $3x^2y$, $3xy^2$:

$$E = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + 1 - 3xy - 3x^2y - 3xy^2$$

Se puede reescribir así:

$$E = (x + y)^3 + 1^3 - 3xy(x + y + 1)$$

factorizando la suma de cubos:

$$E = [(x+y) + 1][(x+y)^2 - (x+y) + 1] - 3xy(x + y + 1)$$

factorizando (x + y + 1):

$$E = (x + y + 1)(x^2 + 2xy + y^2 - x - y + 1 - 3xy)$$

$$E = (x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)$$

4.- Factorizar:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2 - x^5$$

Solución:

Escribiendo como cociente notable:

$$E = \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^2 - x^5$$

común denominador:

$$E = \frac{(1 - x^6)^2 - x^5(1 - x)^2}{(1 - x)^2}$$

efectuando el numerador:

$$E = \frac{1 - 2x^6 + x^{12} - x^5 + 2x^6 - x^7}{(1 - x)^2}$$

reduciendo, agrupando y factorizando:

$$E = \frac{(1 - x^5) - x^7(1 - x^5)}{(1 - x)^2}$$

$$E = \frac{(1- x^5)(1 - x^7)}{(1 - x)^2} = \left(\frac{1- x^5}{1 - x}\right)\left(\frac{1 - x^7}{1 - x}\right)$$

desarrollando por cocientes notables:

$$E = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar "a" para que los polinomios tengan un factor común:

   $x^3 - ax^2 + 19b - a - 4$; $x^3 - (a + 1)x^2 + 23x - a - 7$

   a) 0 b) 4 c) 8

   d) 3 e) -1

2. Indicar la suma de los coeficientes de un factor de:

   $x(x + a)(x + 1)(x^2 + a)$
   $+ (2x^2 + x + a)(x^2 - 2x + a)(x^2 + x + 2a)$

   a) 2 + a b) 1 + a c) 2(1 + a)

   d) 2(a) e) (2 - a)

3. Calcular el número de factores de la siguiente expresión:

   $\{(x + b)^2 + b^2\}^2(x^2 - a^2) + 4x^2y^2(x + b)^2$

   a) 2 b) 6 c) 8

   d) 4 e) 3

4. Indicar el grado de uno de los factores de:

   $x^5 - 2x^3 - x + 1$

   a)1 b) 3 c) 4

   d) 5 e) No se puede factorizar

5. Indicar uno de los factores de la siguiente expresión:

   $(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$
   $+ 2(a^4 + b^4 + c^4)$

   a) $(a^2 + b^2 + c^2)$ b) $(ab + ac + bc)$

   c) $(a + b + c)$ d) No posee factores

   e) abc

6. Indicar el coeficiente de x^2 de uno de los factores de:

   $x(x + 2)(x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 3)$
   $+ 35(x^2 + 2x + 2)^2$

   a) 0 b) 1 c) 2

   d) 5 e) 7

7. Calcular el valor numérico de uno de los factores para x = 1.

   $x^7 + x^6 - x^5 + x^3 + 2x^2 - 1$

   a) 4 b) 3 c) 2

   d) -1 e) 0

8. Calcular el coeficiente de "x^2" en uno de los factores de:

   $x^{12} - 2x^4 - 2x^2 - 3$

   a) 2 b) 1 c) -1

   d) -2 e) 0

9. Calcular el término independiente de uno de los factores de:

$$(x - 5)(x - 7)(x + 6)(x + 4) - 504$$

a) 9 b) 18 c) 6

d) 2 e) 12

10. Determinar "a" y "b" para que los polinomios tengan un factor común de la forma: $x^2 + px + q$:

$$x^3 + ax^2 + 11x + 6 \quad ; \quad x^3 + bx^2 + 14x + 8$$

a) a = 6, b = 7 b) a = 7, b = 6 c) a = 5, b = 6

d) a = 6, b = 5 e) a = 4, b = 8

11. Indicar la suma de los coeficientes de un factor de:

$$(x^4 + 3x^2 + 1)^2 + (2x^2 + 3)^2$$

a) 5 b) 10 c) 3

d) 2 e) 4

12. Calcular el grado de uno de los factores de:

$$x^3y(zx - y^2) + y^3z(xy - z^2) + z^3x(yz - x^2)$$

a) 5 b) 4 c) 3

d) 2 e) 1

13. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$a^3bxy + b^2a^2y^2 - a^2b^2x - 2ab^3xy + a^2x^2y^2 + abxy^3 - abx^3y - b^2x^2y^2$$

a) (ab + 1) b) $a^2 + b^2$ c) $a^2 - b^2$

d) 2 e) 0

14. Dar el término independiente de uno de los factores de 1er. grado de la expresión:

$$4 - 4(y + 3)^2 - (y + 4)(y + 2)^3 + 13(y + 4)^3(y + 2)$$

a) 1 b) 3 c) 10

d) 6 e) 15

15. Calcular el número de factores de la siguiente expresión:

$$(a^2x^2 + 1)(a^2x^2 + 2)(a^2x^2 - 3)(a^2x^2 - 4) - 36$$

a) 2 b) 4 c) 3

d) 5 e) 6

16. Indicar el grado de uno de los factores de:

$$32(a^2 + 4)^5 - (a^2 + 5)^5 - (a^2 + 3)^5$$

a) 4 b) 5 c) 3

d) 1 e) No se puede factorizar

17. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$2p(x^2 + y^2 - xy) - p^2(x - y) - (x - y)(x^2 + y^2)$$

a) p b) p + 1 c) 2p + 1

d) 2p - 1 e) p + 2

18. Calcular el número de factores de la siguiente expresión:

$$(4b^2c^2 - 2ab^2c + a^4)^2 - (4a^2 - bc - a^3b)^2$$

a) 8 b) 7 c) 5

d) 4 e) 3

19. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$x^{10} - 10x^6 + 24x^2 + 14x - 49$$

a) 2 b) 1 c) -2

d) -4 e) 0

20. Indicar el grado de uno de los factores de:

$$(x^3 + x^2y^2 + y^3)^3 - (x^3 + x^3y^3 + y^3)^2$$

a) 3 b) 5 c) 4

d) 6 e) 8

21. Calcular el término independiente de uno de los factores de:

$$(x + 1)(x - 3)(x + 4)(x - 6) + 38$$

a) 2 b) -5 c) 3

d) 9 e) 1

22. Cuántos factores posee la expresión:

$$(x^3 - y^3 + 3xy^2 + 6x^2y)^3 + (y^3 - x^3 + 3xy^2 + 6y^2x)^3$$

a) 8 b) 6 c) 4

d) 2 e) 5

23. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

a) 3 b) 2 c) 0

d) 1 e) -1

24. Indicar el coeficiente de "x" en uno de los factores de:

$$x^5 - x^4 + 2x^2 - 2x + 1$$

a) 1 b) -1 c) 2

d) -2 e) 0

25. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

a) -1 b) +1 c) 2

d) 0 e) -3

26. ¿Cuál es el valor de "a" para que la expresión:

$$10x^2 + (a + 3)xy - (a - 7)y^2 - x + (a - 3)y - 2$$

pueda descomponerse en dos factores?

a) 2 b) 10 C) 4

d)8 e) 6

27. Señalar la suma de los coeficientes de un factor de:

$$(a - b)^2(a - c)^2 + (c - a)^2(c - b)^2 + (b - c)^2(b - a)^2$$

a) 0 b) 2 c) -1

d) 1 e) 3

28. Señalar la suma de los coeficientes de un factor de:

$$x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1)$$

a) 3 b) 2 c) -1

d) 1 e) 0

29. Calcular el coeficiente de 'x" en uno de los factores de:

$$(x - 3)^2(x - 5)(x -) - 5\{(x - 4)(x - 2) + 3\}$$

a) -12 b) 2 c) 3

d) 8 e) 4

30. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$a^5 + b^5 + ab\ (a + b)(a^2 + b^2)$$

a) -2 b) 3 c) -1

d) -3 e) 0

31. Calcular el número de factores de:

$$x^6 + 5x^2 - 6x^4 + 2x^3 - 6x + 1$$

a) 6 b) 5 c) 4

d) 3 e) 2

32. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$xy^4 - x^4y + zy^4 + zx^4 + yz^4 + xz^4$$

a) 2 b) 4 c) 6

d) 3 e) 1

33. Calcular el término independiente de uno de los factores de:

$$(x^2 + 2)(x^2 + 4)(x^2 + 5)(x^2 + 7) - 46x^2(x^2 + 9) - 361$$

a) 80 b) 1 c) 2

d) 3 e) 9

34. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$4(2x + 1)(x + 1)(2x + 3)(x + 2) - 3$$

a) 23 b) 20 c) 14

d) 2 e) 4

35. Calcular el número de factores de:

$$x^6(y^3 - z^3) + y^6(z^3 - x^3) + z^6(x^3 - y^3)$$

a) 9 b) 6 c) 3

d) 4 e) 5

36. Calcular la suma de los coeficientes de uno de los factores:

$$(2a^2 + 3ab - b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)(a^2 + 3ab + 2b^2)$$

a) 2 b) 1 c) 0

d) -1 e) 3

37. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$m(m^2 + mn - 1) - n(n^2 + mn - 1)$$

a) 3 b) -1 c) 2

d) -2 e) -3

38. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$(x^2 + y + 1)^3 - (x^2 + 1)(x^2 - 3y + 1)^2$$

a) a + 1 b) a + 2 c) 3a - 1

d) 1 e) 0

39. Calcular el grado de uno de los factores de:

$$x^{17} + x^2 + 2x + 2$$

a) 3 b) 15 c) 7

d) 5 e) 4

40. Dar el término independiente del factor de 1er. grado de:

$$(2x + 1)^3 + (2x + 2)^3 + (2x + 3)^3 + \dots (2n - 1)\text{terminos}$$

a) n b) 2n c) 2n - 1

d) 2n + 1 e) n^3

41. Señalar un factor de la expresión:

$$(z^{12} - x^6)(x^4 - y^6) + (x^4 - z^8)(x^6 - y^4)$$

a) $x^2y^3 + y^4z^3 + x^4z^2$ b) $x^2y^3 + y^3z^4 + x^2z^4$

c) $x^2y^3 + y^2z^6 + x^3z^3$ d) $x^2y^6 + y^3z^4 + x^2z^4$

e) $x^2y^4 + y^3z^5 + x^4z^4$

42. Reconocer la suma de los factores de la expresión:

$$(x^2 - z^2 + y^2 + 2xy + 1)^2 - 4(x + y)^2$$

a) 3(x + y + z) b) 4(x + y)

c) x + y + z d) x + y - z

e) x + y + 1

43. Factorizar:

$$(x^3 + z^3)^3y^3 + (x^3 - y^3)z^3$$

y dar el número de factores:

a) 6 b) 3 c) 5

d) 4 e) 9

44. Calcular la suma de los coeficientes de un factor de:

$$(y + z - 2x)^4 + (z + x - 2y)^4 + (x + y - 2z)^4$$

a) 1   b) 6   c) -1

d) 3   e) 0

45. Calcular el número de factores de:

$(x - a)^3(b - c)^3 + (x - b)^3(c - a)^3 + (x - c)^3(a - b)^3$

a) 6   b) 5   c) 2

d) 3   e) 4

46. Señalar un factor de:

$6x^2 + 7xy - 5y^2 + 6xz + 23yz - 12z^2 + 5x - 22y + 37z - 21$

a) 3x - 5y + 3x - 7   b) 2x + y + 4z -3

c) 3y - 5x - 3z + 7   d) 2x - y + 4z -3

e) 3x - 5y - 3z -7

47. Señalar un factor de:

$14a^2b^2 + abcd - 3c^2d^2 - 31abef + 17cdef -10e^2f^2 - 22ab + 3cd + 16ef + 8$

a) 7ab + 3cd + 2ef - 4   b) 2ab + cd + 5ef + 2

c) 2ab + cd - 5ef -2   d) 7ab - 3cd - 2ef + 4

e) 2ab - cd - 5ef - 2

48. Calcular un factor de:

$a^3x^3 + a^2x^2b + a^2x^2c + a^2x^2d + abcx + abdx + acdx + bcd$

a) $(ax + b^2)$ b) $ax + c^2$

c) ax + d   d) bx + a

e) bx + c

49. Determinar cuántos factores tiene:

$4x^3y^2z^2 + 6x^4y^2z + 10x^4y^2z^3 - 2x^2y^3z^4 - 9x^3y^3z^3 - 5x^3y^3z^3$

a) 2   b) 3   c) 4

d) 5   e) 6

50. Marcar un factor en:

$a^3(b + c) - c^2(a^2 + b^2) + ab^2(a + b + c) + b^4$

a) a + b   b) $a^2 + c^2$ c) a + b + c

d) a + b - c   e) a + c

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) A	3) D	4) B	5) A	6) C	7) B	8) B	9) C	10) A
11) B	12) D	13) A	14) E	15) C	16) A	17) A	18) D	19) A	20) A
21) B	22) B	23) A	24) B	25) D	26) B	27) A	28) E	29) A	30) B
31) B	32) C	33) A	34) A	35) B	36) A	37) A	38) C	39) B	40) A
41) B	42) B	43) E	44) E	45) A	46) D	47) C	48) C	49) C	50) D

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MULTIPLO

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

De dos o más expresiones algebraicas, es la expresión de mayor grado posible que está contenida como factor, un número entero de veces en dichas expresiones. Para determinar el Máximo Común Divisor se factoriza las expresiones y se forma **EL PRODUCTO DE LOS FACTORES COMUNES CON SU MENOR EXPONENTE.**

MÍNIMO COMÚN MULTIPLO

De dos o más expresiones algebraicas, es la expresión de menor grado posible que contenga un número entero de veces como factor a dichas expresiones. Para determinar el Mínimo Común Múltiplo se factoriza las expresiones y se forma **EL PRODUCTO DE LOS FACTORES COMUNES Y NO COMUNES CON SU MAYOR EXPONENTE.**

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el Máximo Común Divisor y el Mínimo Común Múltiplo de:

$$A = x^5 - ax^4 - a^4x + a^5$$

$$B = x^4 - ax^3 - a^2x^2 + a^3x$$

Solución:

En A:

$$A = x^4(x - a) - a^4(x - a)$$

extrayendo factor común y desarrollando $x^4 - a^4$:

$$A = (x - a)(x^2 + a^2)(x + a)(x - a)$$

$$A = (x - a)^2(x^2 + a^2)(x + a)$$

En B; extrayendo factor común:

$$B = x(x^3 - ax^2 - a^2x + a^3)$$

$$B = x[x^2(x - a) - a^2(x - a)]$$

$$B = x(x - a)(x + a)(x - a)$$

$$B = x(x - a)^2(x + a)$$

Máximo Común Divisor (A,B)

$$(x - a)^2(x + a)$$

Mínimo Común Múltiplo (A,B) :

$$x(x - a)^2(x + a)(x^2 + a^2)$$

2.- Hallar el M.C.D. y el m.c.m. de:

$$A = x^2(x^2 + 2y^2) + (y^2 + z^2)(y + z)(y - z)$$

$$B = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2z^2) + z^4$$

$$C = x^4 + 2x^2z^2 + z^4 - y^4$$

Solución:

Factorizando separadamente cada expresión:

Expesión A:

$$A = x^4 + 2x^2y^2 + (y^2 + z^2)(y^2 - z^2)$$

$$A = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - z^4 = (x^2 + y^2)^2 - (z^2)^2$$

$$A = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 - z^2)$$

Expresión B:

$$B = (x^2 + y^2)^2 + 2z^2(x^2 + y^2) + z^4$$

$$B = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

Expresión C:

$$C = (x^4 + 2x^2z^2 + z^4) - y^4 = (x^2 + z^2)^2 - (y^2)^2$$

$$C = (x^2 + z^2 + y^2)(x^2 + z^2 - y^2)$$

M.C.D. $(A,B,C) = x^2 + y^2 + z^2$

m.c.m.$(A,B,C) = (x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + z^2 - y^2)$

3.- Hallar el M.C.D. y el m. c.m de:

$$A = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$B = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$C = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Solución:

Factorizando cada expresión:

$$A = (x^3 + 2x^2) + (3x^2 + 8x + 4)$$

factorizando por aspa simple el segundo paréntesis;

$$\begin{array}{cc} 3x & +2 \\ x & +2 \end{array}$$

$$A = x^2(x + 2) + (3x + 2)(x + 2)$$
$$= (x + 2)(x^2 + 3x + 2)$$

factorizando por aspa simple el segundo paréntesis:

$$\begin{array}{cc} x & +2 \\ x & +1 \end{array}$$

$$A = (x + 2)(x + 1)(x + 2) = (x + 1)(x + 2)^2$$

Expresión B:

$$B = x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4$$

factorizando por parejas:

$$B = x^2(x - 1) + 4(x^2 - 1)$$

$$B = x^2(x - 1) + 4(x + 1)(x - 1)$$

$$B = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2$$

Expresión C:

$$C = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x^3 + 8) + (6x^2 + 12x)$$

$$C = (x^3 + 2^3) + (6x^2 + 12x)$$

$$C = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 6x(x + 2)$$

$$C = (x + 2)(x^2 - 2x + 4 + 6x) = (x + 2)(x^2 + 4x + 4)$$

$$C = (x + 2)(x + 2)^2$$

$$C = (x + 2)^3$$

De esta manera:

M.C.D. $(A,B,C) = (x + 2)^2$

m.c.m. $(A,B,C) = (x + 2)^3(x + 1)(x - 1)$

4.- Hallar el M.C.D. y el m.c.m. de:

$$A = 4x^4 + 4ax^3 - 36a^2x^2 + 44a^3x - 16a^4$$

$$B = 6x^4 - 6ax^3 - 18a^2x^2 + 30a^3x - 12a^4$$

Solución:

Expresión A:

Factorizando por aspa doble especial:

$$\begin{array}{ccc} 4x^2 & -8ax & +4a^2 \\ x^2 & +3ax & -4a^2 \end{array}$$

$$A = (4x^2 - 8ax + 4a^2)(x^2 + 3xa - 4a^2)$$

para factorizar el segundo paréntesis se desdobla $3xa = 4xa - xa$:

$A = 4(x^2 - 2ax + a^2)\ (x + 4a)(x - a)$

$A = 4(x - a)^2(x + 4a)(x - a)$

$A = 4(x - a)^3(x + 4a)$

Expresión B:

$B = 6x^4 - 6ax^3 - 18a^2x^2 + 30a^3x - 12a^4$

Se factoriza 6 y luego el resto se factoriza por doble aspa:

$$\begin{array}{ccc} x^2 & +ax & -2a^2 \\ x^2 & -2ax & +a^2 \end{array}$$

$B = 6(x^2 + ax - 2a^2)(x^2 - 2xa + a^2)$

$B = 6(x + 2a)(x - a)(x - a)^2 = 6(x + 2a)(x - a)^3$

M.C.D. $(A.B) = 2(x - a)^3$

m.c.m. $(A,B) = 12(x - a)^3(x + 2a)(x + 4a)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar el M.C.D. de los polinomios:

   $A = x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 7x - 1$

   $B = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1$

   $C = x^3 - 6x^2 + 6x - 1$

   a) $x^2 + 5x + 1$ b) $x^2 - 5x - 1$ c) $x^2 - 5x + 1$

   d) $x^2 + x + 1$ e) $x^2 - x + 1$

2. Hallar el M.C.D. de los polinomios:

   $A = 2x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 13x - 21$

   $B = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$

   a) $x^2 + x - 3$ b) $x^2 - x + 3$ c) $2x^2 + x + 3$

   d) $2x^2 - x + 3$ e) $2x^2 + 2x + 3$

3. Hallar el M.C.D. de:

   $A = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 8x + 5$

   $B = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$

   a) $x^2 + x + 5$ b) $x^2 - 3x + 5$ c) $x^2 + 3x + 5$

   d) $x^3 + x + 1$ e) $x^2 - x + 1$

4. Hallar el M.C.D. de:

   $A = x^5 + x + 1$; $B = x^8 + x^4 + 1$; $C = x^6 - 1$

   a) $x^2 - x + 1$ b) $x^2 + x - 1$ c) $x^2 - x - 1$

   d) $x^2 + x + 1$ e) $x^3 + x + 1$

5. Hallar el M.C.D. de:

   $A = x^{12} - y^{12}$; $B = x^8 - y^8$; $C = x^{20} - y^{20}$

   a) $x + y$ b) $x - y$ c) $x^2 + y^2$

   d) $x^2 - y^2$ e) $x^2 + xy + y^2$

6. Hallar el M.C.D. de los polinomios:

   $A = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 7x - 1$

   $B = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1$

   $C = x^4 - 6x^2 + 6x - 1$

   a) $x^2 + 5x - 1$ b) $x^2 - 5x + 1$ c) $x - 1$

   d) $x + 1$ e) $x^2 - x + 1$

7. Sabiendo que el M.C.D. de los polinomios:

   $2x^3 - x^2 + 3x + m$, y , $x^3 + x^2 + n$ es $x^2 - x + 2$

   hallar el valor de m + n.

a) 2 b) 4 c) 6

d) 8 e) 10

8. El producto de dos expresiones es $(x^2 - 1)^2$ y el cociente de su m.c.m. y su M.C.D. es $(x - 1)^2$. Hallar el M.C.D.

a) $x^2 - 1$ b) $x^2 + 1$ c) $x - 1$

d) $x + 1$ e) $(x + 1)^2$

9. Hallar el cociente entre el M.C.D. absoluto y el M.C.D. relativo de los polinomios:

$$6x^3 + x^2 - 4x + 1 \quad y \quad 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$$

a) 64/49 b) 49/64 c) 35/49

d) 49/25 e) 1/49

10. Si $x + y + z + w = 0$ hallar el m.c.m. de:

$$A = xyz^2 - y^2zw - x^2zw + xyw^2$$

$$B = (yzw + zwx + wxy + xyz)^2$$

a) $(xz - yw)(yz - xw)^2(x + w)^2$

b) $(xw - yz)(xz - yz)(xy - zw)$

c) $(zw - xy)(xz - yw)(yz - xw)$

d) Faltan datos

e) Ninguna de las anteriores

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) D	3) C	4) D	5) D
6) B	7) C	8) D	9) A	10) A

FRACCIONES ALGEBRAICAS

PRINCIPALES CONCEPTOS

DEFINICIÓN.-

Una fracción algebraica es aquella expresión que tiene por lo menos una letra en el denominador.

Ejemplos:

i) $\frac{1}{x}$ *ii)* $\frac{2x^2 + 3y^4}{x - z}$

iii) $4x^{-2}y^4z^5$

SIGNOS DE UNA FRACCIÓN

En una fracción se halla tres signos:

1) Signo del numerador

2) Signo del denominador

3) Signo de la fracción

CAMBIOS DE SIGNO EN UNA FRACCIÓN

1) Cuando no hay factores indicados.

En toda fracción, se puede cambiar dos de sus tres signos y la fracción no se altera. Así:

$$F = +\frac{+a}{+b} = -\frac{-a}{+b} = -\frac{+a}{-b} = +\frac{-a}{-b}$$

Ejemplo: Simplificar: $E = \frac{a - b}{b - a}$

Solución:

Cambiando de signo a la fracción y al numerador:

$$E = -\frac{-(a - b)}{b - a} = -\frac{-a + b}{b - a} = -\frac{(b - a)}{(b - a)} = -1$$

2) Cuando la fracción tiene factores indicados.

En toda fracción, si se cambia de signo a un número par de factores, la fracción no se altera; si se cambia de signo a un número impar de factores, la fracción sí cambia de signo. Así:

Ejemplos:

i) Simplificar:

$$E = \frac{(a - b)(a - c)}{(b - a)(c - a)}$$

Solución:

Cambiando de signo a un factor del numerador y a un factor del denominador, se obtiene:

$$E = \frac{(b - a)(a - c)}{(b - a)(a - c)} = +1$$

ii) Simplificar:

$$E = \frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{1}{(a - b)(c - a)}$$

Solución:

Cambiando de signo al factor (c - a) en la segunda fracción, se obtiene:

$$E = \frac{1}{(a - b)(a - c)} - \frac{1}{(a - b)(c - a)} = 0$$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Para simplificar una fracción, se factoriza el numerador y el denominador y se elimina los factores comunes.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Simplificar

$$\frac{x^3 + (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x + a^2b}{x^3 + (a + 2b)x^2 + (b^2 + 2ab)x + ab^2}$$

Solución:

Efectuando operaciones indicadas:

$$\frac{x^3 + 2ax^2 + bx^2 + a^2x + 2abx + a^2b}{x^3 + ax^2 + 2bx^2 + b^2x + 2abx + ab^2}$$

ordenando y factorizando:

$$\frac{x(x^2 + 2ax + a^2) + b(x^2 + 2ax + a^2)}{x(x^2 + 2bx + b^2) + a(x^2 + 2bx + b^2)}$$

Cada paréntesis es un binomio al cuadrado y factorizando:

$$E = \frac{(x + a)^2(x + b)}{(x + b)^2(x + a)}$$

simplificando:

$$E = \frac{x + a}{x + b}$$

2.- Simplificar:

$$\frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)}$$

Solución:

Efectuando operaciones indicadas:

$$\frac{abx^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy}{abx^2 - aby^2 + a^2xy - b^2xy}$$

factorizando:

$$\frac{ax(bx + ay) + by(ay + bx)}{ax(bx + ay) - by(ay + bx)}$$

$$E = \frac{(bx + ay)(ax + by)}{(bx + ay)(ax - by)}$$

simplificando:

$$E = \frac{ax + by}{ax - by}$$

3.- Simplificar:

$$E = \frac{\left(a^2 - \frac{1}{b^2}\right)^n \left(a - \frac{1}{b}\right)^{-2n}}{\left(b^2 - \frac{1}{a^2}\right)^{-n} \left(b + \frac{1}{a}\right)^{2n}}$$

Solución:

Factorizaremos las diferencias de cuadrados en el primer paréntesis del numerador y denominador:

$$E = \frac{\left[\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(a - \frac{1}{b}\right)\right]^n \left(a - \frac{1}{b}\right)^{-2n}}{\left[\left(b + \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{a}\right)\right]^{-n} \left(b + \frac{1}{a}\right)^{2n}}$$

quitando corchetes:

$$E = \frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^n\left(a - \frac{1}{b}\right)^n \left(a - \frac{1}{b}\right)^{-2n}}{\left(b + \frac{1}{a}\right)^{-n}\left(b - \frac{1}{a}\right)^{-n} \left(b + \frac{1}{a}\right)^{2n}}$$

efectuando:

$$E = \frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^n \left(a - \frac{1}{b}\right)^{-n}}{\left(b + \frac{1}{a}\right)^n \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-n}}$$

$$E = \left[\frac{a + \frac{1}{b}}{b + \frac{1}{a}}\right]^n \left[\frac{a - \frac{1}{b}}{b - \frac{1}{a}}\right]^{-n} = \left[\frac{\frac{ab + 1}{b}}{\frac{ab + 1}{a}}\right]^n \left[\frac{\frac{ab - 1}{b}}{\frac{ab - 1}{a}}\right]^{-n}$$

$$E = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

$$E = 1$$

4.- Simplificar:

$$E = \frac{(x + 1)(x^2 - 9)(x - 5) + 27}{(x + 2)(x^2 - 16)(x - 6) + 48}$$

Solución:

Descomponiendo la diferencia de cuadrados:

$$E = \frac{(x + 1)(x + 3)(x - 3)(x - 5) + 27}{(x + 2)(x + 4)(x - 4)(x - 6) + 48}$$

$$E = \frac{(x + 1)(x - 3)(x + 3)(x - 5) + 27}{(x + 2)(x - 4)(x + 4)(x - 6) + 48}$$

efectuando los productos de dos en dos:

$$E = \frac{(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 15) + 27}{(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 24) + 48}$$

haciendo $x^2 - 2x = y$:

$$E = \frac{(y - 3)(y - 15) + 27}{(y - 8)(y - 24) + 48} = \frac{y^2 - 18y + 45 + 27}{y^2 - 32y + 192 + 48}$$

$$E = \frac{y^2 - 18y + 72}{y^2 - 32y + 240} = \frac{(y - 12)(y - 6)}{(y - 20)(y - 12)} = \frac{y - 6}{y - 20}$$

reponiendo valores de y:

$$E = \frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 - 2x -20}$$

5.- Simplificar:

$$E = \frac{(x^2 + 3xy - 4y^2)^4 - (x^2 - 3xy - 4y^2)^4}{(x^2 + 2y^2)^4 - (x^2 - 4y^2)^4 - (6y^2)^4}$$

Solución:

Trabajando con el numerador que es una diferencia de cuadrados:

$$N = [(x^2 + 3xy - 4y^2)^2 + (x^2 - 3xy - 4y^2)^2]$$
$$[(x^2 + 3xy - 4y^2)^2 - (x^2 - 3xy - 4y^2)^2]$$

$$N = \{[(x^2 - 4y^2) + 3xy]^2 + [(x^2 - 4y^2) - 3xy]^2\}$$
$$\{[(x^2 - 4y^2) + 3xy]^2 - [(x^2-4y^2) - 3xy]^2\}$$

aplicando Legendre:

$$N = \{2[(x^2 - 4y^2)^2 + 9x^2y^2]\}\ [4(x^2 - 4y^2)(3xy)]$$

$$N = 24xy(x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 + 9x^2y^2)(x + 2y)(x - 2y)$$

$$N = 24xy(x^4 + x^2y^2 + 16y^4)(x + 2y)(x - 2y)$$

Trabajando con el denominador:

$$D = (x^2 + 2y^2)^4 - (x^2 - 4y^2)^4 - (6y^2)^4$$

haciendo $x^2 + 2y^2 = m$; $6y^2 = n$

$$D = m^4 - (m - n)^4 - n^4 = (m^4 - n^4) - (m - n)^4$$

$$D = (m^2 + n^2)(m + n)(m - n) - (m - n)^4$$

$$D = (m - n)[(m^2 + n^2)(m + n) - (m - n)^3]$$

$$D = (m - n)[(m^3 + m^2n + mn^2 + n^3 - m^3$$
$$+ 3m^2n - 3mn^2 + n^3)]$$

$$D = 2n(m - n)(2m^2 - mn + n^2)$$

reemplazando por sus valores originales:

$$D = 2(6y^2)(x^2 + 2y^2 - 6y^2)[2(x^2 + 2y^2)^2$$
$$- (x^2 + 2y^2)(6y^2) + (6y^2)^2]$$

$$D = 12y^2(x^2 - 4y^2)[2x^4 + 8x^2y^2 + 8y^4 - 6x^2y^2$$
$$- 12y^4 + 36y^4]$$

$$D = 24y^2(x^2 - 4y^2)(x^4 + x^2y^2 + 16y^4)$$

Por lo tanto, observando el numerador y denominador:

$$E = \frac{N}{D}\ ;\quad E = \frac{x}{y}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

SUMA Y RESTA

Para sumar o restar fracciones algebraicas se debe tener en cuenta que:

(1) Se simplifican las fracciones si es necesario.

(2) Se halla el Mínimo Común Múltiplo, determinando el mínimo común denominador de los denominadores.

(3) Se divide el mínimo común denominador entre cada denominador y se multiplica por el numerador respectivo.

(4) Se simplifica la fracción obtenida.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Para multiplicar fracciones se recomienda factorizar numeradores y denominadores y luego multiplicar éstos entre sí.

Para dividir una fracción entre otra, se invierte la fracción que actúa como divisor y se procede como en el caso de la multiplicación.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver:

$$E = \frac{x^a + y^b}{(y^b - z^c)(z^c - x^a)} + \frac{y^b + z^c}{(z^c - x^a)(x^a - y^b)} + \frac{z^c + x^a}{(x^a - y^b)(y^b - z^c)}$$

Solución:

Hallando el mínimo común denominador y sumando:

$$E = \frac{(x^a+y^b)(x^a-y^b)+(y^b+z^c)(y^b+z^c)+(z^c+x^a)(z^c-x^a)}{(z^c - x^a)(y^b - z^c)(x^a - y^b)}$$

Efectuando operaciones indicadas en el numerador:

$$E = \frac{x^{2a} - y^{2b} + y^{2b} - z^{2c} + z^{2c} - x^{2a}}{(z^c - x^a)(y^b - z^c)(x^a - y^b)}$$

reduciendo:

$$E = \frac{0}{(z^c - x^a)(y^b - z^c)(x^a - y^b)}$$

$$E = 0$$

2.- Efectuar:

$$E = \frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}$$

Solución:

Factorizando los numeradores y denominadores:

$$E = \frac{(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)} + \frac{(x + x^2 - 1)(x - x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)} + \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 - x - 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1)}$$

simplificando:

$$E = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} + \frac{x - x^2 + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$E = \frac{x^2 + x - 1 + x - x^2 + 1 + x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$E = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$E = 1$$

3.- Efectuar:

$$E = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a^2 - b^2)} + \frac{b - 2a}{b - a} + \frac{7a}{3(a + b)}$$

Solución:

Cambiando de signos a la segunda fracción:

$$E = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a + b)(a - b)} + \frac{2a - b}{a - b} + \frac{7a}{3(a + b)}$$

dando mínimo común denominador:

$$E = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2 + 3(2a - b)(a + b) + 7a(a - b)}{3(a + b)(a - b)}$$

$$E = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2 + 6a^2 + 3ab - 3b^2 + 7a^2 - 7ab}{3(a^2 - b^2)}$$

$$E = \frac{(a^2 - b^2)}{3(a^2 - b^2)}$$

$$E = \frac{1}{3}$$

4.- Efectuar:

$$E = \frac{a - b}{(b + c - a)(b - c - a)} + \frac{b - c}{(c + a - b)(c - a - b)} + \frac{c - a}{(a + b - c)(a - b - c)}$$

Solución:

Cambiando de signo a los dos factores de la primera fracción:

$$E = \frac{a - b}{(a - b - c)(a - b + c)} - \frac{b - c}{(a - b + c)(a + b - c)} + \frac{c - a}{(a + b - c)(a - b - c)}$$

dando común denominador:

$$E = \frac{(a-b)(a+b-c)-(b-c)(a-b-c)+(c-a)(a-b+c)}{(a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

efectuando operaciones en el numerador:

$$E = \frac{a^2 - b^2 - ac + bc + b^2 - c^2 - ab + ac + c^2 - a^2 - bc + ab}{(a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

reduciendo términos semejantes:

$$E = \frac{0}{(a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

$$E = 0$$

5.- Simplificar:

$$E = \frac{4a^2 - 1}{(a - b)(a - c)} + \frac{4b^2 - 1}{(b - c)(b - a)} + \frac{4c^2 - 1}{(c - a)(c - b)}$$

Solución:

Cambiando de signo a un factor de la segunda fracción y a los dos factores de la tercera fracción.

$$E = \frac{4a^2 - 1}{(a - b)(a - c)} - \frac{4b^2 - 1}{(b - c)(a - b)} + \frac{4c^2 - 1}{(a - c)(b - c)}$$

dando común denominador:

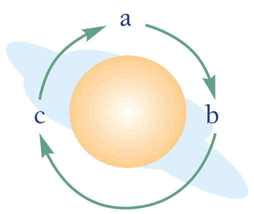
$$E = \frac{(4a^2 - 1)(b - c) - (4b^2 - 1)(a - c) + (4c^2 - 1)(a - b)}{(a - b)(a - c)(b - c)}$$

Factoricemos el numerador por el método de los polinomios simétricos.

para $a = b$

$$V.N. = (4b^2 - 1)(b - c) - (4b^2 - 1)(b - c) + (4c^2 - 1)(b - b) = 0$$

por lo tanto, un factor es $a - b$ y los otros son:



$(b - c)(c - a)$

realizando la identidad de polinomios:

$$(4a^2 - 1)(b - c) - (4b^2 - 1)(a - c) + (4c^2 - 1(a - b) \equiv M(a - b)(b - c)(c - a)$$

para $a = 1, \; b = 2, \; c = 0$

$$(4 - 1)(2) - (15)(1) + (-1)(-1) = M(-1)(2)(-1)$$

$$6 - 15 + 1 = M(2) \qquad M = -4$$

de esta manera:

$$N = -4(a - b)(b - c)(c \; -a)$$

$$N = 4(a - b)(b - c)(a - c)$$

Finalmente:

$$E = \frac{4(a - b)(a - c)(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)}$$

$$E = 4$$

6.- Si se cumple que:

$$\frac{x}{q + r - p} = \frac{y}{r + p - q} = \frac{z}{p + q - r}$$

Calcular: $E = (q - r)x + (r - p)y + (p - q)z$

Solución:

Cuando se tiene una serie de razones se acostumbra a igualarlas a una constante; sea ésta igual a "t".

$$\frac{x}{q+r-p} = \frac{y}{r+p-q} = \frac{z}{p+q-r} = t$$

de aquí:
$$x = (q + r - p)t$$
$$y = (r + p - q)t$$
$$z = (p + q - r)t$$

reemplazando en E :

$$E = (q - r)[(q + r) - p]t + (r - p)[(r + p) - q]t + (p - q)[(p + q) - r]t$$

efectuando y factorizando t:

$$E = t(q^2 - r^2 - pq + rp + r^2 - p^2 - qr + pq + p^2 - q^2 - rp + qr)$$

$$E = t(0)$$

$$E = 0$$

7.- Si se cumple que:

$$\sqrt{a\sqrt{bc}} + \sqrt{b\sqrt{ac}} + \sqrt{c\sqrt{ab}} = 0$$

calcular: $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{ac}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[4]{ab}} \qquad (1)$$

Solución:

Trabajando con la condición:

$$\sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{b^2ac} + \sqrt[4]{abc^2} = 0$$

dividiendo por $\sqrt[4]{abc}$, se tiene:

$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} = 0 \qquad (2)$$

En (1), dando común denominador:

$$E = \frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{b}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{c}\right)^3}{\sqrt[4]{abc}} \qquad (3)$$

De (2): $$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{c} \qquad (\alpha)$$

elevando al cubo:

$$\left(\sqrt[4]{a}\right)^3 + 3\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 . \left(\sqrt[4]{b}\right) + 3\left(\sqrt[4]{a}\right)\left(\sqrt[4]{b}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{b}\right)^3 = -\left(\sqrt[4]{c}\right)^3$$

$$\left(\sqrt[4]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{b}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{c}\right)^3 = -3\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right) \qquad (\beta)$$

reemplazando (α) en (β):

$$\left(\sqrt[4]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{b}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{c}\right)^3 = -3\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{b}\right)\left(-\sqrt[4]{c}\right) = 3\sqrt[4]{abc}$$

reemplazando en (3):

$$E = \frac{3\sqrt[4]{abc}}{\sqrt[4]{abc}}$$

$$E = 3$$

8.- Si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$; calcular:

$$E = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{ax + by + cz}$$

Solución:

Igualando la condición a "t":

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = t$$

de aquí:
$$x = at$$
$$y = bt$$
$$z = ct$$

reemplazando en E:

$$E = \frac{a^2t + b^2t + c^2t}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{a^2t^2 + b^2t^2 + c^2t^2}{a^2t + b^2t + c^2t}$$

factorizando:

$$E = \frac{t(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{t^2(a^2 + b^2 + c^2)}{t(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$E = t - t$$

$$E = 0$$

9.- Calcular:

$$E = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

si a + b + c = 0

Solución:

De la condición: b + c = -a

elevando al cuadrado:

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2 - 2bc \qquad (1)$$

También, pro la condición: c + a = -b

elevando al cuadrado:

$$c^2 + 2ac + a^2 = b^2$$

$$c^2 + a^2 = b^2 - 2ac \qquad (2)$$

De la misma manera: a + b = -c

elevando al cuadrado:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab \qquad (3)$$

reemplazando (1), (2) y (3) en E:

$$E = \frac{1}{a^2 + 2bc - a^2} + \frac{1}{b^2 + 2ac - b^2} + \frac{1}{a^2 + 2bc - c^2}$$

$$E = -\frac{1}{2bc} - \frac{1}{2ac} - \frac{1}{2ab}$$

dando común denominador:

$$E = \frac{-a - b - c}{2abc} = \frac{-(a + b + c)}{2abc}$$

por la condición:

$$E = -\frac{0}{2abc}$$

$$E = 0$$

10.- Efectuar:

$$E = \cfrac{n}{n + \cfrac{n-1}{n - 1 + \cfrac{n-2}{n - 2 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{2}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}$$

Solución:

Tratando de hallar una ley de formación, empezando por el final, sucesivamente se obtiene:

1) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{1 + 1}{1 + 2}$; n = 1

2) $\dfrac{2}{2 + \dfrac{2}{3}} = \dfrac{2}{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{2 + 1}{2 + 2}$; n = 2

3) $\dfrac{3}{3 + \dfrac{6}{8}} = \dfrac{3}{\dfrac{30}{8}} = \dfrac{24}{30} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{3 + 1}{3 + 2}$; n = 3

4) $\dfrac{4}{4 + \dfrac{6}{5}} = \dfrac{4}{\dfrac{24}{5}} = \dfrac{20}{24} = \dfrac{5}{6} = \dfrac{4 + 1}{4 + 2}$; n = 4

por lo anterior se deduce que:

$$E = \frac{n + 1}{n + 2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular:

$$\frac{x}{(x-y)(z-x)}+\frac{y}{(y-z)(x-y)}+\frac{z}{(z-y)(y-z)}$$

a) 1 b) -1 c) 0

d) xyz e) x + y + z

2. Calcular:

$$A=\frac{a+b}{ax+by}+\frac{a-b}{ax-by}-\frac{2(a^2x+b^2y)}{a^2x^2+b^2y^2}-\frac{4(a^4x^3-b^4y^3)}{a^4x^4-b^4y^4}$$

a) 1 b) 0 c) a + b + c

d) abc e) -1

3. Calcular: $E=\frac{x+a}{b-x}+\frac{x-b}{b+x}+\frac{2ab+2b^2}{x^2-b^2}$

para $x=\frac{ba^2+a+b}{ab}$

a) $\frac{2ab}{ab+1}$ b) 2ab c) ab + 1

d) a + b e) 1

4. Hallar el valor de:

$$E=\left\{\frac{2x+y}{2x-y}+\frac{2x-y}{2x+y}\right\}\left\{\frac{2x+y}{2x-y}-\frac{2x-y}{2x+y}\right\}(4x^2-y^2)$$

si x é y verifican: $2\left(\frac{x}{y}\right)=\sqrt{\frac{1+xy}{1-xy}}$

a) 4 b) 16 c) 2

d) 1 e) -4

5. Calcular:

$$E=\frac{\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}{\left[\frac{(x+y)^2-xy}{(x-y)^2+xy}\right]\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)}$$

a) $\frac{x+y}{x-y}$ b) $\frac{x-y}{x+y}$ c) x + y

d) x - y e) 1

6. Calcular:

$$E=\left[\frac{\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}}\right]^{-1}\cdot\frac{1}{x^3}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) 1

d) 4 e) -1

7. Dar el valor de la fracción:

$$A=\frac{(x^2+y^2+z^2)xy^2}{x^5+y^5+z^5}$$

para x = a - b
y = b - c
z = c - a

a) 4/5 b) 2/5 c) 5

d) 2 e) 3

8. Simplificar:

$$\frac{(x^2+6x+4)(x+4)^2+(x+3)^2}{(x+3)^2(x^2+6x+4)+1}$$

dar el numerador:

a) x^2+x+1 b) x^2-x-1 c) x^2-x+1

d) x^2+x-1 e) x^2+1

9. Simplificar la fracción:

$$\left\{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\dots}}}\right\}\div\left\{n+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\dots}}}\right\}$$

a) mn b) m/n c) n/m

d) m e) n

10. Si a, b y c son números enteros que cumplen la relación a + b + c = 0, dar el valor de la fracción:

$$E = \frac{a^9 + b^9 + c^9 - 3a^3b^3c^3}{9abc}$$

a) $(b^2 + bc + c^2)^3$ b) $(a + b + c)^3$

c) $(ab + ac + bc)^2$ d) $(a^2 + b^2 + c^2)^3$

e) $(a^2 - ac + c^2)^2$

11. Efectuar:

$$\frac{(a + c - b + x)(a + b - c + x)}{(b - a)(c - a)} + \frac{(b + c - a + x)(a + b - c + x)}{(c - b)(a - b)} + \frac{(b + c - a + x)(a + c - b + x)}{(a - c)(b - c)}$$

a) 4abc b) ab + bc + ac

c) a + b + c d) 0

e) 1

12. Calcular el valor de la fracción F si:

$$\frac{x}{b + c - a} = \frac{y}{c + a - b} = \frac{z}{a + b - c}$$

siendo $F = \dfrac{2(ax + by + cz)(x + y + z)}{x(y + x) + y(x + z) + z(x + y)}$

a) a + b + c b) a + b - c c) a - b + c

d) b - a + c e)1

13. Calcular:

$$A = \frac{[(x + x^{-1})^2 + (x - x^{-1})^2]^2 - 4(x + x^{-1})^2(x - x^{-1})^2}{(x^4 + x^{-4})^2 - (x^4 - x^{-4})^2}$$

a) -1 b) 2 c) 4

d) 1 e) 0

14. Sabiendo que se cumple que:

$$ax + by + cz = 0$$

simplificar la expresión:

$$E = \frac{(ay + bx)^2 + (cx + az)^2 + (bz - ay)^2}{x(a + x) + y(b + y) + z(c + z)}$$

a) a + b + c b) ab + ac + bc

c) $a^2 + b^2 + c^2$ e) 1

e) 0

15. Simplificar y hallar el valor de:

$$E = \frac{x^3 + (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x + a^2b}{x^3 + (a + 2b)x^2 + (2ab + b^2)x + ab^2} \cdot \sqrt{\frac{(b - a)(b + a + 2x)}{a^2 + 2ax + x^2} + 1}$$

a) 1 b) 4 c) 2

d) 3 e) 6

16. Conociendo el valor de a + b + c = 2p, calcular:

$$E = \frac{abc}{(p - a)(p - b)(p - c)} - \frac{a}{(p - a)} - \frac{b}{(p - b)} - \frac{c}{(p - c)}$$

a) 1 b) 2 c) 3

d) 0 e) -4

17. Si: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$, calcular el valor de:

$$\frac{x^3 + a^3}{x^2 + a^2} + \frac{y^3 + b^3}{y^2 + b^2} + \frac{z^3 + c^3}{z^2 + c^2} - \frac{(x + y + z)^3 + (a + b + c)^3}{(x + y + z)^2 + (a + b + c)^2}$$

a) 1 b) x + a c) x + b

d) x + c E) 0

18. Sabiendo que:

$$(x + y + z + w)\,(m + n + p + q) = 5329 \text{ y que:}$$

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{w}{q} \quad \text{Hallar el valor de:}$$

$$E = 3\left[\sqrt{x\,.\,m} + \sqrt{y\,.\,n} + \sqrt{z\,.\,p} + \sqrt{w\,.\,q}\right]$$

a) 3 b) 12 c) 219

d) 73 e) 1

19. Si se cumple que:

$$\frac{\dfrac{m}{(a-b)^2} + \dfrac{n}{(a+c)^2}}{a} = \frac{\dfrac{n}{(b+c)^2} + \dfrac{l}{(a-b)^2}}{b}$$

$$= \frac{\dfrac{l}{(a+c)^2} + \dfrac{m}{(b-c)^2}}{c}$$

Calcular: $E = \dfrac{al + bm}{cn}$

a) 1 b) 4 c) 3

d) 0 e) 2

20. Simplificar:

$$\frac{\dfrac{xy}{ab} + \dfrac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} + \dfrac{(x-b)(y-b)}{b(b-a)}}{\dfrac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(c-a)} + \dfrac{(1+ab)(1+bc)}{(b-a)(c-b)} + \dfrac{(1+ac)(1+bc)}{(c-a)(b-c)}}$$

a) a/b b) abc c) a +b + c

d) 1 e) 0

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) B	3) A	4) B	5) B
6) A	7) B	8) A	9) B	10) A
11) E	12) A	13) C	14) A	15) A
16) B	17) E	18) C	19) A	20) D

INTRODUCCIÓN EL BINOMIO DE NEWTON

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Factorial de un número “n” es el producto indicado de todos los números consecutivos desde “1” hasta “n”. Se representa así:

$\lfloor\underline{n}$ ó n! y se lee factorial de “n”

Por definición:

$$\lfloor\underline{n} = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . \ldots . n \quad ó$$

$$\lfloor\underline{n} = n(n - 1)(n - 2) . \ldots . 3 . 2 . 1$$

Ejemplos:

i) $\lfloor\underline{5} = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ii) $\lfloor\underline{7} = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 = 5\,040$

iii) $\lfloor\underline{8} = 8 . \overbrace{7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1}$

$= 8 \lfloor\underline{7} = 8 . 5\,040 = 40\,320$

iv) $\dfrac{\lfloor\underline{9}\,\lfloor\underline{12}}{\lfloor\underline{8}\,\lfloor\underline{11}} = \dfrac{9\lfloor\underline{8}\quad 12\lfloor\underline{11}}{\lfloor\underline{8}\quad \lfloor\underline{11}} = 9 . 12 = 108$

PROPIEDADES DE LOS FACTORIALES

1º Si el $\lfloor\underline{n}$ existe, el valor de “n” es entero y positivo.

2º El factorial de 0 es 1 y el factorial de 1 es 1 es decir 0! = 1 y 1! = 1.

3º Si el factorial de un número es igual a otro, entonces los números son iguales, es decir:

$$\lfloor\underline{a} = \lfloor\underline{b} \quad \therefore \quad a = b$$

4º En factoriales se debe tener en cuenta que:

a) $\lfloor\underline{a \pm b} \neq \lfloor\underline{a} \pm \lfloor\underline{b}$

b) $\lfloor\underline{a . b} \neq \lfloor\underline{a} . \lfloor\underline{b}$

c) $\left\lfloor\underline{\dfrac{a}{b}}\right. \neq \dfrac{\lfloor\underline{a}}{\lfloor\underline{b}}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Simplificar:

$$E = \frac{\lfloor\underline{n} + \lfloor\underline{n - 1} + \lfloor\underline{n + 1}}{\lfloor\underline{n} + \lfloor\underline{n + 2} - n(n + 2)\lfloor\underline{n - 1}}$$

Solución:

Descomponiendo previamente los factoriales hasta $\lfloor\underline{n - 1}$:

$$\lfloor\underline{n} = n\lfloor\underline{n - 1}$$

$$\lfloor\underline{n + 1} = (n + 1)n\lfloor\underline{n - 1}$$

$$\lfloor\underline{n + 2} = (n + 2)(n + 1)n\lfloor\underline{n - 1}$$

reemplazando en la expresión:

$$E = \frac{n\lfloor\underline{n - 1} + \lfloor\underline{n - 1} + (n + 1)n\lfloor\underline{n - 1}}{n\lfloor\underline{n - 1} + (n + 2)(n + 1)n\lfloor\underline{n - 1} - n(n + 2)\lfloor\underline{n - 1}}$$

factorizando:

$$E = \frac{\lfloor\underline{n - 1}(n + 1 + n^2 + n)}{n\lfloor\underline{n - 1}(1 + n^2 + 3n + 2 - n - 2)}$$

reduciendo y simplificando:

$$E = \frac{\lfloor\underline{n-1}\quad (n+1)^2}{n\lfloor\underline{n-1}\quad (n+1)^2} = \frac{1}{n}$$

$$E = n^{-1}$$

2.- Simplificar:

$$E = \frac{n^{n!+1} \,.\, (n-1)!^{(n+1)!}}{(n-1)!^{n!n}\; n!^{n!}}$$

Solución:

Descomponiendo los factores previamente hasta $(n - 1)!$:

$$n! = (n-1)!n$$

$$(n+1)! = (n-1)!n(n+1)$$

haciendo $(n - 1)! = a$:

$$E = \frac{n^{na+1} \,.\, (a)^{(n+1)na}}{a^{n^2a} \,.\, (an)^{an}}$$

efectuando:

$$E = \frac{n^{na} \,.\, n \,.\, a^{n^2a} \,.\, a^{na}}{a^{n^2a} \,.\, a^{an} \,.\, n^{an}}$$

$$E = n$$

3.- Calcular el valor de "n" en:

$$\left(\frac{1}{2^{n-2}}\right)\left(\frac{\lfloor\underline{2n}}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, \dots \,.\, (2n-1)}\right) = 2\,880$$

Solución:

Con la finalidad de introducir un factorial en el denominador, se multiplica y divide por:

$$A = 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, \dots \,.\, (2n)$$

$$A = (2 \,.\, 1)(2 \,.\, 2)(2 \,.\, 3)(2 \,.\, 4)(2 \,.\, 5). \dots .(2 \,.\, n)$$

$$A = \underbrace{(2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, \dots \,.\, 2)}_{\text{"n" factores}}(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, \dots \,.\, n)$$

esta expresión se puede reescribir así:

$$A = 2^n \,.\lfloor\underline{n}$$

luego, la expresión inicial sera:

$$\left(\frac{1}{2^{n-2}}\right)\left(\frac{\lfloor\underline{2n} \,.\, 2^n \lfloor\underline{n}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, \dots \,.\, 2n}\right) = 2\,880$$

$$\frac{1}{\dfrac{2^n}{2^2}} \cdot \frac{\lfloor\underline{2n} \,.\, 2^n \lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{2n}} = 2\,880$$

simplificando:

$$4 \lfloor\underline{n} = 2\,880$$

$$\lfloor\underline{n} = 720 = \lfloor\underline{6}$$

$$\therefore \quad n = 6$$

4.- Calcular "n" en:

$$(720!^{119!})^{5!} = 719!^{n!!} \,.\, 6!^{n!!}$$

Solución:

Como: $5! = 120$

$6! = 720$

reemplazando y efectuando:

$$(720!)^{119!120} = (719!)^{n!!}\;(720)^{n!!}$$

$$(720!)^{120!} = (719! \,.\, 720)^{n!!}$$

$$(720!)^{120!} = (720!)^{n!!}$$

igualando exponentes:

$$120! = n!!$$

como $120 = 5!$:

$$n!! = 5!!$$

de donde: $n = 5$

5.- Calcular "n" en:

$$n^2 \lfloor\underline{n-1} + (2n^2 - 3n + 1)\lfloor\underline{n-2} + (n^2 - 3n + 2)\lfloor\underline{n-3} = \frac{\lfloor\underline{3n-120}}{n+1}$$

Solución:

Factorizando por el aspa los paréntesis:

(1) $2n^2 - 3n + 1 = (2n - 1)(n - 1)$

(2) $n^2 - 3n + 2 = (n - 1)(n - 2)$

reemplazando:

$$n \,.\, n\lfloor\underline{n-1} + (2n-1)(n-1)\lfloor\underline{n-2} + (n-1)(n-2)\lfloor\underline{n-3} = \frac{\lfloor\underline{3n-120}}{n+1}$$

pero:

$(n-1)\lfloor\underline{n-2} = \lfloor\underline{n-1}$

$(n-1)(n-2)\lfloor\underline{n-3} = (n-1)\lfloor\underline{n-2} = \lfloor\underline{n-1}$

reemplazando:

$$n^2\lfloor\underline{n-1} + (2n-1)\lfloor\underline{n-1} + \lfloor\underline{n-1} = \frac{\lfloor\underline{3n-120}}{n+1}$$

factorizando:

$$\lfloor\underline{n-1}\,(n^2 + 2n - 1 + 1) = \frac{\lfloor\underline{3n-120}}{n+1}$$

transponiendo, simplificando y factorizando:

$(n+2)(n+1)\,n\lfloor\underline{n-1} = \lfloor\underline{3n-120}$

El primer miembro es $\lfloor\underline{n+2}$; luego:

$\lfloor\underline{n+2} = \lfloor\underline{3n-120}$

de aquí:

$$n + 2 = 3n - 120$$

$$n = 61$$

VARIACIONES

Cada una de las ordenaciones, coordinaciones o arreglo que puede formarse, tomando algunos o todos los elementos de un conjunto de objetos, se llama una variación. Se puede diferenciar dos de ellas, bien en un objeto o bien en una diferente ordenación de los objetos.

FÓRMULA DEL NÚMERO DE VARIACIONES DE "n" ELEMENTOS TOMADOS DE "r" EN "r".

Equivale a calcular el número de maneras de que podemos llenar "r" lugares cuando se tiene "n" objetos diferentes a nuestra disposición, lo cual se logra con la fórmula siguiente:

$$V_r^n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$$

Donde:

V_r^n : son variaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r"

n : el número total de elementos por agrupar

r : el número de elementos (ó lugares) que conforman un grupo.

Ejemplo: Sean los elementos a, b, c, d, ¿cuántas variaciones se puede formar tomando las letras de 2 en 2?

Solución:

Formemos los grupos:

ab, ac, ad, bc, bd, cd

ba, ca, da, cb, db, dc

total serán 12.

Aplicando la fórmula, donde n = 4, r = 2:

$$V_2^4 = \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{4-2}} = \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}} = \frac{4\,.\,3\lfloor\underline{2}}{\lfloor\underline{2}} = 12$$

PERMUTACIONES

Se llama permutaciones de "n" objetos, a los diferentes grupos que con ellos se puede formar, de manera que participando "n" objetos en cada grupo, difieran solamente en el orden de colocación. El número de permutaciones de "n" objetos será:

$$P_n = \lfloor\underline{n}$$

donde:

"n" es el número de objetos.

Ejemplo.- Hallar el número de permutaciones de tres letras: a,b,c.

Solución:

Los grupos serán:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Utilizando la fórmula:

$$P_3 = \lfloor\underline{3} = 1\,.\,2\,.\,3 = 6$$

COMBINACIONES

Se llama así a los diferentes grupos que se puede formar con "n" elementos tomándolos todos a la vez o de "r" en "r" de modo que los grupos se diferencien por lo menos en un elemento. Para determinar el número de combinaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r" se utiliza la siguiente fórmula:

$$C_r^n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{n-r}}$$

C_r^n : combinaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r".

n : número total de elementos.

r : el número de elementos que conforman cada grupo.

Ejemplo.- ¿De cuántas maneras se puede combinar 5 elementos tomados de 2 en 2?

Solución:

Sean los 5 elementos a, b, c, d, e.

Los grupos serán:

ab, ac, ad, ae

bc, bd, be

cd, ce

de

El número total de grupos formado es 10.

Aplicando la fórmula:

$$C_2^5 = \frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{2}\ \lfloor\underline{5-2}}$$

$$C_2^5 = \frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{2}\ \lfloor\underline{3}} = \frac{5\,.\,4\lfloor\underline{3}}{2\,.\,1\lfloor\underline{3}} = 10$$

PROPIEDADES DE LAS COMBINACIONES

1º Combinaciones Complementarias.

Se dice que 2 combinaciones son complementarias cuando el número de combinaciones, de "n" elementos tomados de "r" en "r", es igual al número de combinaciones de "n" elementos tomados de "n - r" en "n - r". Es decir:

$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

CONSECUENCIA IMPORTANTE

Si se cumple que:

$$C_r^n = C_p^n$$

tomando combinaciones complementarias:

$$C_r^n = C_p^n = C_{n-p}^n$$

Luego por lo tanto:

a) r = p

b) r = n - p

r + p = n

2º Suma de Combinaciones.

Demostraremos la siguiente relación:

$$C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$$

Utilizando la fórmula de combinaciones:

$$C_r^n + C_{r+1}^n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{n-r}} + \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r+1}\ \lfloor\underline{n-r-1}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{n}\,(r+1) + \lfloor\underline{n}\,(n-r)}{\lfloor\underline{r+1}\ \lfloor\underline{n-r}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{n}\,(r+1+n+r)}{\lfloor\underline{r+1}\ \lfloor\underline{n-r}} = \frac{\lfloor\underline{n}\,(n+1)}{\lfloor\underline{r+1}\ \lfloor\underline{n-r}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{n+1}}{\lfloor\underline{r+1}\ \lfloor\underline{n-r}}$$

$$C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$$

3º Propiedad sobre los índices.

Si el C_r^n existe, luego:

a) n y r son números enteros positivos

b) n > r

4º Degradación de índices.

Consiste en descomponer un número combinatorio en otro que tenga como índice superior uno menor que el original y como índice inferior al inmediato inferior. Es decir:

$$C_r^n = \frac{n}{r}\,C_{r-1}^{n-1}$$

Demostración.-

$$C_r^n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{n-r}} = \frac{n\lfloor\underline{n-1}}{r\lfloor\underline{r-1}\ \lfloor\underline{n-r}}$$

$$C_r^n = \left(\frac{n}{r}\right)\frac{\lfloor n-1}{\lfloor r-1\,\lfloor n-1} = \frac{n}{r}\,C_{r-1}^{n-1}$$

Ejemplo.- Hallar el valor de "n" en la siguiente igualdad:

$$2\,C_4^n = 5\,C_3^{n-1}$$

Solución:

Se sabe que:

$$C_r^n = \frac{n}{r}\,C_{r-1}^{n-1}$$

aplicando lo anterior:

$$2\left(\frac{n}{4}\right)C_3^{n-1} = 5\,C_3^{n-1}$$

Simplificando:

$$2\left(\frac{n}{4}\right) = 5$$

$$\frac{n}{2} = 5$$

$\therefore \quad n = 10$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- ¿Cuántos números diferentes de 6 cifras puede formarse con los 9 dígitos 1, 2, 3, …, 9 y en los cuales no se repita ningún número?

Solución:

En este caso interesa el orden en el cual están dispuestos los 6 dígitos, por lo cual se trata de variaciones:

$$V_6^9 = \frac{\lfloor 9}{\lfloor 9-6} = \frac{\lfloor 9}{\lfloor 3} = \frac{9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4\,\lfloor 3}{\lfloor 3}$$

$$V_6^9 = 60{,}480$$

Rpta.: 60,480 números

2.- ¿De cuántas maneras diferentes puede acomodarse 7 personas en un banco?

Solución:

En el caso hay que considerar el orden en el cual están dispuestas las personas y cómo entran en todas ellas; por lo tanto se trata de permutaciones.

$$P_7 = 7! = 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 5\,040$$

Rpta.: 5 040 maneras.

3.- Si una cuadrilla tiene 14 hombres, ¿de cuántas maneras pueden seleccionarse 11?

Solución:

Interesa seleccionar 11 hombres de 14 sin interesar el orden, se trata entonces de una combinación.

$$C_{11}^{14} = \frac{\lfloor 14}{\lfloor 11\,\lfloor 3} = \frac{14 \,.\, 13 \,.\, 12\,\lfloor 11}{\lfloor 11 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 364$$

Rpta.: 364 selecciones.

4.- Hallar el número de personas que asistieron a una reunión si al despedirse se contó 78 apretones de manos.

Solución:

Sean "n" las personas que habían en la reunión. Para poder contar un apretón de manos es necesario que dos personas se den la mano, luego si se quiere contar el número total de apretones de manos, será necesario combinar a las "n" personas de 2 en 2.

$$C_2^n = 78$$

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor 2 \quad n-2} = 78$$

$$\frac{n(n-1)\,\lfloor n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, \lfloor n-2} = 78$$

$n(n-1) = 156 = 13 \,.\, 12$

Por comparación: $n = 13$

Rpta.: Asistieron 13 personas.

5.- Calcular el valor de "x" que satisface la igualdad:

$$V_2^x \,.\, C_2^x = 450$$

Solución:

Utilizando las fórmulas conocidas:

$$\frac{\lfloor x}{x-2} \cdot \frac{\lfloor x}{\lfloor 2\,\lfloor x-2} = 450$$

$$\frac{x(x-1)\,\lfloor x-2}{\lfloor x-2} \cdot \frac{x(x-1)\,\lfloor x-2}{1 \,.\, 2 \quad \lfloor x-2} = 450$$

$x^2(x-1)^2 = 900$

$x(x-1) = 30$

$x(x-1) = 6 \,.\, 5$

Por comparación: $x = 6$

6.- Calcular "n" y "p" en la siguiente igualdad:

$$C_{p-2}^{2n} = C_{10-p}^{2n}$$

Solución:

Se sabe que $C_r^m = C_s^m$, de aquí:

a) $r = s$

b) $r + s = m$

aplicando esta teoría al ejercicio propuesto:

a) $p - 2 = 10 - p$

$2p = 12$

$\therefore \quad p = 6$

b) $p - 2 + 10 - p = 2n$

$8 = 2n$

$\therefore \quad 4 = n$

Rpta.: $p = 6,\ n = 4$

7.- Calcular "n" en:

$$\frac{C_2^n + C_3^{n+1}}{C_4^{n+2}} = \frac{7}{5}$$

Solución:

Degradando los índices:

$$C_3^{n+1} = \left(\frac{n+1}{3}\right) C_2^n$$

$$C_4^{n+2} = \left(\frac{n+2}{4}\right) C_3^{n+1} = \left(\frac{n+2}{4}\right)\left(\frac{n+1}{3}\right) C_2^n$$

reemplazando y factorizando:

$$\frac{C_2^n\left(1 + \frac{n+1}{3}\right)}{\left(\frac{n+2}{4}\right)\left(\frac{n+1}{3}\right) C_2^n} = \frac{7}{5}$$

simplificando:

$$\frac{\frac{n+4}{3}}{\frac{(n+2)(n+1)}{12}} = \frac{7}{5}$$

$$4(n+4)(5) = 7(n+2)(n+1)$$

$$20n + 80 = 7n^2 + 21n + 14$$

igualando a cero:

$$7n^2 + n - 66 = 0$$

factorizando por el método del aspa simple:

$$\begin{array}{ccc} 7n & & +22 \\ n & & -3 \end{array} \qquad (7n + 22)(n - 3) = 0$$

igualando a cero cada factor, se obtiene:

$$n = 3 \quad y \quad n = -\frac{22}{7}$$

Dado que "n" debe ser entero; entonces:

Rpta.: $n = 3$

8.- Calcular "x" en:

$$C_{20}^{x-2} + C_{22}^{x-1} + C_{21}^{x-2} + C_{21}^{x} - C_{22}^{2x-21} = C_{21}^{2x-21}$$

Solución:

Agrupemos de la siguiente manera:

$$\left(C_{20}^{x-2} + C_{21}^{x-1}\right) + C_{22}^{x-2} + C_{21}^{x} = \left(C_{21}^{2x-21}\right) + \left(C_{22}^{2x-21}\right)$$

aplicando la propiedad de suma de combinaciones los paréntesis reiteradamente; y agrupando de nuevo:

$$\left(C_{21}^{x-1} + C_{22}^{x-1}\right) + C_{21}^{x} = C_{22}^{2x\ 20}$$

$$C_{22}^{x} + C_{21}^{x} = C_{22}^{2x-20}$$

finalmente: $C_{22}^{x+1} = C_{22}^{2x-20}$

identificando índices superiores:

$$x + 1 = 2x - 20$$

$$x = 21$$

9.- Calcular x e y ,si:

a) $C^{x}_{y-1} = C^{x}_{y}$

b) $4C^{x}_{y} = 5\,C^{x}_{y-2}$

Solución:

En la primera condición, desarrollando:

$$C^{x}_{y-1} = C^{x}_{y}$$

$$\frac{\lfloor\underline{x}}{\lfloor\underline{y-1}\;\lfloor\underline{x-y+1}} = \frac{\lfloor\underline{x}}{\lfloor\underline{y}\;\;\lfloor\underline{x-y}}$$

simplificando y descomponiendo los factoriales:

$$\frac{1}{\lfloor\underline{y-1}\,(x\;-y+1)\lfloor\underline{x-y}} = \frac{1}{y\;\;\lfloor\underline{y-1}\;\;\lfloor\underline{x-y}}$$

simplificando se llega a:

$$x - y + 1 = y$$

$$x = 2y - 1 \qquad\qquad (\alpha)$$

En la segunda condición, desarrollando:

$$4\,C^{x}_{y} = 5C^{x}_{y-2}$$

$$\frac{4\lfloor\underline{x}}{y\;\lfloor\underline{x-y}} = \frac{5\lfloor\underline{x}}{\lfloor\underline{y-2}\;\;\lfloor\underline{x-y+2}}$$

simplificando y descomponiendo los factoriales:

$$\frac{4}{\lfloor\underline{y}\;\;\lfloor\underline{x-y}} = \frac{5}{\lfloor\underline{y-2}\,(x-y+2)(x-y+1)\;\;\lfloor\underline{x-y}}$$

simplificando y reemplazando x por su valor dado en (α) y operando:

$$\frac{4}{y(y-1)\lfloor\underline{y-2}} = \frac{5}{\lfloor\underline{y-2}\,(2y-1-y+2)(2y-y+1-1)}$$

simplificando:

$$\frac{4}{y(y-1)} = \frac{5}{(y+1)(y)}$$

simplificando y efectuando:

$$4y + 4 = 5y - 5$$

$$y = 9$$

En (α):

$$x = 2(9) - 1 = 17$$

$$x = 17$$

10.- Calcular el valor de "x" en:

$$\frac{\left(C^{m+2}_{c+1} - C^{m+1}_{x}\right)C^{m}_{x-1}}{\left(C^{m+1}_{x}\right)^2 - C^{m+2}_{x+1}\,C^{m}_{x-1}} = 2x - 12$$

Solución:

Degradando los índices:

$$C^{m+2}_{x+1} = \left(\frac{m+2}{x+1}\right)C^{m+1}_{x} = \left(\frac{m+2}{x+1}\right)\left(\frac{m+1}{x}\right)C^{m}_{x-1}$$

$$C^{m+1}_{x} = \left(\frac{m+1}{x}\right)C^{m}_{x-1}$$

reemplazando estos equivalentes en la expresión dada:

$$\frac{\left[\left(\frac{m+2}{x+1}\right)\left(\frac{m+1}{x}\right)C^{m}_{x-1} - \left(\frac{m+1}{x}\right)C^{m}_{x-1}\right]C^{m}_{x-1}}{\left[\left(\frac{m+1}{x}\right)C^{m}_{x-1}\right]^2 - \left(\frac{m+2}{x+1}\right)\left(\frac{m+1}{x}\right)C^{m}_{x-1}C^{m}_{x-1}} = 2x-12$$

factorizando en el numerador y denominador:

$$\frac{\left(C^{m}_{x-1}\right)^2\left(\frac{m+1}{x}\right)\left[\frac{m+2}{x+1} - 1\right]}{\left(C^{m}_{x-1}\right)^2\left(\frac{m+1}{x}\right)\left[\left(\frac{m+1}{x}\right) - \frac{m+2}{x+1}\right]} = 2x - 12$$

simplificando y efectuando:

$$\frac{\dfrac{m+2-x-1}{x+1}}{\dfrac{mx+m+x+1-mx-2x}{(x+1)x}} = 2x - 12$$

simplificando:

$$\frac{\dfrac{m-x+1}{x+1}}{\dfrac{m-x+1}{(x+1)x}} = 2x - 12$$

$$x = 2x - 12$$

$$x = 12$$

DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON

con exponente entero y positivo.

Haciendo uso de los productos notables, se calcula el producto de "n" factores binomios; y de esta manera, se indica cuál es el desarrollo de un binomio de la forma $(x + a)^n$.

PROPIEDADES DEL BINOMIO DE NEWTON

1º Su desarrollo es un polinomio completo de (n+1) términos.

2º Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales; lo cual es evidente, por ser números combinatorios complementarios.

3º El exponente de "x" en cada término es igual al número de términos que le siguen y el de "a" al que le preceden.

4º El coeficiente del primer término, es 1 y el coeficiente del segundo término es igual al exponente del primer término.

5º El coeficiente de cada término es igual al del anterior multiplicado por el exponente de "x", también en el término anterior y dividido por el de "a", del término anterior aumentado en una unidad.

6º Si los términos del binomio tienen signos contrarios, los términos del desarrollo serán alternativamente positivos y negativos siendo negativos los que contengan potencias impares del término negativo del binomio. Basta sustituir en el desarrollo "a" por "-a".

7º Si los dos términos del binomio son negativos, todos los términos del desarrollo serán positivos o negativos según que el exponente sea par o impar. En efecto, se tiene:

$$(-x - a)^m = [-1(x + a)]^m = (-1)^m(x + a)^m$$

8º La suma de los coeficientes de los términos del desarrollo de un binomio de cualquier grado es igual a 2 elevado a esa potencia. Basta hacer en el desarrollo de Newton x = a = 1 y se tiene:

$$2^m = 1 + C_1^m + C_2^m + C_3^m + \dots + C_m^m$$

9º La suma de los coeficientes de los términos de lugar impar es igual a la suma de los de lugar par.

10º Con respecto a las letras "x" y "a", el desarrollo es un polinomio homogéneo de grado n.

MÉTODO DE INDUCCIÓN

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + a)(x + b)(x + c)$$
$$= x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) - (x + d)$$
$$= x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + bcd + acd)x + abcd$$

Para n factores:

$$(x + a)(x + b)(x + c) \dots (x + k)$$
$$= x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + S_3x^{n-3} + \dots + S_n$$

donde:

S_1 = suma de las letras a, b, c, …, k.

S_2 = suma de los productos de estas "n" letras tomadas de 2 en 2.

S_3 = suma de los productos de estas "n" letras tomadas de 3 en 3.

S_n = producto de todas las "n" letras.

Ahora:

Si a = b = c = d = … = k

es decir, si todas las letras son "a":

$$S_1 = C_1^n a = \binom{n}{1} a = na$$

$$S_2 = C_2^n a^2 = \frac{n(n - 1)}{2} a^2$$

$$S_3 = C_3^n a^3 = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3$$

$$S_n = C_n^n a^n = \binom{n}{n} a^n = a^2$$

Luego, el producto de n factores (x + a) es igual a $(x + a)^n$ y su desarrollo es:

$$(x + a)^n = x^n + \overset{n}{C}_1 x^{n-1}a + \overset{n}{C}_2 x^{n-2}a^2 + \overset{n}{C}_3 x^{n-3}a^3 + \ldots + a^n$$

o también:

$$(x + a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^3x^{n-3} + \ldots + a^n$$

Ejemplo. Desarrollar:

$$(x + a)^4 = x^4 + \overset{4}{C}_1 x^3a + \overset{4}{C}_2 x^2a^2 + \overset{4}{C}_3 xa^3 + \overset{4}{C}_4 a^4$$

$$= x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$

FÓRMULA DEL TÉRMINO GENERAL

Esta fórmula permite escribir un término cualquiera del desarrollo del binomio.

Se sabe que:

$$(x + a)^n = \overset{n}{C}_0 x^n + \overset{n}{C}_1 x^{n-1}a + \overset{n}{C}_2 x^{n-2}a^2 + \overset{n}{C}_3 x^{n-3}a^3 + \ldots + \overset{n}{C}_n a^n$$

Siguiendo la ley de formación de todos los términos del desarrollo:

1er. término: $\overset{n}{C}_{1-1} x^{n-(1-1)} a^{1-1}$

2do. término: $\overset{n}{C}_{2-1} x^{n-(2-1)} a^{2-1}$

3er. término: $\overset{n}{C}_{3-1} x^{n-(3-1)} a^{3-1}$

4to. término: $\overset{n}{C}_{4-1} x^{n-(4-1)} a^{4-1}$

.

.

.

10mo. término: $\overset{n}{C}_{10-1} x^{n-(10-1)} a^{10-1}$

.

.

.

kmo. término: $\overset{n}{C}_{k-1} x^{n-(k-1)} a^{k-1}$

(k + 1) término: $\overset{n}{C}_{k+1-1} x^{n-(k+1-1)} a^{k-1-1}$

$$\therefore \qquad t_{k+1} = \overset{n}{C}_k x^{n-k} a^k$$

donde:

(k + 1) = lugar que ocupa el término buscado.

Ck = combinaciones de “n” elementos tomados de “k” en “k”.

n = exponente del binomio.

x = primer término del binomio.

a = segundo término del binomio.

k = lugar menos 1 del término buscado

Ejemplo.- Hallar el término 10 del desarrollo de la potencia:

$$\left(27x^5 + \frac{1}{3x}\right)^{12}$$

Solución:

Nótese que:

$$n = 12 \quad ; \quad k + 1 = 10 \quad ; \quad k = 9$$

1er. término: $27x^5$

2do término: $\left(\frac{1}{3x}\right)$

Aplicando la fórmula:

$$t_{9+1} = t_{10} = \overset{12}{C}_9 (27x^5)^{12-9}\left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$t_{10} = \overset{12}{C}_9 (3^3x^5)^3(3^{-1}x^{-1})^9$$

$$t_{10} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (3^9 \cdot x^{15})(3^{-9}x^{-9})$$

$$t_{10} = 220x^6$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar “n” para que el t_{25} del desarrollo de:

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^{5n+2}$$

contenga a “x” con exponente 44.

Solución:

Cálculo de t_{25}:

$$t_{25} = C^{5n+2}_{24}\left(\frac{x^2}{y}\right)^{5n+2-24}\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^{24}$$

El exponente de "x" en este término debe ser, según el problema, igual a 44; es decir:

$$2(5n + 2 - 24) - \frac{1}{2}\ (24) = 44$$

$$10n + 4 - 48 - 12 = 44$$

$$10n = 48 + 12 + 44 - 4$$

$$10n = 100$$

$$n = 10$$

2.- ¿Cuál es el número de términos en el desarrollo de:

$$\left(\frac{n}{8}\,x + y\right)^n$$

si los coeficientes de los términos de lugares 7 y 8 son iguales?

Solución:

Cálculo de t_7:

$$t_7 = C^n_6\left(\frac{n}{8}\,x\right)^{n-6}(y)^6$$

El coeficiente del t_7 es:

$$A_7 = \left(\frac{n}{8}\right)^{n-6}C^n_6$$

Cálculo del t_8 :

$$t_8 = C^n_7\left(\frac{n}{8}\,x\right)^{n-7}(y)^7$$

El coeficiente del t_8 es:

$$A_8 = \left(\frac{n}{8}\right)^{n-7}C^n_7$$

Por la condición del problema:

$$\left(\frac{n}{8}\right)^{n-6}C^n_6 = \left(\frac{n}{8}\right)^{n-7}C^n_7$$

simplificando:

$$\left(\frac{n}{8}\right)C^n_6 = C^n_7$$

desarrollando:

$$\left(\frac{n}{8}\right)\frac{\lfloor\underline{n}}{6\ \lfloor\underline{n-6}} = \frac{\lfloor\underline{n}}{7\ \lfloor\underline{n-7}}$$

simplificando y descomponiendo los factores:

$$\left(\frac{n}{8}\right)\frac{1}{(n-6)\lfloor\underline{n-7}\ \lfloor\underline{6}} = \frac{1}{7\ \lfloor\underline{6}\ \lfloor\underline{n-7}}$$

$$\frac{n}{8n-48} = \frac{1}{7}$$

$$7n = 8n - 48$$

$$n = 48$$

Rpta.: Número de términos, según primera propiedad:

$$n + 1 = 48 + 1 = 49$$

3.- Hallar el exponente de "a" en el término independiente (que no tiene x; en términos formales, es independiente de "x") en el desarrollo de la potencia:

$$\left(x^m + \frac{\sqrt[m]{a}}{x^n}\right)^{m+n}$$

Solución:

Cálculo del término general:

$$t_{k+1} = C^{m+n}_k(x^m)^{m+n-k}\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{x^n}\right)^k$$

Si es independiente de x, el exponente de "x" debe ser cero; es decir:

$$m(m + n - k) - nk = 0$$

$$m(m + n) - mk - nk = 0$$

$$m(m + n) = (m + n)k$$

luego:

$$k = m$$

El exponente de "a" en este término es:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{m}} = a^1$$

Rpta.: El exponente es 1.

4.- Dado el binomio:

$$\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{120}, \text{ determinar:}$$

a) El número de términos racionales e irracionales que tiene el desarrollo.

b) Cuántos términos son enteros y cuántos son fraccionarios.

Solución:

el término general de este desarrollo es:

$$t_{k+1} = C_k^{120} \left(\sqrt[5]{x}\right)^{120-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{120}\ x^{\frac{120-k}{5}}\ x^{-\frac{k}{3}}$$

$$t_{k+1} = C_k^{120}\ x^{24 - \frac{8k}{15}}$$

a) Para que sean racionales:

$$24 - \frac{8k}{15} = \text{número entero}$$

ésto se cumple para k = 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120. Lo cual indica que hay 9 términos racionales y como el desarrollo tiene 121 términos, los irracionales son 112.

b) Para que sean enteros:

$$24 - \frac{8k}{15} = \text{número entero y positivo}$$

ésto se cumple para k = 0, 15, 30, 45. Hay 4 términos enteros y como existen 9 racionales, hay 5 fraccionarios.

5.- Calcular el valor de k en el desarrollo de $(1 + x)^{43}$, si se sabe que los coeficientes de los términos de lugares $(2k + 1)$ y $(k + 2)$ son iguales.

Solución:

Cálculo del término $(2k + 1)$:

$$t_{2k+1} = C_{2k}^{43}\ (1)^{43-2k}\ (x)^{2k}$$

su coeficiente: C_{2k}^{43}

Cálculo del término $k + 2$:

$$t_{k+2} = C_{k+1}^{43}\ (1)^{43-k-1}\ (x)^{k+1}$$

su coeficiente: C_{k+1}^{43}

Por la condición del problema:

$$C_{2k}^{43} = C_{k+1}^{43}$$

para que estos coeficientes sean iguales, debe cumplirse que:

$$2k + k + 1 = 43$$

luego: $k = 14$

6.- Hallar el número de términos en el desarrollo de: $(x^2 + y^5)^n$, si la suma de los grados absolutos de todos los términos es igual a 252.

Solución:

Cálculo del término general:

$$t_{k+1} = C_k^n\ (x^2)^{n-k}\ (y^5)^k$$

El grado absoluto de este término es:

$$G.A.t_{k+1} = 2(n - k) + 5k = 2n + 3k$$

donde: $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n.$

Mientras que los grados absolutos de los respectivos términos son 2n, 2n + 3, 2n + 6, 2n + 9,…

Por el dato inicial:

$$\underbrace{2n + \underbrace{(2n + 3) + \underbrace{(2n + 6) + \ldots + [2n + 3(n - 2)]}_{7n} + [2n + 3(n - 1)]}_{7n} + [2n + 3n]}_{7n} = 252$$

Sumando de 2 en 2 se obtiene:

$$\underbrace{(7n) + (7n) + (7n) + \ldots + (7n)}_{\frac{n+1}{2}\text{ términos}} = 252$$

Luego, se tendrá:

$$7n\left(\frac{n+1}{2}\right) = 252$$

$n(n + 1) = 72$

$n(n + 1) = 8 \,.\, 9$

$n = 8$

Rpta.: El número de términos es 9.

7.- Sabiendo que A, B y C son coeficientes de tres términos consecutivos del desarrollo de:$(a + b)^n$; y, además que:

$$A + 2B + C = C^{20}_{10}$$

hallar n^2.

Solución:

Sea t_{r+1} el primer término de los tres:

$t_{r+1} = C^n_r \; (a)^{n-r} \; (b)^r$

$A = C^n_r$

Sea t_{r+2} el segundo término:

$t_{r+2} = C^n_{r+1} \; (a)^{n-(r+1)} \; (b)^{r+1}$

luego: $B = C^n_{r+1}$

Sea t_{r+3} el tercer término:

$t_{r+3} = C^n_{r+2} \; (a)^{n-(r+2)} \; (b)^{r+2}$

luego: $C = C^n_{r+2}$

Reemplazando A, B y C en la condición del problema:

$C^n_r + 2\,C^n_{r+1} + C^n_{r+2} = C^{20}_{10}$

$C^n_r + C^n_{r+1} + C^n_{r+1} + C^n_{r+2} + C^{20}_{10}$

aplicando la propiedad de las combinaciones:

$C^{r+1}_{r+1} + C^{r+1}_{r+2} = C^{20}_{10}$

aplicando nuevamente la propiedad anterior:

$$C^{r+2}_{r+2} = C^{20}_{10}$$

de aquí:

$r + 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad r = 8$

$n + 2 = 20 \quad \Rightarrow \quad n = 18$

$\therefore \quad n^2 = 18^2$

$n^2 = 324$

TERMINO CENTRAL

En el desarrollo del Binomio de Newton, se denomina así, al término que equidista de los extremos.

Se presenta dos casos:

1.- Cuando el exponente es par, de la forma $(x + a)^{2n}$, existe un sólo término central y su lugar se determina según la fórmula:

$$\frac{2n}{2} + 1 = n + 1$$

2.- Cuando el exponente es impar, de la forma $(x + a)^{2n+1}$, existen dos términos centrales y sus lugares se determina por las fórmulas:

1er.Central:

$$\frac{2n + 1 + 1}{2} = n + 1$$

2do.Central:

$$n + 1 + 1 = n + 2$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Determinar a y b en la potencia:

$$\left(\frac{x^a}{y^{b-5}} + \frac{y^b}{x}\right)^b$$

de modo que admita un solo término central cuya parte literal sea x^3y^{15}.

Solución:

Como hay un término central, el lugar es:

$$\frac{b}{2} + 1$$

Por lo tanto:

$$t_{\left(\frac{b}{2}+1\right)} = C^b_{\frac{b}{2}} \left(\frac{x^a}{y^{b-5}}\right)^{b-\frac{b}{2}} \cdot \left(\frac{y^b}{x}\right)^{\frac{b}{2}}$$

$$t_{\left(\frac{b}{2}+1\right)} = C^b_{\frac{b}{2}} \cdot \frac{x^{a\left(\frac{b}{2}\right)}}{y^{(b-5)\cdot\frac{b}{2}}} \cdot \frac{y^{\frac{b^2}{2}}}{x^{\frac{b}{2}}}$$

$$t_{\left(\frac{b}{2}+1\right)} = C^b_{\frac{b}{2}} \cdot x^{\frac{b}{2}(a-1)} \; y^{\frac{b}{2}(b-b+5)}$$

$$t_{\left(\frac{b}{2}+1\right)} = C^b_{\frac{b}{2}} \cdot x^{\frac{b}{2}(a-1)} \cdot y^{\frac{b}{2}(5)}$$

Como la parte literal es: x^3y^{15}, identificando exponentes de x é y:

i) $\frac{b}{2}(a-1) = 3$

$$b(a-1) = 6 \qquad (\alpha)$$

ii) $\frac{b}{2}(5) = 15$

$$b = 6 \qquad (\beta)$$

Sustituyendo en (α) da:

$$a = 1$$

Rpta.: $a = 1 \quad b = 6$

2.- En el siguiente binomio:

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^{2n-1}$$

uno de sus términos centrales es independiente de "x". Calcular el número de términos.

Solución:

Como el exponente es impar hay 2 términos centrales, cuyos lugares son:

1er. término central:

$$\frac{2n-1+1}{2} = n$$

2do. término central:

$$n + 1$$

Cálculo del t_n:

$$t_n = C^{2n-1}_{n-1} (x^4)^n (x^{-3})^{n-1}$$

si es independiente de "x" su exponente es cero:

$$4n - 3(n-1) = 0$$

de donde: $n = -3$

Pero es negativo por lo tanto no es la respuesta buscada por no ser independiente "x".

Cálculo del t_{n+1}:

$$t_{n+1} = C^{2n-1}_n (x^4)^{n-1} (x^{-3})^n$$

si es independiente de "x" su exponente es cero:

$$4(n-1) - 3n = 0$$

$$4n - 4 - 3n = 0 \qquad n = 4$$

Rpta.: El número de términos es 8.

3.- Si el término central del desarrollo de:

$$\left(x^2 - \frac{y}{x}\right)^n$$

es de grado absoluto seis. Calcular el exponente que tiene "y" en ese término.

Solución:

Si hay un término central, "n" es un exponente par, luego el lugar que ocupa el término central es:

$$\frac{n}{2} + 1$$

Cálculo del $t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$:

$$t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} = C^n_{\frac{n}{2}} (x^2)^{n-\frac{n}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{n}{2}} = C^n_{\frac{n}{2}} (x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{y^{n/2}}{x^{n/2}}$$

$$t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} = C^n_{\frac{n}{2}} \; x^{n-\frac{n}{2}} \; y^{n/2} = C^n_{\frac{n}{2}} \; x^{n/2} \; y^{n/2}$$

El grado absoluto del $t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ es:

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=6$$

$$n=6$$

Por lo tanto,el exponente de "y" en este término es:

$$\frac{n}{2}=\frac{6}{2}=3$$

4.- Sabiendo que en el desarrollo de:

$$(x+y)^{2n+1}$$

los términos centrales son de lugares "p" y "q". Hallar el valor de:

$$E=pq-n^2-3n$$

Solución:

Como el exponente del binomio es impar, hay dos términos centrales, cuyos lugares son:

1er. término central:

$$\frac{2n+1+1}{2}=\frac{2n+2}{2}=n+1$$

2do. término central:

$$n+1+1=n+2$$

Por datos del problema:

$$n+1=p \qquad \text{(I)}$$

$$n+2=q \qquad \text{(II)}$$

Sustituyendo (I) y (II) en la expresión E:

$$E=(n+1)(n+2)-n^2-3n$$

efectuando: $E=2$

5.- Los coeficientes de los términos centrales de los desarrollos de:

$$(x+y)^{2m} \quad , \quad y \quad (x+y)^{2m-2}$$

son entre sí como 18 es a 5. Calcular m.

Solución:

El término central de $(x+y)^{2m}$ ocupa el lugar:

$$\frac{2m}{2}+1=m+1$$

el coeficiente del t_{m+1} de $(x+y)^{2m}$ es:

$$C_m^{2m}$$

El término central de $(x+y)2^{m-2}$ ocupa el lugar de:

$$\frac{2m-2}{2}+1=m$$

El coeficiente del t_m de $(x+y)^{2m-2}$ es:

$$C_{m-1}^{2m-2}$$

Por condición del problema:

$$\frac{C_m^{2m}}{C_{m-1}^{2m-2}}=\frac{18}{5}$$

$$\frac{\dfrac{\lfloor 2m}{\lfloor m\ \lfloor m}}{\dfrac{\lfloor 2m-2}{\lfloor m-1\ \lfloor m-1}}=\frac{\lfloor 2m\ \ \lfloor m-1\ \ \lfloor m-1}{\lfloor m\ \ \lfloor m\ \ \lfloor 2m-2}$$

$$=\frac{(2m)(2m-1)\lfloor 2m-2\ \ \lfloor m-1\ \ \lfloor m-1}{m\ \lfloor m-1\ m\ \lfloor m-1\ \ \lfloor 2m-2}=\frac{18}{5}$$

de aquí:

$$\frac{2(2m-1)}{m}=\frac{18}{5}$$

$$20m-10=18m$$

$$2m=10$$

$$m=5$$

TRIÁNGULO DE PASCAL O DE TARTAGLIA

Permite determinar los coeficientes del desarrollo del Binomio de Newton. Escribiendo en línea horizontal, los coeficientes del desarrollo de la sucesivas potencias del binomio forman el triángulo aritmético de Pascal o de Tartaglia, de la siguiente manera:

Coeficientes de:

$(x + a)^0 =$						1					
$(x + a)^1 =$					1		1				
$(x + a)^2 =$				1		2		1			
$(x + a)^3 =$			1		3		3		1		
$(x + a)^4 =$		1		4		6		4		1	
$(x + a)^5 =$	1		5		10		10		5		1

...

En este triángulo, un coeficiente cualquiera es igual a la suma de los dos que van sobre él en la línea anterior. Se utiliza para potencias pequeñas.

Ejemplo: Efectuar el desarrollo de $(x^3 + y^4)^5$ formando el triángulo de Pascal.

Solución:

1	$(x + a)^0$
1 1	$(x + a)^1$
1 2 1	$(x + a)^2$
1 3 3 1	$(x + a)^3$
1 4 6 4 1	$(x + a)^4$
1 5 10 10 5 1	$(x + a)^5$

Luego:

$$(x^3 + y^4)^5 = (x^3)^5 + 5(x^3)^4y^4 + 10(x^3)^3(y^4)^2 + 10(x^3)^2(y^4)^3 + 5(x^3)^1(y^4)^4 + (y^4)^5$$

$$(x^3 + y^4)^5 = x^{15} + 5x^{12}y^4 + 10x^9y^8 + 10x^6y^{12} + 5x^3y^{16} + y^{20}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de n en la siguiente expresión:

$$1\,024\,\underline{|n-1}\,[1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, \ldots (2n-3)] = \underline{|2(n-1)}$$

a) 12 b) 11 c) 14

d) 15 e) 13

2. Después de calcular "x" halle "E":

$$\frac{(x+3)^3\,\underline{|x+1}}{\underline{|x+1} + \underline{|x+2} + \underline{|x+3}} = 5$$

$$E = \sqrt[x^x]{10x - 4}$$

a) 5 b) 6 c) 2

d) 7 e) 4

3. Calcular "n":

$$2 + 2\,\underline{|2} + 3\,\underline{|3} + \ldots + (n+3)\,\underline{|n+3} = \underline{|60}$$

a) 57 b) 56 c) 58

d) 59 e) 60

4. Obtener el valor de la expresión simplificada:

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)}{1!} + \frac{(m+2)!}{2!} + \ldots + \frac{(m+k)\text{¡}}{k!}$$

a) $\dfrac{\underline{|m+k}}{\underline{|m+1}\,\underline{|k}}$ b) $\dfrac{\underline{|m+k+2}}{\underline{|k+1}\ \underline{|m+1}}$

c) $\dfrac{\underline{|m+k}}{(m+1)\ \underline{|k}}$ d) $\dfrac{\underline{|m+k}}{m\ \underline{|k}}$

e) $\dfrac{\underline{|m+k+1}}{(m+1)\ \underline{|k}}$

5. Después de operar, se obtiene:

$$\frac{\underline{\left|\frac{a}{b}\right.} + 2\,\underline{\left|\frac{a-b}{b}\right.}}{\underline{\left|\frac{a}{b}\right.} + \underline{\left|\frac{a+b}{b}\right.}}\left[\frac{a}{b}\right]$$

a) a b) ab c) b

d) 1 e) a/b

6. Simplificar:

$$E = \frac{n!!^{(n!!+1)!} \;.\; (n!!-1)!^{(n!!-1)!}}{(n!!-1)^{(n!!)!} \;.\; (n!!)!^{(n!!)!n!!}}$$

a) 1 b) n c) n!

d) $(n!)^2$ e) n^2

7. Efectuar:

$$\left[C_1^n C_2^n C_3^n \ldots C_n^n\right]\left[\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3} \ldots\ldots \lfloor\underline{n}\right]^2$$

a) $(\lfloor\underline{n})^{n+1}$ b) $\lfloor\underline{n^n}$ c) $(\lfloor\underline{n})^n$

d) $(\lfloor\underline{n})^{n-1}$ e) $\lfloor\underline{n}$

8. En: $9\lfloor\underline{C_a^8} = C_8^9\;\; C_7^8\; C_6^7 \lfloor\underline{C_5^6}$,

dar la diferencia absoluta de los valores de "a" que se obtiene.

a) 2 b) 3 c) 5

d) 6 e) 7

9. Hallar x:

$$C_n^{3n}\;\; C_{2n+n^2\,x}^{3n+n^2\,x} = C_{2n}^{3n}\;\; C_n^{2n}$$

a) -1 b) 1 c) 1/n

d) -1/n e) 1/2

10. Hallar: C_n^{2n}, sabiendo que:

$$C_{2n}^{3n}\;\; C_n^{2n}\;\; C_{n-1}^{3n} - C_n^{3n}\;\; C_{n-1}^{n}\;\; C_n^{3n} = 0$$

a) 1 b) 12 c) 2

d) 3 e) 6

11. Calcular la siguiente suma:

$$\frac{C_0^n}{1} + \frac{C_1^n}{2} + \frac{C_2^n}{3} \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$$

a) $\dfrac{2^{n+1}}{n+1}$ b) $\dfrac{2^{n+1}+1}{n+1}$

c) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n}$ d) $\dfrac{2^n-1}{n+1}$

e) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

12. Después de efectuar se obtiene:

$$C_0^n C_m^n + C_1^n C_{m-1}^{n-1} + C_2^n C_{m-2}^{n-2} + \ldots + C_m^n C_0^{n-m}$$

a) $2_n\; C_m^n$ b) 2^{m+n} C) $2^m\; C_m^n$

d) $2_n^n\; C_n^m$ e) C_{m-n}^{m+n}

13. Obtener la suma de todos los valores de "x":

$$C_{x-2}^{3x-2} + C_{x-3}^{3x-2} + C_{x-3}^{3x-1} + C_{x-3}^{3x} = C_{3x-16}^{3x-1}$$

a) 25 b) 26 c) 24

d) 21 e) 22

14. En la quinta potencia de un binomio, el quinto término vale $160x^{12}$ y el cociente de sus términos centrales (en orden) es x^2. ¿Cuál es el segundo término del binomio?

a) $2x^4$ b) x^4 c) x^{-2}

d) $2x^2$ e) x^2

15. Si el polinomio:

$$P = ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

es el desarrollo de la cuarta potencia de un binomio. Hallar el valor de:

$$S = \frac{B^8C^4}{(24)^2A^7D^4}$$

si el binomio es (px + q)

a) p^2 b) p^3 c) q^4

d) p^2q^2 e) pq

16. El binomio $(a^2 + b^2)$ al ser elevado a cierta potencia, contiene en su desarrollo $a^{18}b^4$, además, sus términos de orden (k - 3) y (2k - 11) tienen iguales coeficientes. ¿De qué grado respecto a "a" es el término (k + 6)?

a) 7 b) 5 c) 2

d) 9 e) No hay término

17. Si en el desarrollo de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$

el cociente de los sextos términos contados a partir del comienzo del desarrollo y del extremo final es igual a la unidad. Hallar "n".

a) 6 b) 8 c) 12

d) 10 e) 14

18. Dar el valor más aproximado a:

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{14 . 4}}}$$

a) 1,24 b) 1,98 c) 1,32

d) 1,16 e) 1,48

19. Dar el valor más apropiado a: $\dfrac{3}{\sqrt{26}}$

a) $\dfrac{83}{82}$ b) $\dfrac{84}{81}$ c) $\dfrac{82}{81}$

d) $\dfrac{80}{81}$ e) $\dfrac{84}{83}$

20. En el desarrollo de $(a + b)^{x+y}$ el segundo coeficiente es igual al 4°; además en el desarrollo de $(x + y)^{a+b}$ el tercer coeficiente es igual al sétimo. Dar el valor de E.

$$E = \frac{(a - 2x)^8 + (2y - b)^8}{(b - 2y)^8}$$

a) 2 b) 1 c) 3

d) 4 e) -1

21. Calcular el número de términos diferentes, no semejantes entre sí, del desarrollo de:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n)^3$$

a) $\dfrac{n(2n + 1)}{3}$ b) $\dfrac{n(2n + 1)(n + 1)}{6}$

c) $\dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$ d) $\dfrac{n(2n + 1)(2n + 2)}{12}$

e) $\dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$

22. ¿Qué exponente admite "z" en el término que posee x^8 en el desarrollo de:

$$\left(x^2yz + \frac{1}{xy^2z}\right)^n$$

a) 4 b) 5 c) 3

d) 2 e) 0

23. ¿Para qué valor de "n" aparece en el desarrollo:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c}\right)^n$$

un término contenido abc?

a) 12 b) 9 c) 16

d) 8 e) 15

CLAVE DE RESPUESTAS

1) B	2) C	3) B	4) B	5) D
6) B	7) B	8) A	9) D	10) D
11) A	12) E	13) C	14) D	15) C
16) E	17) D	18) B	19) x	20) A
21) E	22) C	23) B		

DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON CON EXPONENTE NEGATIVO Y/O FRACCIONARIO

En este caso se utilizará:

$$(x + a)^n = x^n + nx^{n-1}a^1 + \frac{n(n - 1)}{1 \,.\, 2}\, x^{n-2}a^2 + \frac{n(n - 1)(n - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\, x^{n-3}a^3 + \ldots$$

ya que la fórmula no tiene combinaciones.

Ejemplo.- Hallar los 5 primeros números en el desarrollo de: $(1 - x)^{-2}$

Solución:

Utilizando la fórmula:

$$(1 - x)^{-2} = (1)^{-2} + (-2)(1)^{-2-1}(-x) + \frac{(-2)(-2 - 1)}{2}(1)^{-2-2}(-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-2 - 2)}{2 \,.\, 3}(1)^{-2-3}(-x)^3 + \frac{(-2)(-3)(-4)(-2 - 3)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4}(1)^{-2-4}(-x)^4$$

Luego efectuando operaciones:

$$(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

PROPIEDADES DEL DESARROLLO DEL BINOMIO:

1º El número de términos es infinito, y al desarrollo se le conoce con el nombre de serie binómica de Newton.

2º Para determinar el desarrollo de $(x + a)^n$ para un número fraccionario y/o negativo, el valor de "x" debe ser uno y además cumplir que $x > a$. Los valores de a deben ser tales que: $0 < a < 1$.

3º Los términos del desarrollo con respecto a sus signos, no tienen ninguna relación.

4º Para extraer la raíz de un número con aproximación por la serie binómica de Newton, se utiliza la siguiente relación.

$$(1 + x)^{1/m} = 1 + \frac{1}{m}x$$

donde $0 < x < 1$.

5º Para determinar el término general en el desarrollo, se utiliza la siguiente fórmula.

Sea el binomio $(x + a)^n$ donde "n" es un número fraccionario y/o negativo.

$$t_{r+1} = \frac{n(n - 1)(n - 2)(n - 3)\ldots(n - r + 1)}{\underline{\lfloor r}}\, x^{n-r}a^r$$

donde:

t_{r+1} : es el término de lugar r + 1

n : es el exponente fraccionario y/o negativo del binomio

x : es el primer término

a : es el segundo término

r + 1: es el lugar del término pedido.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar $\sqrt[5]{921,6}$

Solución:

Se debe escribir 921,6 como un número que tenga raíz quinta exacta y ponerlo como una suma o resta.

$$921,6 = 1\,024 - 102,4$$

Notar que $\sqrt[5]{1\,024} = 4$

Aplicando la fórmula para extraer la raíz con aproximación, y operando sucesivamente:

$$(1 + x)^{1/m} = 1 + \frac{x}{m}$$

$$\sqrt[5]{921,6} = \sqrt[5]{1\,024 - 102,4}$$

$$= \sqrt{1\,024\left(1 - \frac{102,4}{1\,024}\right)} = \sqrt[5]{1\,024}\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{10} \,.\, \frac{1}{5}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{50}\right)$$

$$= 4(1 - 0,02) = 4(0,98)$$

finalmente:

$$\sqrt[5]{921,6} = 3,92$$

2.- Hallar el número de términos que se debe tomar del desarrollo de $(1 - x)^{-2}$ para que la suma de sus coeficientes sea 2 485.

Solución:

Desarrollando algunos términos, con la finalidad de obtener la relación en que se encuentran los coeficientes del desarrollo:

$$(1 - x)^{-2} = (1)^{-2} + (-2)(1)^{-3}(-x) + \frac{(-2)(-3)}{2}(1)^{-4}(-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{2 \,.\, 3}(1)^{-5}(-x)^3 + \dots$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Se observa que los coeficientes del desarrollo son 1,2,3,4,5, etc.

Suponiendo que se tome "n" términos, la suma sería:

$$1 + 2 + + 3 + 4 + 5 + \dots + n = 2\,485$$

que equivale a:

$$\frac{n(n + 1)}{2} = 2\,485$$

$$n(n + 1) = 4\,970$$

$$n(n + 1) = 70 \,.\, 71$$

por comparación: $n = 70$

Rpta.: Se deben tomar 70 términos.

3.- Encontrar el valor de "n" si en el desarrollo de: $(1 - x)^{-n}$ todos los términos tienen igual coeficiente.

Solución:

Como todos los términos tienen igual coeficiente, basta calcular dos términos e igualar sus coeficientes, desarrollando los dos primeros términos.

$$(1 - x)^{-n} = (1)^{-n} + (-n)(1)^{-n-1}(-x) + \frac{(-n)(-n - 1)}{2}(1)^{-n-2}(-x)^2 + \dots$$

$$(1 - x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n + 1)}{2}x^2 + \dots$$

igualando coeficientes:

$$n = 1$$

4.- Hallar el término general del desarrollo de: $(x - a)^{-n}$

Solución:

Utilizando la fórmula en este caso:

$$t_{(r+1)} = \frac{(-n)(-n - 1)(-n - 2)(-n - 3)\dots(-n - r + 1)}{\lfloor\underline{r}} \,.\, (x)^{-n-r}(-a)^r$$

$$t_{(r+1)} = \frac{(-1)^r n(+n + 1)(n + 2)(n + 3)\dots(n + r - 1)}{\lfloor\underline{r}} \,.\, (x^{-n-r})(-1)^r a^r$$

$$t_{(r+1)} = \frac{[(-1)(-1)]^r \lfloor\underline{n - 1}\,(n)(n + 1)(n + 2)(n + 3)\dots(n + r - 1)}{\lfloor\underline{r}\;\lfloor\underline{n - 1}} \,.\, \frac{a^r}{x^{n+r}}$$

$$t_{(r+1)} = \frac{\lfloor\underline{n + r - 1}}{\lfloor\underline{r}\;\lfloor\underline{n - 1}} \,.\, \frac{a^r}{x^{n+r}}$$

ó:

$$t_{(r+1)} = c^{n+r-1}_{r} \,.\, \frac{a^r}{x^{n+r}}$$

5.- Hallar el t_{10} del desarrollo de:

$$\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)^{-3}$$

Solución:

Utilizando la fórmula:

$$t_{10} = \frac{(-3)(-3 - 1)(-3 - 2)(-3 - 3)(-3 - 4)(-3 - 5)}{\lfloor\underline{9}} \quad \frac{(-3 - 6)(3 - 7)(-3 - 8)}{} \,.\, \left(\sqrt[3]{x}\right)^{-3-9}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^9$$

$$t_{10} = \frac{(-1)^9(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-12}}{\lfloor\underline{9}} \,.\, (-1)^9\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^9$$

$$t_{10} = \frac{(-1)^9(-1)^9\; 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 11}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9}(x)^{-4} \,.\, \left(\frac{1}{x^6}\right)$$

$$t_{10} = [(-1)(-1)]^9\, 55x^{-10}$$

$$t_{10} = 55x^{-10}$$

6.- Hallar el valor de:

$$E = 1 - \frac{\sqrt[4]{15{,}84}\ \sqrt[8]{253{,}44}}{\sqrt[5]{31{,}68}\ \sqrt[6]{63{,}36}}$$

Solución:

Teniendo en cuenta que:

$$15{,}84 = 16 - 0{,}16$$

$$253{,}44 = 256 - 2{,}56$$

$$31{,}68 = 32 - 0{,}32$$

$$63{,}36 = 64 - 0{,}64$$

Sustituyendo estos valores en la expresión a calcular:

$$E = 1 - \frac{\sqrt[4]{16 - 0{,}16}\ \sqrt[8]{256 - 2{,}56}}{\sqrt[5]{32 - 0{,}32}\ \sqrt[6]{64 - 0{,}64}}$$

$$E = 1 - \frac{\sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{1 - 0{,}16/16}\ \sqrt[8]{256}\ \sqrt{1 - \dfrac{2{,}56}{256}}}{\sqrt[5]{32}\ \sqrt{1 - \dfrac{0{,}32}{32}}\ \sqrt[6]{64}\ \sqrt{1 - \dfrac{0{,}64}{64}}}$$

$$E = 1 - \frac{2\left(\sqrt[4]{1 - \dfrac{1}{100}}\right)\ 2\left(\sqrt[8]{1 - \dfrac{1}{100}}\right)}{2\left(\sqrt[5]{1 - \dfrac{1}{100}}\right)\ 2\left(\sqrt[6]{1 - \dfrac{1}{100}}\right)}$$

$$E = 1 - \frac{\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^{1/4}\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^{1/8}}{\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^{1/5}\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^{1/6}}$$

$$E = 1 - \left[1 - \frac{1}{100}\right]^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}}$$

$$E = 1 - \left[1 - \frac{1}{100}\right]^{\frac{30+15-24-20}{120}}$$

$$E = 1 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{120}}$$

$$E = 1 - \left[1 - \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{120}\right]$$

$$E = 1 - 1 + \frac{1}{12\ 000}$$

$$E = \frac{1}{12\ 000}$$

7.- Hallar el cociente de los términos (k + 1) de los desarrollos:

$$(1 - x)^{-n} \ \ y \ \ (1 + x)^{-n}$$

Solución:

Calcular mediante la fórmula:

1) t_{k+1} del desarrollo $(1 - x)^{-n}$:

$$t_{(k+1)} = \frac{(-n)(-n - 1)(-n - 2)\ldots(-n - k + 1)}{\lfloor k} \cdot (1)^{-n-k}\,(-x)^k$$

$$t_{k+1} = \frac{(-1)^k(n)(n + 1)(n + 2)\ldots(n + k - 1)}{\lfloor k} \cdot (-1)^k\, x^k$$

$$t_{k+1} = \frac{(-1)^k(-1)^k n(n + 1)(n + 2)\ldots(n + k - 1)}{\lfloor k}\, x^k$$

$$t_{k+1} = \frac{n(n + 1)(n + 2)\ldots(n + k - 1)}{\lfloor k}\, x^k$$

2) t_{k+1} del desarrollo de $(1 + x)^{-n}$:

$$t_{(k+1)} = \frac{(-n)(-n - 1)(-n - 2)\ldots(-n + k + 1)}{\lfloor k} \cdot (+1)^{-n-k}\,(+x)^k$$

$$t_{k+1} = \frac{(-1)^k n(n + 1)(n + 2)\ldots(n + k - 1)}{\lfloor k}\, x^k$$

dividiendo ambos términos se obtiene:

$$q = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)\,x^k}{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)(-1)^k\,x^k}$$

$$q = \frac{1}{(-1)^{-k}} = (-1)^{-k}$$

Rpta.: $q = (-1)^{-k}$

8.- Encontrar la suma de los coeficientes de los 2n primeros términos del desarrollo de:

$$(x + a)^{-2}$$

Solución:

Desarrollando algunos términos para determinar la ley de formación que siguen los coeficientes:

$$(x - a)^{-2} = (x)^{-2} + (-2)(x)^{-3}(-a)^1 + \frac{(-2)(-3)}{2}(x)^{-4}(-a)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{2\ .\ 3}x^{-5}(-a)^3 + \ldots$$

Por lo tanto:

$$(x - a)^{-2} = x^{-2} + 2x^{-3}a + 3x^{-4}a^2 + 4x^{-5}a^3 + \ldots$$

Los coeficientes de los términos son: 1,2,3,4,5, etc.

Luego, la suma de los 2n primeros términos será:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$$

Rpta.: $n(2n + 1)$

9.- Tres términos consecutivos cualesquiera del desarrollo de $(a - b)^{-n}$ son proporcionales a: 1, b y b^2; hallar $(a + n)$.

Solución:

Desarrollando los tres primeros términos:

$$(a - b)^{-n} = (a)^{-n} + (-n)(a)^{-n-1}(-b) + \frac{(-n)(-n-1)}{2}a^{-n-2}(-b)^2 + \ldots$$

$$(a - b)^{-n} = a^{-n} + na^{-n-1}b + \frac{n(n+1)}{2}a^{-n-2}b^2 + \ldots$$

De acuerdo con la condición del problema:

$$\frac{a^{-n}}{1} = \frac{na^{-n-1}b}{b} = \frac{n(n+1)a^{-n-2}b^2}{2b^2}$$

De la primera relación:

$$a^{-n} = na^{-n-1}$$

$$n = a^{-n} \cdot a^{n+1}$$

$$n = a \qquad (1)$$

También, de la segunda relación:

$$na^{-n-1} = \frac{n(n+1)a^{-n-2}}{2a}$$

$$n + 1 = 2a \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$n + 1 = 2a$$

$$n + 1 = 2n$$

$$n = 1$$

Sustituyendo en (1):

$$a = 1$$

Como resultado:

$$a + n = 1 + 1 = 2$$

Rpta.: 2

10.- Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$E = \frac{3}{\sqrt[3]{26}}$$

Solución:

Cálculo de:

$$\sqrt[3]{26} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27\left(1 - \frac{1}{27}\right)}$$

$$\sqrt[3]{26} = \sqrt[3]{27}\left(1 - \frac{1}{27}\right)^{1/3}$$

$$\sqrt[3]{26} = 3\left(1 - \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{3}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{81}\right)$$

Sustituyendo este valor en la expresión pedida:

$$E = \frac{3}{3\left(1 - \frac{1}{81}\right)} = \frac{1}{\frac{81 - 1}{81}} \qquad \therefore \qquad E = \frac{81}{80}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Qué lugar ocupa en el desarrollo de:

$$\left[\frac{x^2}{x-(x + x^{-1})^{-1}}\right]^8$$

su término independiente?

a) 5° b) 4° c) 6°

d) 3° e) 7°

2. Si 0 < x < 1 desarrollar:

$$\frac{1}{x^{-1} + \sqrt{x^{-2}(x + 1)}}$$

hasta tres términos:

a) $\frac{x}{16}(x^2 + 2x + 8)$ b) $\frac{x}{16}(x^2 + 2x - 8)$

c) $\frac{x}{12}(x^2 + 2x + 8)$ d) $\frac{x}{16}(x^2 + 2x - 8)$

e) $\frac{x}{12}(x^2 - 2x - 8)$

3. Al efectuar $\frac{1}{(1 - ab)^n}$

el coeficiente de un término es igual a la suma de los términos más cercanos a él. Dar el coeficiente del tercer término.

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

4. Dar el valor más próximo de:

$$E = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{14,4}}}$$

a) 1,21 b) 1,98 c) 1,27

d) 0,92 e) 1,001

5. Hallar el término general de:

$$(x^3 - y^4)^{-n}$$

y dar su coeficiente $t_{(k+1)}$.

a) (k + 1) b) k

c) k + 2 d) $\frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$

e) $\frac{k + 2}{2}$

6. Si para 0 < x < 1 se cumple que:

$$6x + 10x^2 + 15x^3 + \ \dots = 15$$

Calcular el valor de:

$$E = \frac{3x - x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

a) 17 b) 14 c) 13

d) 12 e) 15

7. El valor de "x" es muy pequeño, de tal manera que su cuadrado y demás potencias superiores pueden despreciarse, en consecuencia el equivalente de:

$$\frac{(x + 9)^{1/2}}{x + 1}$$

a) $2 + \frac{15}{4}x$ b) $1 + \frac{17}{8}x$

c) $3 - \frac{17}{6}x$ d) $2 - \frac{13}{5}x$

e) $2 + \frac{19}{5}x$

8. Hallar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de:

$$\frac{1}{(1 + 3x - 2x^2)^4}$$

a) 2 800 b) 2 850 c) 2 870

d) 2 875 e) 2 835

9. Hallar el término (k + 1) del desarrollo de:

$$(1 - 4x)^{-1/2}$$

y dar su coeficiente.

a) C^{2k}_{k} b) C^{2k+1}_{k} c) C^{2k}_{k-1}

d) C^{2k+1}_{k-1} e) C^{k}_{k+1}

10. Hallar la $\sqrt[5]{33}$ con aproximación de 5 cifras decimales.

a) 2,01233 b) 2,01234

c) 2,012345 d) 2,012245

e) 2,012244

CLAVE DE RESPUESTAS

1) A	2) E	3) A	4) B	5) A
6) E	7) C	8) D	9) A	10) C

RADICACIÓN

PRINCIPALES CONCEPTOS

DEFINICIÓN

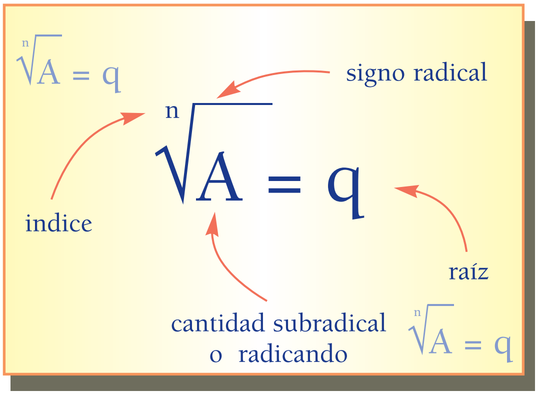
Radicación es la operación que consiste en hallar una cantidad algebraica "q", llamada raíz, que al ser elevada a un cierto índice reproduce una cantidad dada "A", llamada radicando o cantidad subradical.

En general:

$$\sqrt{A} = q \quad \Leftrightarrow \quad A = q^n$$

ELEMENTOS DE UNA RAÍZ

En forma esquemática:



SIGNOS DE LAS RAICES

1.- La raíz de índice par de una expresión algebraica positiva tiene dos valores iguales y de signos contrarios (+) y (-).

2.- La raíz de índice par de una expresión algebraica negativa carece de valor real y se llama raíz imaginaria.

3.- La raíz de índice impar de expresiones algebraicas tiene el mismo signo del radicando.

En resumen:

1) $\sqrt[\text{par}]{(+)} = (\pm)$

2) $\sqrt[\text{par}]{(-)} = \text{imaginaria}$

3) $\sqrt[\text{impar}]{(+)} = (+)$

4) $\sqrt[\text{impar}]{(-)} = (-)$

RAÍZ DE UN MONOMIO

Para extraer a la raíz de un monomio se debe proceder así:

1º Se extrae la raíz del signo, de acuerdo con la ley de signos de las raíces.

2º Se extrae la raíz del coeficiente.

3º Se divide los exponentes de las letras entre el índice de la raíz.

Ejemplos.

Hallar:

i) $\sqrt[4]{256x^{12}y^8z^{24}} = 4x^3y^2z^6$

ii) $\sqrt[5]{-32x^{10}y^{20}z^{25}} = -2x^2y^4z^5$

RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

Para extraer la raíz cuadrada a un polimonio se debe emplear la siguiente regla práctica:

REGLA PRÁCTICA:

1º Se ordena y se completa. Luego, se agrupa de 2 en 2 los términos, empezando por la derecha.

2º Se halla la raíz cuadrada del primer grupo de la izquierda (que puede ser un solo término) que será el primer término de la raíz cuadrada del polinomio; se multiplica esta raíz por sí misma cambiando de signo el resultado y se suma al polinomio dado, eliminándose la primera columna.

3º Se baja los dos términos que forman el siguiente grupo, se duplica la raíz hallada y se divide el primer término de los bajados entre el duplo del primer término de la raíz. El cociente es el segundo término de la raíz. Este segundo término de la raíz con su propio signo se escribe al lado del duplo del primer término de la raíz formándose un binomio, este binomio se multiplica por dicho segundo término con signo cambiado, sumándose el producto a los dos términos que se había bajado.

4º Se baja el siguiente grupo de dos términos. Se duplica la parte de la raíz ya hallada y se divide el primer término del residuo entre el primero de este duplo. El cociente es el tercer término de la raíz. Este tercer término con su propio signo se escribe al lado del duplo de la raíz hallada y se forma un trinomio, este trinomio se multiplica por dicho tercer término de la raíz con signo cambiado y el producto se suma al residuo.

5º Se replica el procedimiento anterior, hasta obtener un resto cuyo grado sea una unidad menor que el grado de la raíz o un polimonio idénticamente nulo.

Ejercicio:

Extraer la raíz cuadrada del polinomio:

$$x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 20x + 4$$

Solución:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 20x + 4} & x^2 - 5x + 2 \\ \hline
-x^4 & 2(x^2) = 2x^2 \\ \hline
\quad - 10x^3 + 29x^2 & (2x^2 - 5x)(-5x) \\ \hline
\quad + 10x^3 - 25x^2 & 2(x^2 - 5x) = 2x^2 - 10x \\ \hline
\qquad\quad + 4x^2 - 20x + 4 & (2x^2 - 10x + 2)(+2) \\
\qquad\quad - 4x^2 + 20x - 4 & \\ \hline
\qquad\quad\ \ - \quad - \quad - &
\end{array}$$

EXPLICACIÓN:

1) Se halla la raíz cuadrada de x^4 que es x^2; éste es el primer término de la raíz del polinomio; x^2 se eleva al cuadrado y da x^4; este cuadrado se resta del primer término del polinomio y se baja los dos términos siguientes: $-10x^3 + 29x^2$.

2) Se halla el duplo de x^2 que es $2x^2$.

3) Se divide $(-10x^3) \div (2x^2) = -5x$; éste es el segundo término de la raíz. Se escribe $-5x$ al lado de $2x^2$ y se tiene un binomio $2x^2 - 5x$; este binomio se multiplica por $-5x$ y da $-10x^3 + 25x^2$. Este producto se resta (cambiando los signos) de $-10x^3 + 29x^2$; la diferencia es $4x^2$.

4) Se baja los dos términos siguientes y se tiene $4x^2 - 20x + 4$. Se duplica la parte de raíz hallada $2(x^2 - 5x) = 2x^2 - 10x$.

5) Se divide $(4x^2) \div (2x^2) = 2$; éste es el tercer término de la raíz. Este 2 se escribe al lado de $2x^2 - 10x$ y se forma el trinomio $2x^2 - 10x + 2$, que se multiplica por 2 y da: $4x^2 - 20x + 4$. Este producto se resta (cambiándole de signos) del residuo $4x^2 - 20x + 4$ y da cero.

PRUEBA

Se eleva al cuadrado la raíz cuadrada $x^2 - 5x + 2$ y si la operación está correcta debe ser igual a la cantidad subradical.

RAÍZ CUADRADA POR EL MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Es te método será explicado mediante el siguiente ejemplo, que pide extraer la raíz cuadrada del polinomio

$$9x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 7x + 6$$

La raíz será un polinomio de segundo grado, y por lo tanto de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

y el resto, si lo hay, será un polinomio de primer grado de la forma:

$$mx + n$$

Recordemos que la cantidad subradical es igual al cuadrado de la raíz más el residuo; ésto es:

$$9x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 7x + 6 \equiv (ax^2 + bx + c)^2 + mx + n$$

$$\equiv (a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)$$
$$x^2 + (2bc + m)x + (c^2 + n)$$

identificando coeficientes:

$$a^2 = 9 \qquad \text{(I)}$$

$$2ab = 6 \qquad \text{(II)}$$

$$b^2 + 2ac = 13 \qquad \text{(III)}$$

$$2bc + m = 7 \qquad \text{(IV)}$$

$$c^2 + n = 6 \qquad \text{(V)}$$

de (I): $a = \pm 3$

Suponiendo: $a = +3$, se deduce de las demás igualdades que:

$$b = 1, \quad c = 2,$$
$$m = 3, \quad n = 2$$

si $a = -3$,el resultado es:

$$b = -1 \quad c = -2,$$
$$m = 3, \quad n = 2$$

Por consiguiente, el polinomio dado admite dos raíces:

Primera raíz $= 3x^2 + x + 2$

Segunda raíz $= 3x^2 - x - 2$

y el resto en ambos casos es: $3x + 2$

RAÍZ CÚBICA DE POLINOMIOS

REGLA PRÁCTICA GENERAL

1° Se ordena El polinomio dado , se completa y se separa en grupos de tres en tres términos, empezando por la derecha.

2° Se extrae la raíz cúbica del primer término del primer grupo de la izquierda, que será el primer término de la raíz; este término se eleva al cubo y se resta del primer término del polinomio dado.

3° Se baja el siguiente grupo formado por los tres siguientes términos del polinomio y se divide el primero de ellos entre el triple del cuadrado de la raíz hallada; el cociente de esta división es el segundo término de la raíz.

4° Se forma tres productos:

a) El triple del cuadrado del primer término de la raíz por el segundo término de la raíz.

b) El triple del primer término de la raíz por el cuadrado del segundo término de la raíz.

c) El cubo del segundo término de la raíz.

Se suma los resultados obtenidos de los productos, se les cambia de signo y se les suma a los tres términos del polinomio dividendo que se habían bajado.

5° Se baja el siguiente grupo de términos, dividiéndose el primer término del residuo entre el triple del cuadrado del primer término de la raíz, el cociente es el tercer término de la raíz.

Se forma 3 productos:

a) El triple del cuadrado de la raíz hallada (1° y 2° términos) por el tercer término de la raíz.

b) El triple de la raíz hallada por el cuadrado del tercer término.

c) El cubo del tercer término de la raíz.

Se suma los productos obtenidos, se cambia de signo a sus términos y se les suma a los términos del residuo. Se repite hasta obtener como residuo un polinomio cuyo grado sea una unidad menor que el doble del grado de la raíz.

Ejemplo:

Extraer la raíz cúbica de:

$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

Solución:

Se ordena el polinomio con respecto a "x" y se dispone la operación de la siguiente manera:

$\sqrt[3]{x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1}$	$x^2 - 2x + 1$
$-x^6$	$3(x^2)^2 = 3x^4$
$-6x^5 + 15x^4 - 20x^3$	$(-6x^5) \div (3x)^4 = -2x$
$-6x^5 - 12x^4 + 8x^3$	a) $3(x^2)^2\,(-2x) = -6x^5$
$3x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 6x + 1$	b) $3(x^2)(-2x)^2 = 12x^4$
$-3x^4 + 12x^3 - 15x^2 + 6x - 1$	c) $(-2x)^3 = -8x^3$
$- \quad - \quad - \quad - \quad -$	$-6x^5 + 12x^4 - 8x^3$
	$(3x^4) \div (3x)^4 = 1$
	a) $3(x^2 - 2x)^2\,(1) = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2$
	b) $3(x^2 - 2x)(1)^2 = 3x^2 - 6x$
	c) $(1)^3 = 1$
	$3x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

La raíz cúbica obtenida es:

$$x^2 - 2x + 1$$

EXPLICACIÓN

1) Se extrae la $\sqrt[3]{\ }$ de x^6 y de x^2; éste será el primer término de la raíz cúbica del polinomio; x^2 se eleva al cubo y da x^6. Este cubo se resta del primer término del polinomio y se baja los tres términos siguientes que son:

$$-6x^5 + 15x^4 - 20x^3$$

2) Se halla el triple del cuadrado de x^2 que es:

$$3(x^2)^2 = 3x^4$$

3) Se divide $(-6x^5) \div (3x^4) = -2x$; éste es el segundo término de la raíz. Se forma los tres grupos que son:

a) $3(x^2)^2(-2x) = -6x^5$

b) $3(x^2)\,(-2x)^2 = 12x^4$

c) $(-2x)^3 = -8x^3$

4) Estos productos, con signos cambiados, se suma a los 3 términos anteriores; es decir:

$$-6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 6x^5 - 12x^4 + 8x^3 = 3x^4 - 12x^3$$

5) Se baja los 3 siguientes términos y se tiene:

$$3x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

6) Se divide $(3x^4) \div [3(x^2)^2]$ que da 1; éste último es el tercer término de la raíz.

7) Se forma los siguientes productos:

a) $3(x^2 - 2x)^2(1) = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2$

b) $3(x^2 - 2x)(1)^2 = 3x^2 - 6x$

c) $(1)^3 = 1$

8) Los productos con signo cambiado pasan a sumar a:

$$3x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 6x + 1 - 3x^4 + 12x^3 - 15x^2 + 6x - 1 = 0$$

El residuo es cero.

9) La raíz obtenida es $x^2 - 2x + 1$

PRUEBA

Para comprobar se eleva al cubo la raíz obtenida y debe obtener ser como resultado el polinomio dado.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Extraer la raíz cuadrada de:

$$4x^6 - 4x^5 + 13x^4 - 10x^3 + 11x^2 - 6x + 1$$

Solución:

Siguiendo los pasos señalados:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{4x^6-4x^5+13x^4-10x^3+11x^2-6x+1} & 2x^3-x^2+3x-1 \\ \hline
-4x^6 & 2(2x^3)=4x^3(\text{divisor}) \\ \hline
\quad -4x^5+13x^4 & (4x^3-x^2)(-x^2)=-4x^5+x^4 \\ \hline
\quad +4x^5-\ \ x^4 & (4x^3-2x^2+3x)(3x) \\ \hline
\qquad +12x^4-10x^3+11x^2 & \qquad =12x^4-6x^3+9x^2 \\ \hline
\qquad -12x^4+\ 6x^3-\ 9x^2 & (4x^3-2x^2+6x-1)(-1) \\ \hline
\qquad\qquad -4x^3+2x^2-6x+1 & \quad =-4x^3+2x^2+6x+1 \\
\qquad\qquad +4x^3-2x^2+6x-1 & \\ \hline
\qquad\qquad\ \ -\quad -\quad\ -\quad - &
\end{array}$$

Rpta.: La raíz es $2x^3-x^2+3x-1$

2.- Hallar m y n si la raíz cuadrada de:
$16x^4-32x^3+24x^2+mx+n$ es exacta.

Solución:

Extrayendo la raíz cuadrada:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{16x^4-32x^3+24x^2+mx+n} & 4x^2-4x+1 \\ \hline
-16x^4 & 2(4x^2)=8x^2\ (\text{divisor}) \\ \hline
\quad -32x^3+24x^2 & (8x^2-4x)(-4x) \\
\quad +32x^3-16x^2 & \quad =-32x^3+16x^2 \\ \hline
\qquad 8x^2+mx+n & (8x^2-8x-1)(1) \\
\qquad -8x^2+\ 8x-\ 1 & \quad =\ 8x^2-8x+1 \\ \hline
\qquad (m+8)x+(n-1) &
\end{array}$$

Si el polinomio tiene raíz cuadrada exacta, el resto debe ser un polinomio idénticamente nulo:

$$(m+8)x+(n-1)\equiv 0x+0$$

$$m+8=0 \quad \Rightarrow \quad m=-8$$

$$n-1=0 \quad \Rightarrow \quad n=1$$

Rpta.: $m=-8$, $n=1$

3.- Hallar m y n si la raíz cuadrada de:

$$x^4+6x^3+mx^2+12x+n$$

es exacta.

Solución:

Extrayendo la raíz cuadrada:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{x^4+6x^3+mx^2+12x+n} & x^2+3x+\dfrac{m-9}{2} \\ \hline
-x4 & 2(x)^2=2x^2 \\ \hline
\quad +6x^3+mx^2 & (2x^2+3x)(3x) \\
\quad -6x^3-9x^2 & =+6x^3+9x^2 \\ \hline
\qquad (m-9)x^2+12x+n & \left(2x^2+6x+\dfrac{m-9}{2}\right) \\
 & \qquad\qquad \left(\dfrac{m-9}{2}\right) \\
\qquad -(m-9)x^2-3(m-9)x-\left(\dfrac{m-9}{2}\right)^2 & \\ \hline
\qquad [12-3(m-9)]x+\left[n-\left(\dfrac{m-9}{2}\right)^2\right] &
\end{array}$$

si el polinomio tiene raíz cuadrada exacta, el resto debe ser un polinomio idénticamente nulo, luego:

$$[12-3(m-9)]\ x+\left[n-\left(\frac{m-9}{2}\right)^2\right] \quad 0x+0$$

Por consiguiente:

1) $12-3(m\ \ -9)=0$

$$12=3(m-9)$$

$$m=13$$

2) $n-\left(\dfrac{m-9}{2}\right)^2=0$

$$n=\left(\frac{m-9}{2}\right)^2$$

sustituyendo m:

$$n=\left(\frac{13-9}{2}\right)^2=4$$

Rpta.: $m=13$, $n=4$

4.- Hallar "m" si la raíz cuadrada de:

$$4x^{30}-4x^{18}+12x^{15}+x^6+mx^3+9$$

es exacta.

Solución:

Extrayendo la raíz cuadrada:

$\sqrt{4x^{30} - 4x^{18} + 12x^{15} + x^6 + mx^3 + 9}$	$2x^{15} - x^3 + 3$
$-4x^{30}$	$2(2x^{15}) = 4x^{15}$
$- 4x^{18} + 12x^{15} + x^6$	$(4x^{15} - x^3)(-x^3)$
$+4x^{18} \qquad - x^6$	$= -4x^{18} + x^6$
$+12x^{15} \qquad + mx^3 + 9$	$(4x^{15} - 2x^3 + 3)(3)$
$-12x^{15} \qquad + 6x^3 \quad - 9$	$= 12x^{15} - 6x^3 + 9$
$0 \qquad (m + 6)x^3 \quad 0$	

si la raíz es exacta, el polinomio resto debe ser idénticamente nulo.

$$\therefore \quad (m + 6)x^3 \equiv 0x^3$$

$$m + 6 = 0$$

$$m = - 6$$

5.- Hallar “m” y “n” si la raíz cuadrada de:

$$4x^4 + mx^3 + nx^2 + 24x + 16$$

es exacta.

Solución:

Aplicando el método de coeficientes indeterminados; para tal efecto, como el polinomio es de cuarto grado, su raíz cuadrada será de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

luego por la propiedad de raíz cuadrada:

$$4x^4 + mx^3 + nx^2 + 24x + 16 \equiv (ax^2 + bx + c)^3$$

$$4x^4 + mx^3 + nx^2 + 24x + 16 \equiv a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx$$

$$4x^4 + mx^3 + nx^2 + 24x + 16 \equiv a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2$$

identificando coeficientes:

$$a^2 = 4 \Rightarrow \quad a = \pm 2$$

$$2ab = m \qquad (1)$$

$$2ac + b^2 = n \qquad (2)$$

$$2bc = 24 \qquad (3)$$

$$c^2 = 4 \Rightarrow \quad a = 4$$

Para a = 2, c = 4; sustituyendo en la ecuación (3):

$$b = 3$$

sustituyendo en (1) y (2):

$$m = 12$$

$$n = 25$$

para: a = -2, c = -4; sustituyendo en (1), (2) y (3)

$$n = 25$$

$$b = -3$$

$$m = 12$$

Rpta.: $m = 12 \ , \ n = 25$

6.- Hallar m, n, p si la raíz cúbica de:

$$x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 4x^3 + mx^2 + nx + p$$

es exacta.

Solución:

Extrayendo la raíz cúbica:

$\sqrt[3]{x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 4x^3 + mx^2 + nx + p}$	$x^2 + 2x - 1$
$-x^6$	$3(x^2)^2 = 3x^4$(divisor)
$+ 6x^5 + 9x^4 - 4x^3$	$(6x^5) \div (3x^4) = 2x$
$-6x^5 - 12x^4 - 8x^3$	$3(x^2)^2\ (2x) = 6x^5$
$-3x^4 - 12x^3 + mx^2 + nx + p$	$3(x^2)(2x)^2 = 12x^4$
$+3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x + 1$	$(2x)^3 = 8x^3$
$(m + 9)x^2 + (n - 6)x + (p + 1)$	$(6x^5 + 12x^4 + 8x^3)(-1)$
	$(-3x^4) \div (3x^4) = -1$
	$3(x^2 + 2x)^2(-1) = -3x^4 - 12x^3 - 12x^2$
	$3(x^2 + 2x)(-1)^2 = 3x^2 + 6x$
	$(-1)^3 = -1$
	$(-3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 6x - 1)(-1)$

Si la raíz cúbica es exacta el resto es un polinomio idénticamente nulo, así:

$$(m + 9)x^2 + (n - 6)x + (p + 1) \equiv 0x^2 + 0x + 0$$

identificando coeficientes:

$$m + 9 = 0 \qquad m = -9$$

$$n - 6 = 0 \qquad n = 6$$

$$p + 1 = 0 \qquad p = -1$$

RADICALES DOBLES

CONCEPTO

Se denomina radical doble al que presenta la siguiente forma general:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}}$$

Ejemplos:

i) $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$

ii) $\sqrt{11 - \sqrt{120}}$

TRANSFORMACIÓN DE RADICALES DOBLES A RADICALES SIMPLES O SENCILLOS

Todo radical doble se puede descomponer en la suma o diferencia de dos radicales simples.

Deducción de la fórmula:

En general:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

de donde se deduce que:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \qquad \text{(I)}$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \qquad \text{(II)}$$

Porcedimiento para calcular "x" é "y"

1) Cálculo de "x".

Sumando (I) + (II):

$$2\sqrt{x} = \sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}}$$

Elevando al cuadrado:

$$4x = A + \sqrt{B} + 2\sqrt{A + \sqrt{B}}\sqrt{A - \sqrt{B}} + A - \sqrt{B}$$

$$x = \frac{2A + 2\sqrt{A^2 - B}}{4} = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

haciendo:

$$C = \sqrt{A^2 - B}$$

$$\therefore \qquad x = \frac{A + C}{2} \qquad (\alpha)$$

2) Con procedimiento análogo, se debe determinar el valor de "y":

$$x = \frac{A - C}{2} \qquad (\beta)$$

Sustituyendo los valores de "x" é "y", en (I) y (II):

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} - \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

En resumen, la fórmula para descomponer una raíz doble en raíces simples es:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

donde:

$$C = \sqrt{A^2 - B}$$

Es decir que, para transformar raíces dobles, en raíces simples, $A^2 - B$ debe ser un número cuadrado perfecto.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Descomponer en radicales simples:

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$$

Solución:

Previamente, introduzcamos el 6 dentro del radical interior; y, aplicando la fórmula:

$$\sqrt{11+\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+C}{2}} + \sqrt{\frac{11-C}{2}} \qquad (1)$$

Cálculo de C:

$$C = \sqrt{11^2 - 72} = \sqrt{121 - 72} = \sqrt{49} = 7$$

reemplazando en (1):

$$\sqrt{11+\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{11+\sqrt{72}} = 3 + \sqrt{2}$$

NOTA.-

Este ejercicio y sus similares se pueden resolver dándole la forma de binomio al cuadrado, bajo radical, y procediendo de la siguiente forma general:

$$\sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

Aplicando al ejercicio anterior:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+\sqrt{72}} = \sqrt{11+\sqrt{4\,.\,18}}$$

$$= \sqrt{11+2\sqrt{18}}$$

$$\sqrt{11+2\sqrt{18}} = \sqrt{11+2\sqrt{9\,.\,2}}$$

$$= \sqrt{9+2+2\sqrt{9\,.\,2}} = \sqrt{9} + \sqrt{2}$$

$\therefore$

$$\sqrt{11+2\sqrt{18}} = 3 + \sqrt{2}$$

2.- Calcular el valor de:

$$E = \sqrt{12+\sqrt{140}} - \sqrt{8+\sqrt{28}} + \sqrt{11-2\sqrt{30}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$$

Solución:

Transformando cada radical doble separadamente, haciendo que sean desarrollo de cuadrado perfecto:

$$\text{(I)} \quad \sqrt{12+\sqrt{140}} = \sqrt{12+\sqrt{4\,.\,35}}$$

$$= \sqrt{7+5+2\sqrt{7\,.\,5}} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$$

$$\text{(II)} \quad \sqrt{8+\sqrt{28}} = \sqrt{8+\sqrt{4\,.\,7}}$$

$$= \sqrt{7+1+2\sqrt{7\,.\,1}} = \sqrt{7} + \sqrt{1}$$

$$\text{(III)} \quad \sqrt{11-2\sqrt{30}} = \sqrt{6+5-2\sqrt{6\,.\,5}}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\text{(IV)} \quad \sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{6+1-2\sqrt{6\,.\,1}}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{1}$$

Sustituyendo en la expresión propuesta:

$$E = \sqrt{7} + \sqrt{5} - \left(\sqrt{7} + \sqrt{1}\right) + \sqrt{6} - \sqrt{5} - \left(\sqrt{6} - \sqrt{1}\right)$$

quitando paréntesis:

$$E = \sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{7} + \sqrt{1} + \sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{1}$$

reduciendo: $E = 0$

OTRO MÉTODO

Aplicando la fórmula al mismo problema anterior

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$E = \sqrt{12+\sqrt{140}} - \sqrt{8+\sqrt{28}} + \sqrt{11-2\sqrt{30}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$$

Solución:

Analizando cada término de la expresión:

Primer término:

$$\sqrt{12+\sqrt{140}} = \sqrt{\frac{12+C_1}{2}} + \sqrt{\frac{12-C_1}{2}} \qquad (1)$$

Cálculo de C_1:

$$C_1 = \sqrt{12^2 - 140} = \sqrt{144 - 140} = \sqrt{4} = 2$$

Reemplazando en (1):

$$\sqrt{12 + \sqrt{140}} = \sqrt{\frac{12+2}{2}} + \sqrt{\frac{12-2}{2}}$$

$$= \sqrt{7} + \sqrt{5} \qquad (\alpha)$$

Segundo término:

$$\sqrt{8 + \sqrt{28}} = \sqrt{\frac{8+C_2}{2}} + \sqrt{\frac{8-C_2}{2}} \qquad (2)$$

Cálculo de C_2 =

$$C_2 = \sqrt{8^2 - 28} = \sqrt{64 - 28} = \sqrt{36} = 6$$

Reemplazando en (2):

$$\sqrt{8 + \sqrt{28}} = \sqrt{\frac{8+6}{2}} + \sqrt{\frac{8-6}{2}}$$

$$= \sqrt{7} + 1 \qquad (\beta)$$

Tercer término:

$$\sqrt{11 - 2\sqrt{30}} = \sqrt{11 - \sqrt{4 \,.\, 30}}$$

$$\sqrt{8 + \sqrt{120}} = \sqrt{\frac{11+C_3}{2}} + \sqrt{\frac{11-C_3}{2}} \qquad (3)$$

Cálculo de C_3:

$$C_3 = \sqrt{11^2 - 120} = \sqrt{121 - 120} = \sqrt{1} = 1 \qquad (\gamma)$$

Reemplazando en (3):

$$\sqrt{11 - \sqrt{120}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

Cuarto término:

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{7 - \sqrt{2^2 \,.\, 6}} = \sqrt{7 - \sqrt{24}}$$

$$\sqrt{7 + \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+C_4}{2}} + \sqrt{\frac{8-C_4}{2}} \qquad (4)$$

Cálculo de C_4:

$$C_4 = \sqrt{7^2 - 24} = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25} = 5 \qquad (\delta)$$

Reemplazando en (4):

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} - \sqrt{1} = \sqrt{6} - 1 \qquad (\lambda)$$

Reemplazando los valores obtenidos en la ecuación propuesta:

$$E = \sqrt{7} + \sqrt{5} - \left(\sqrt{7} + \sqrt{1}\right) + \sqrt{6} - \sqrt{5} - \left(\sqrt{6} - \sqrt{1}\right)$$

$$E = 0$$

3.- Simplificar:

$$E = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{9 + 5\sqrt{3} - \sqrt{3\left(\sqrt{3} + 2\right) + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}}$$

Solución:

Para simplificar se descompone en radicales simples.

a) Para descomponer en radicales simples, se empieza a trabajar desde los radicales interiores hacia los exteriores:

$$E = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{9 + 5\sqrt{3} - \sqrt{3\left(\sqrt{3} + 2\right) + \underbrace{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}_{\mathrm{I}}}}}$$

$$\mathrm{I} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 1 + 2\sqrt{3 \,.\, 1}} = \sqrt{3} + \sqrt{1}$$

sustituyendo en E:

$$E = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{9 + 5\sqrt{3} - \sqrt{3\left(\sqrt{3} + 2\right) + \sqrt{3} + 1}}}$$

$$E = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{9 + 5\sqrt{3} - \underbrace{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}_{\mathrm{II}}}}$$

$$\mathrm{II} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 + 2\sqrt{4 \,.\, 3}}$$

$$= \sqrt{4 + 3 + 2\sqrt{4 \,.\, 3}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

sustituyendo en E:

$$E = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{9 + 5\sqrt{3} - \left(2 + \sqrt{3}\right)}}$$

$$E = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \underbrace{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}_{\mathrm{III} = \mathrm{II}}}$$

$$III = II = \sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

Sustituyendo en la expresión principal:

$E = 2$

4.- Hallar el valor de E:

$$E = \sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots+2\sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}}}$$

Solución:

Para hallar el valor se descompone en radicales simples.

Por se la expresión una sucesión de radicales dobles, se empieza por su parte interna:

$$E = \sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots+2\sqrt{1+2\underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}_{I}}}}}}$$

$$I = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+1+2\sqrt{2\,.\,1}}$$

$$= \sqrt{2}+\sqrt{1} = \sqrt{2}+1$$

reemplazando en la expresión E:

$$E = \sqrt{1+2\sqrt{1+1\sqrt{1+\ldots+2\sqrt{1+2\left(\sqrt{2}+1\right)}}}}$$

$$E = \sqrt{1+2\sqrt{1+1\sqrt{1+\ldots+2\underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}_{I}}}}$$

$$I = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$$

reemplazando en la expresión E:

$$E = \sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots+2\sqrt{1+2\left(1+\sqrt{2}\right)}}}}$$

$$E = \sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}$$

se observa que el radical doble que se encuentra en la parte interna al hacer la operación siempre es:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$$

y al reemplazar en la expresión se obtiene el mismo resultado.

$\therefore$ Si se continua operando, se tendrá:

$$E = \sqrt{2}+1$$

5.- Simplificar:

$$E = \sqrt{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{56+40\sqrt{2}}-\sqrt{34+26\sqrt{2}}+\sqrt{23+37\sqrt{2}}\right)$$

Solución:

Ninguno de los radicales dobles que tiene la expresión puede transformarse directamente a radicales simples, por ello entonces se efectuará el producto de radicales.

Efectuando:

$$E = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(56+40\sqrt{2}\right)}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(34+26\sqrt{2}\right)}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(23+37\sqrt{2}\right)}$$

$$E = \sqrt{80-56+16\sqrt{2}}-\sqrt{52-34+8\sqrt{2}}+\sqrt{74-23-14\sqrt{2}}$$

$$E = \sqrt{24+16\sqrt{2}}-\sqrt{18+8\sqrt{2}}+\sqrt{51-14\sqrt{2}}$$

transformando a radical simple, cada radical doble:

a) $\sqrt{24+16\sqrt{2}} = \sqrt{24+2\sqrt{128}}$

$$= \sqrt{16+8+2\sqrt{16\,.\,8}} = \sqrt{16}+\sqrt{8}$$

$$\sqrt{24+16\sqrt{2}} = 4+2\sqrt{2} \qquad (1)$$

b) $\sqrt{18+8\sqrt{2}} = \sqrt{18+2\sqrt{32}} = \sqrt{16+2+2\sqrt{16\,.\,2}}$

$$= \sqrt{16}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18 + 8\sqrt{2}} = 4 + \sqrt{2} \qquad (2)$$

c) $\sqrt{51 - 14\sqrt{2}} = \sqrt{51 - 2\sqrt{49 . 2}}$

$$= \sqrt{49 + 2 - 2\sqrt{49 . 2}} = \sqrt{49} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{51 + 14\sqrt{2}} = 7 + \sqrt{2} \qquad (3)$$

sustituyendo (1), (2) y (3) en la expresión:

$$E = 7$$

6.- Hallar la raíz cuadrada de:

$$E^2 = 5x - 2 + 2\sqrt{6x^2 - 7x - 3}$$

Solución:

Al extraer la raíz cuadrada se tendrá:

$$E = \sqrt{5x - 2 + 2\sqrt{6x^2 - 7x - 3}}$$

factorizando por el método del aspa al radical interior se obtiene:

$$6x^2 - 7x - 3 = (3x + 1)(2x - 3)$$

$\therefore$ sustituyendo:

$$E = \sqrt{5x - 2 + 2\sqrt{(3x + 1)(2x - 3)}}$$

Dando la forma de $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$, donde:

$$a = 3x + 1 \quad , \quad b = 2x - 3$$

$$E = \sqrt{(3x + 1) + (2x - 3) + 2\sqrt{(3x + 1)(2x - 3)}}$$

$$= \sqrt{(3x + 1)} + \sqrt{(2x - 3)}$$

Luego:

$$E = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{2x - 3}$$

7.- Descomponer en radicales simples:

$$E = \sqrt{7x + 16y + 4 + 2\sqrt{21xy + 39y^2 + 56x + 92y - 32}}$$

Solución:

Factorizando la expresión que aparece en el radical interior mediante el aspa doble:

$$0x^2 + 21xy + 39y^2 + 56x + 92y - 32$$
$$= (7x + 13y - 4)(3y + 8)$$

$$E = \sqrt{7x + 16y + 4 + 2\sqrt{(7x + 13y - 4)(3y + 8)}}$$

o también:

$$E = \sqrt{(7x + 13y - 4) + (3y + 8) + 2\sqrt{(7x + 13y - 4)(3y + 8)}} = \sqrt{7x + 13y - 4} + \sqrt{3y + 8}$$

8.- Transformar a radicales simples la siguiente expresión:

$$E = \sqrt{5x - 2 + \sqrt{24x^2 - 14x - 5}}$$

Solución:

Factorizando el radical interior por el método del aspa simple:

$$24x^2 - 14x - 5 = (6x - 5)(4x + 1)$$

sustituyendo en E:

$$E = \sqrt{5x - 2 + \sqrt{(6x - 5)(4x + 1)}}$$

Dándole la forma de $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$ debido a que falta el número 2 en el radical interior para que sea el desarrollo de una suma al cuadrado, se multiplica por 2 y se introduce 1/4 en la forma 1/2 . 1/2 para cada factor, ésto es:

$$E = \sqrt{5x - 2 + 2\sqrt{\left(\frac{6x - 5}{2}\right)\left(\frac{4x + 1}{2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{6x - 5}{2}\right) + \left(\frac{4x + 1}{2}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{6x - 5}{2}\right)\left(\frac{4x + 1}{2}\right)}}$$

$$\therefore \quad E = \sqrt{\frac{6x - 5}{2}} + \sqrt{\frac{4x + 1}{2}}$$

9.- Transformar en radicales simples:

$$E = \sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{2x - \frac{1}{4}}}$$

Solución:

Efectuando sucesivamente operaciones con la finalidad de dar la forma conveniente se obtiene:

$$E = \sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{4}\left(2x - \frac{1}{4}\right)}} = \sqrt{x + \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{16}}}$$

$$= \sqrt{x + 2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{16}\right)}}$$

$$= \sqrt{x + 2\sqrt{\frac{x}{8} - \frac{1}{64}}} = \sqrt{x + 2\sqrt{\frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{8}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8} + \left(x - \frac{1}{8}\right) + 2\sqrt{\frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{8}\right)}}$$

$$E = \sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{x - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{8x - 1}{8}}$$

10.- Simplificar:

$$E = \sqrt{a + b + c + \sqrt{c(2a + 2b + c)}}$$

$$- \sqrt{a + b + c - \sqrt{c(2a + 2b + c)}}$$

Solución:

Transformando los radicales doble a radicales simples:

$$\sqrt{a + b + c + 2\sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{2a + 2b + c}{2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2a + 2b + c}{2}} + \sqrt{\frac{c}{2}}$$

$$\sqrt{a + b + c - 2\sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{2a + 2b + c}{2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2a + 2b + c}{2}} - \sqrt{\frac{c}{2}}$$

sustituyendo en E:

$$E = \sqrt{\frac{2a + 2b + c}{2}} + \sqrt{\frac{c}{2}}$$

$$- \left(\sqrt{\frac{2a + 2b + c}{2}} + \sqrt{\frac{c}{2}}\right)$$

$$E = 2\sqrt{\frac{c}{2}}$$

$$E = \sqrt{2c}$$

11.- Simplificar:

$$E = \frac{\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}} - \frac{\sqrt{c - \sqrt{c^2 - d^2}}}{\sqrt{c + d} - \sqrt{c - d}}$$

Solución:

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{2}$ cada fracción:

$$E = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}\right)}{\sqrt{2 + 2\sqrt{(a + b)(a - b)}}}$$

$$- \frac{\sqrt{2c - 2\sqrt{(c + d)(c - d)}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{c + d} - \sqrt{c - d}\right)}$$

transformando a radicales simples:

$$E = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}\right)}{\left(\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}\right)} - \frac{\left(\sqrt{c + d} - \sqrt{c - d}\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{c + d} - \sqrt{c - d}\right)}$$

simplificando:

$$E = \frac{\sqrt{2}}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12.- Simplificar:

$$E = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 2\sqrt{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}}}}$$

Solución:

Transformando el denominador previamente:

$$D = \sqrt{-2 + 2\underbrace{\sqrt{2x^2 + 2x + 2\underbrace{\sqrt{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}}_{\text{I}}}}_{\text{II}}}$$

a) Factorizando I:

$$I = x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x^4 - 1) + 2x(x^2 - 1)$$
$$= (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2x(x^2 - 1)$$

$$I = x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1 + 2x)$$
$$= (x^2 - 1)(x + 1)^2$$

b) Descomponiendo II en raíces simples:

$$II = \sqrt{2x^2 + 2x + 2\sqrt{(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1)}}$$

$$= \sqrt{(x^2 - 1) + (x^2 + 2x + 1) + 2\sqrt{(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1)}}$$

$$= \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x^2 - 1} \quad \sqrt{(x + 1)^2}$$

$$II = \sqrt{x^2 - 1} + x + 1$$

Sustituyendo, el valor del denominador será:

$$D = \sqrt{-2 + 2\left(\sqrt{x^2 - 1} + x + 1\right)} = \sqrt{-2 + 2\sqrt{x^2 - 1} + 2x + 2}$$
$$= \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}$$

Sustituyendo en la expresión se tendrá:

$$E = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}}$$

$$E = 1$$

13.- Simplificar:

$$E = \frac{\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{12 + 8\sqrt{2}}}{\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{13 + 4\sqrt{10}} - \sqrt{11 - 2\sqrt{10}}}$$

Solución:

Transformando cada uno de los radicales dobles en simples:

a) $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{9 - 2\sqrt{8}} = \sqrt{8 + 1 - 2\sqrt{8 \cdot 1}}$
$$= \sqrt{8} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$$

b) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2 \cdot 1}} = \sqrt{2 + 1 + 2\sqrt{2 \cdot 1}}$
$$= \sqrt{2} + 1$$

c) $\sqrt{12 + 8\sqrt{2}} = \sqrt{12 + 2\sqrt{32}} = \sqrt{8 + 4 + 2\sqrt{8 \cdot 4}}$
$$= \sqrt{8} + \sqrt{4} = 2\sqrt{2} + 2$$

d) $\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} = \sqrt{15 - 2\sqrt{50}} = \sqrt{10 + 5 - 2\sqrt{10 \cdot 5}}$
$$= \sqrt{10} - \sqrt{5}$$

e) $\sqrt{13 + 4\sqrt{10}} = \sqrt{13 + 2\sqrt{40}} = \sqrt{8 + 5 + 2\sqrt{8 \cdot 5}}$
$$= \sqrt{8} + \sqrt{5} = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

f) $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{10 + 1 - 2\sqrt{10 \cdot 1}} = \sqrt{10} - 1$

La raíz cuadrada de una expresión, tiene 2 soluciones:

$$\sqrt{11 - 2\sqrt{10}} = \pm\left(\sqrt{10} - 1\right)$$

Obsérvese que en los ejercicios, se toma solamente el valor aritmético, es decir:

$$\sqrt{11 - 2\sqrt{10}} = \left(\sqrt{10} - 1\right)$$

Con esta aclaración sustituiremos estos valores en la expresión:

$$E = \frac{2\sqrt{2} - 1 + 2\left(\sqrt{2} + 1\right) + 2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{10} - \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} - \left(\sqrt{10} - 1\right)}$$

$$E = \frac{6\sqrt{2} + 3}{2\sqrt{2} + 1} = \frac{3\left(2\sqrt{2} + 1\right)}{\left(2\sqrt{2} + 1\right)}$$

$$E = 3$$

14.- Hallar el valor de $E = \dfrac{ab}{c}$ si el radical:

$$\sqrt{ax + by + \sqrt{(ab + c)xy}}$$

puede descomponerse en dos radicales simples.

Solución:

Si el radical doble se puede descomponer en dos radicales simples, la expresión debe ser un trinomio cuadrado perfecto, de la forma:

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

por consiguiente:

$$2\sqrt{ax}\sqrt{by} = \sqrt{(ab + c)xy}$$

elevando al cuadrado:

$$4(ax)(by) = (ab + c)xy$$

simplificando:

$$4ab = ab + c$$

$$3ab = c$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad E = \frac{1}{3}$$

DESCOMPOSICIÓN EN RADICALES SIMPLES, EL RADICAL DE LA FORMA:

$$\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}}$$

Sea:

$$\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \qquad \text{(I)}$$

El objetivo es calcular x, y, z en función de los valores conocidos A, B, C, D. Se procede así:

Se eleva (I) al cuadrado:

$$\left(\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}}\right)^2 = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2$$

$$A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$$

identificando los términos racionales e irracionales:

$$x + y + z = A \qquad (1)$$

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{B} \qquad (2)$$

$$2\sqrt{xz} = \sqrt{C} \qquad (3)$$

$$2\sqrt{yz} = \sqrt{D} \qquad (4)$$

que es un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Resolviendo en el sistema conformado por las ecuaciones (2), (3) y (4) se obtiene x, y, z. La ecuación (1) es la ecuación de comprobación de los valores obtenidos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Transformar a una suma de radicales simples:

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}}$$

Solución:

Sea:

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado:

$$10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$$

identificando las partes racionales e irracionales:

$$x + y + z = 10 \qquad (1)$$

(ecuación de comprobación)

$$2\sqrt{xy} = 2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad xy = 6 \qquad (2)$$

$$2\sqrt{xz} = 2\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad xz = 10 \qquad (3)$$

$$2\sqrt{yz} = 2\sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad yz = 15 \qquad (4)$$

Multiplicando (2), (3) y (4) entre sí:

$$x^2y^2z^2 = 3 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 3 = 5^2 \,.\, 3^2 \,.\, 2^2$$

extrayendo raíz cuadrada:

$$xyz = 5 \,.\, 3 \,.\, 2$$

de (2), xy = 6; por lo tanto:

$$6z = 30$$

$$z = 5$$

sustituyendo este valor:

En (3): $x(5) = 10$

$$x = 2$$

En (4): $y(5) = 15$

$$y = 3$$

Sustituyendo en (1) para comprobar:

$$x + y + z = 2 + 3 + 5 = 10$$

Finalmente:

$$\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

2.- Extraer la raíz cuadrada:

$$24+4\sqrt{15}+4\sqrt{21}+2\sqrt{35}$$

Solución:

Haciendo:

$$\sqrt{24+4\sqrt{15}+4\sqrt{21}+2\sqrt{35}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado:

$$24+4\sqrt{15}+4\sqrt{21}+2\sqrt{35}$$
$$=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$$

identificando las partes racionales e irracionales:

$$x+y+z=24 \qquad (1)$$

$$2\sqrt{xy}=4\sqrt{15} \Rightarrow xy=60 \qquad (2)$$

$$2\sqrt{xz}=4\sqrt{21} \Rightarrow xz=84 \qquad (3)$$

$$2\sqrt{yz}=2\sqrt{35} \Rightarrow yz=35 \qquad (4)$$

Multiplicando (2), (3), (4):

$$x^2y^2z^2=5\,.\,12\,.\,12\,.\,7\,.\,5\,.\,7$$

extrayendo la raíz cuadrada:

$$xyz=12\,.\,7\,.\,5 \qquad (5)$$

De (2), xy = 60; por lo tanto:

$$60z=60\,.\,7$$
$$z=7$$

De (3):

$$xz=84$$
$$7x=84$$
$$x=12$$

De (4):

$$yz=35$$
$$7y=35$$
$$y=5$$

En (1): $x+y+z=12+5+7=24$

De este modo:

$$\sqrt{24+4\sqrt{15}+4\sqrt{21}+2\sqrt{35}}=\sqrt{12}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

3.- Extraer la raíz cuadrada de:

$$\sqrt{a+3b+4+4\sqrt{a}+4\sqrt{3b}+2\sqrt{3ab}}$$

Solución:

Haciendo:

$$\sqrt{a+3b+4+4\sqrt{a}+4\sqrt{3b}+2\sqrt{3ab}}$$
$$=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado:

$$a+3b+4+4\sqrt{a}+4\sqrt{3b}+2\sqrt{3ab}$$
$$=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$$

identificando las partes racionales e irracionales:

$$x+y+z=a+3b+4 \qquad (1)$$

$$2\sqrt{xy}=4\sqrt{a} \Rightarrow xy=4a \qquad (2)$$

$$2\sqrt{xz}=4\sqrt{3b} \Rightarrow xz=12b \qquad (3)$$

$$2\sqrt{yz}=2\sqrt{3ab} \Rightarrow yz=3ab \qquad (4)$$

Multiplicando (2), (3), (4) entre sí:

$$x^2y^2z^2=144a^2b^2$$

extrayendo raíz cuadrada:

$$xyz=12ab \qquad (5)$$

de (2), xy = 4a; por lo tanto:

$$4ax=12ab$$
$$z=3b$$

En (3): $x(3b)=12b$
$$x=4$$

En (4): $y(3b)=3ab$
$$y=a$$

En (1): $x+y+z=4+a+3b$ $\quad\therefore$

El resultado final es:

$$\sqrt{a + 3b + 4 + 4\sqrt{a} + 4\sqrt{3b} + 2\sqrt{3ab}}$$
$$= \sqrt{4} + \sqrt{a} + \sqrt{3b}$$

DESCOMPOSICIÓN EN RADICALES SIMPLES, EL RADICAL DE LA FORMA:

$$\sqrt{A + \sqrt{B} - \sqrt{C} - \sqrt{D}}$$

En este caso, los radicales simples deben llevar algún signo negativo.

Sea:

$$\sqrt{A + \sqrt{B} - \sqrt{C} - \sqrt{D}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado:

$$A + \sqrt{B} - \sqrt{C} - \sqrt{D}$$
$$= x + y + z + 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{xz} - 2\sqrt{yz}$$

identificando las partes racionales e irracionales:

$$x + y + z = A \qquad (1)$$

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{B} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{xy} = \frac{\sqrt{B}}{2} \qquad (2)$$

$$-2\sqrt{xy} = -\sqrt{C} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{xz} = \frac{\sqrt{C}}{2} \qquad (3)$$

$$-2\sqrt{xy} = -\sqrt{D} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{yz} = \frac{\sqrt{D}}{2} \qquad (4)$$

con las ecuaciones obtenidas se procede en forma similar al procedimiento anterior.

1.- Transformar a radicales simples:

$$\sqrt{14 + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{14} - 2\sqrt{35}}$$

Solución:

Haciendo:

$$\sqrt{14 + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{14} - 2\sqrt{35}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}$$

elevando al cuadrado:

$$14 + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{14} - 2\sqrt{35}$$
$$= x + y + z + 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{xz} - 2\sqrt{yz}$$

identificando las partes racionales e irracionales:

$$x + y + z = 14 \qquad (1)$$

$$2\sqrt{10} = 2\sqrt{xy} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{xy} = \sqrt{10} \qquad (2)$$

$$-2\sqrt{14} = -2\sqrt{xz} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{xz} = \sqrt{14} \qquad (3)$$

$$-2\sqrt{35} = -2\sqrt{yz} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{yz} = \sqrt{35} \qquad (4)$$

descomponiendo los dos miembros de las ecuaciones (2), (3) y (4) en factores:

De (2): $\sqrt{x}\,\sqrt{y} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{5}$

De (3): $\sqrt{x}\,\sqrt{z} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{7}$

De (4): $\sqrt{x}\,\sqrt{z} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{7}$

de las dos primeras ecuaciones, el factor que se repite en el primer miembro es $\sqrt{x}$ y en el segundo miembro $\sqrt{2}$, por consiguiente:

$$\sqrt{x} = \sqrt{2}$$

De (2), si $\sqrt{x} = \sqrt{2}$:
$\sqrt{y} = \sqrt{5}$

De (3), si $\sqrt{x} = \sqrt{2}$:
$\sqrt{z} = \sqrt{7}$

Estos valores de y, z satisfacen la ecuación (4):

$\therefore \quad x = 2, \quad y = 5, \quad z = 7$

Como comprobación se sustituye en (1):

$$x + y + z = 2 + 5 + 7 = 14$$

así:

$$\sqrt{14 + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{14} - 2\sqrt{35}} = \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}$$

DESCOMPOSICIÓN EN RADICALES SIMPLES. EL RADICAL DE LA FORMA:

$$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$$

Demostremos que si:

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = x + \sqrt{y}$$

también se cumple que:

$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = x - \sqrt{y}$$

Solución:

Haciendo:

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = x + \sqrt{y}$$

elevando al cubo:

$$\left(\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}\right)^3 = \left(x + \sqrt{y}\right)^3$$

$$A + \sqrt{B} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3x\left(\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^3$$

$$A + \sqrt{B} = x^3 + 3xy + 3x^2\sqrt{y} + y\sqrt{y}$$

igualando las partes racionales e irracionales:

$$A = x^3 + 3xy \qquad \text{(I)}$$

$$\sqrt{B} = 3x^2\sqrt{y} + y\sqrt{y} \qquad \text{(II)}$$

Restando (I) - (II) y ordenando:

$$A - \sqrt{B} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3x\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^3$$

$$A - \sqrt{B} = \left(x - \sqrt{y}\right)^3$$

extrayendo la raíz cúbica queda demostrado que:

$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = x - \sqrt{y}$$

En forma general:

$$\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm \sqrt{y}$$

donde, conocidos los valores de A y B se debe calcular "x" é "y" en función de los anteriores.

Por lo demostrado,si:

$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = x + \sqrt{y} \qquad (\alpha)$$

$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = x - \sqrt{y} \qquad (\beta)$$

Multiplicando $(\alpha)\ .\ (\beta)$:

$$\sqrt[3]{\left(A + \sqrt{B}\right)\left(A - \sqrt{B}\right)} = \left(x + \sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{y}\right)$$

$$\sqrt[3]{A^2 - B} = x^2 - y$$

haciendo: $C = \sqrt[3]{A^2 - B}$ se tendrá:

$$C = x^2 - y$$

$$y = x^2 - C \qquad (\gamma)$$

De (I) se sabe que:

$$A = x^3 + 3xy$$

sustituyendo el valor de "y":

$$A = x^3 + 3x(x^2 - C) = x^3 + 3x^3 - 3xC$$

$$A = 4x^3 - 3xC \qquad (\Phi)$$

De donde por tanteos, se encuentra el valor de "x" que sustituyendo en (γ) da el valor de "y".

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Extraer la raíz cúbica:

$$7 + 5\sqrt{2}$$

Solución:

Previamente igualemos:

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}$$

Haciendo:

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = x + \sqrt{y}$$

Cálculo de C:

$$C = \sqrt[3]{7^2 - 50} = \sqrt[3]{49 - 50} = -1$$

sustituyendo en Φ, donde:

$$A = 4x^3 - 3xC$$

$$A = 4x^3 - 3x(-1) = 7$$

$$\therefore \qquad 4x^3 + 3x = 7$$

por tanteos, x = 1 evidentemente:

$$4(1)^3 + 3(1) = 7$$

sustituyendo valores en (γ):

$$y = x^2 - C = (1)^2 - (-1) = 2$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

2.- Transformar a radicales simples:

$$\sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}$$

Solución:

Sea:

$$\sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}} = x - \sqrt{y}$$

Cálculo de C:

$$C = \sqrt[3]{(54)^2 - (30\sqrt{3})^2}$$

$$C = \sqrt[3]{2\,916 - 2\,700} = \sqrt[3]{216} = 6$$

Si: $4x^3 - 3Cx = A$

Sustituyendo valores de A y C se tiene:

$$4x^3 - 3(6)x = 54$$

$$x = 3$$

Sustituyendo valores de x y C:

$$y = x^2 - C$$

$$y = (3)^2 - 6 = 3$$

$$\therefore \sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}} = 3 - \sqrt{3}$$

3.- Hallar la raíz cúbica de:

$$14\sqrt{5} + 18\sqrt{3}$$

Solución:

Afectando de raíz cúbica a la expresión:

$$\sqrt[3]{14\sqrt{5} + 18\sqrt{3}}$$

factorizando en el radicando: $3\sqrt{3}$

$$E = \sqrt[3]{3\sqrt{3}\left(6 + \frac{14\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{3})^3\left(6 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}$$

$$E = \sqrt{3}\sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

Haciendo:

$$\sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}} = x + \sqrt{y}$$

Cálculo de C:

$$C = \sqrt[3]{(6)^2 - \left(\frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} = \sqrt[3]{36 - \frac{980}{27}}$$

$$C = \sqrt[3]{\frac{972 - 980}{27}} = \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}$$

Sustituyendo valores de C y A en:

$$4x^3 - 3Cx = A$$

$$4x^3 - 3\left(-\frac{2}{3}\right)x = 6$$

$$4x^3 + 2x = 6$$

$$2x^3 + x = 3$$

por tanteos: $\qquad x = 1$

sustituyendo valores de x, C en:

$$y = x^2 - C$$

$$y = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Luego:

$$\sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}} = 1 + \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Entonces, el valor de E será:

$$E = \sqrt{3}\left(1 + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \sqrt{3} + \sqrt{5} \qquad \therefore \qquad \sqrt[3]{14\sqrt{5} + 18\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Señalar la expresión equivalente a:

$$\sqrt{\frac{x^2 - x + 2}{2} + \sqrt{x^2 + x - 1}}$$

a) $\sqrt{\frac{3x^2 + 3x}{2} + 2\sqrt{x^4 + 3x - 2}}$

b) $\sqrt{\frac{3x^2 + 3x}{2} + \sqrt{\frac{x^4 + 3x - 2}{2}}}$

c) $\sqrt{\frac{3x^2 + x}{2} + 2\sqrt{x^4 + 3x - 2}}$

d) $\sqrt{\frac{3x^2 + x}{2} + \sqrt{2(x^4 + 3x - 2)}}$

e) Ninguna

2. Si: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$; calcular:

$$L = \frac{(a + b + c)^{3n}}{\left(81^{\frac{3n}{4} + \frac{1}{8}}\right)a^n b^n c^n}$$

a) 3 b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{9}$

3. Si se sabe que: $\sqrt{5} = 2{,}23607$; hallar el valor de:

$$I = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2} + \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}}$$

a) 0,44721 b) 0,44720 c) 0,44719

d)0,44621 e) 0,44620

4. Simplificar:

$$D = \frac{42x^2 - 9x^3 - 10\sqrt{42x^2 - 9x^3 - 24}}{\sqrt{42x^2 - 9x^3 - 24} - 6}$$

a) $\sqrt{42x^2 - 9x^3 - 24} + 2$

b) $\sqrt{42x^2 - 9x^3 - 24} - 4$

c) $\sqrt{42x^2 - 9x^3 - 24} + 6$

d) $\sqrt{42x^2 - 9x^3 - 24} + 1$

e) Ninguna

5. Calcular el valor de:

$$I = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

a)1,7321 b) 1,4142

c) 3,1462 d) 0,3139

e) Ninguna

6. Calcular el valor de:

$$T = \sqrt[4]{97 + 56\sqrt{3}} - \sqrt[4]{97 - 56\sqrt{3}}$$

a) 4 b) 7,4642 c) 0,5358

d) 3,4642 e) Ninguna

7. Reducir a su mínima expresión:

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}}$$

a) 3 b) 1 c) 5

d) $2+\sqrt{3}$ e) 0

8. ¿Qué valor deberá asignarse a "q" a fin de que el polinomio:

$$S(x) = 4x^{2n} - 12x^{n+1} + nqx^{n} + 9x^{2} - 6nx + n^{2}$$

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

9. Calcular: $E=\dfrac{A-B}{C}$, sabiendo que:

$$A = \sqrt{x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 4x + 1}$$

$$B = \sqrt{x^6 - 4x^5 - 12x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 1}$$

$$C = x - 1$$

a) x + 1 b) x - 1 c) x

d) 2x e) 2x + 1

10. Calcular el menor valor que se le debe asignar a (β) en:

$$P(x) = 16x^4 + 32x^3 - 24x^2 + \alpha x + \beta$$

para que su raíz cuadrada sea el cuadrado del resíduo correspondiente.

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

11. ¿Qué valor de "n" convierte a los polinomios:

(I) $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 1$

(II) $x^4 + 4mx^3 + 6nx^2 + 4px + 1$

en cuadrados perfectos?

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 6

12. Transformar en radicales simples:

$$\sqrt{6+4\sqrt[-2^{n+1}]{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2^2}}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2^{2n}}}+1\right)+1}}$$

a) $2+\sqrt{2}$ b) $2-\sqrt{2}$ c) $1+\sqrt{2}$

d) $1-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}$

13. Calcular la condición que deben cumplir los coeficientes de:

$$(a + bx)^2 + (c + dx)^2$$

a fin de que la expresión resulte un cuadrado perfecto.

a) a = b b) a = b = c

c) a = b = c = d d) a = -b = c

e) a = b = -c = -d

14. Simplificar:

$$E=\sqrt[4]{3+\sqrt{7}}\sqrt{\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}}}$$

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

15. Al descomponer en radicales simples:

$$\sqrt{\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{bx^2+2cxy+ay^2}}$$

se obtiene una expresión de la forma $k\sqrt{x+y}$, dar como resultado el valor de k.

a) $\sqrt{2a}$ b) $\sqrt{b}$ c) $\sqrt{2b}$

d) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ e) Ninguna

16. Reducir:

$$\sqrt{a+5b+3\sqrt{2ab+b^2}}-\sqrt{a+\sqrt{2ab+b^2}+b}$$

a) $\sqrt{a-b}$ b) $\sqrt{2b}$ c) $\sqrt{2a}$

d) $\sqrt{a+b}$ e) Ninguna

17. Si se tiene que:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \alpha + \sqrt{\beta}$$

hallar el equivalente de:

$$E = \alpha^6 - 3\alpha^4\beta + 3\alpha^2\beta^2 - \beta^3$$

a) $a - b$ b) $a^2 - b$ c) $a - b^2$

d) 0 e) $a^2 - b^2$

18. Simplificar:

$$E = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{\sqrt{6+4\sqrt{2}}+7-\sqrt{2}}}}}$$

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 6

19. Simplificar:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

a) $\sqrt{2}/2$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}/3$ e) $\sqrt{6}$

20. Simplificar:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots\infty}}}$$

a) 3 b) 2 c) 4

d) $\sqrt{2}$ e) 1

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) C	3) A	4) B	5) B
6) D	7) B	8) D	9) C	10) B
11) C	12) A	13) C	14) B	15) B
16) B	17) B	18) C	19) A	20) B

OPERACIONES CON RAÍCES

PRINCIPALES CONCEPTOS

VALOR ARITMÉTICO DE UN RADICAL

Se llama raíz aritmética o determinación aritmética de una raíz enésima de un número real, al número real y positivo que elevado a la potencia "enésima" es igual al radicando. El valor aritmético del radical es único y positivo.

VALOR ALGEBRAICO DE UN RADICAL

Se llama valor algebraico de un radical a toda expresión de cualquier naturaleza, que elevada a la potencia señalada por el índice, reproduce el radicando.

La raíz enésima de todo número B, tiene "n" valores algebraicos. Estos "n" valores algebraicos son iguales al valor aritmético multiplicado por las "n" raíces de la unidad(ver este criterio explicado en capítulo de Números Complejos)

RADICALES HOMOGÉNEOS

Son aquellos que tienen índices iguales.

Ejemplo:

$\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[5]{y^2z}$, $\sqrt[5]{z^4}$ son radicales homogéneos.

HOMOGENIZACIÓN DE RADICALES

Es la operación que se realiza para transformar radicales de distinto índice a otros que tengan el mismo índice.

Ejemplo:

Homogenizar $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[4]{b^3}$, $\sqrt[5]{c^4d}$

Solución:

1.- Se halla el m.c.m. de los índices originales, m.c.m. (3, 4, 5) = 60, éste será el índice común de los radicales.

2.- Se eleva cada cantidad subradical a un exponente que resulta de dividir el índice común entre su índice original, así:

$$\sqrt[60]{(a^2b)^{\frac{60}{3}}} \quad , \quad \sqrt[60]{(b^3)^{\frac{60}{4}}} \quad , \quad \sqrt[60]{(c^4d)^{\frac{60}{5}}}$$

efectuando operaciones, resulta finalmente en:

$$\sqrt[60]{a^{40}b^{20}} \quad , \quad \sqrt[60]{b^{45}} \quad , \quad \sqrt[60]{c^{48}d^{12}}$$

RADICALES SEMEJANTES

Son aquellos que tienen igual índice e igual radicando.

Ejemplo: $4x\sqrt[5]{2a}$, $3\sqrt[5]{2a}$, $7y\sqrt[5]{2a}$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS RADICALES

Si se multiplica o divide el índice y el exponente del radicando por un mismo número no varía el valor aritmético, pero el número de valores algebraicos queda multiplicado o dividido por ese mismo número.

Sea el valor aritmético de:

$$\sqrt{B^m} = b \qquad (1)$$

por definición: $B^m = b^n$; elevando a la potencia "r":

$$B^{m.r} = b^{n.r}$$

de donde:

$$\sqrt[nr]{B^{m.r}} = b \qquad (2)$$

de (1) y (2):

$$\sqrt[n]{B^m} = \sqrt[nr]{B^{m.r}}$$

Se observa, por (1), que $\sqrt[n]{B^m}$ tiene "n" valores, por ser una raíz enésima y por (2):

$$\sqrt[nr]{B^{mr}}$$

tiene nr; es decir el número de valores ha quedado multiplicado por "r".

SUMA DE RADICALES

Para sumar radicales semejantes, basta sacar dicho radical como factor común; si no fueran semejantes, la operación queda indicada.

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

1) Para multiplicar radicales homogéneos, se extrae la raíz del mismo índice al producto de los radicandos.

Ejemplo:

$$\sqrt[n]{A} \quad \sqrt[n]{B} \quad \sqrt[n]{AB}$$

2) Para multiplicar radicales de índice distinto, se reduce al mismo índice común y se aplica la regla anterior.

Así:

$$\sqrt[p]{x} \; \sqrt[q]{y} = \sqrt[pq]{x^q} \; \sqrt[pq]{y^p} = \sqrt[pq]{x^q y^p}$$

DIVISIÓN DE RADICALES

1) Para dividir dos radicales homogéneos, se extrae la raíz del mismo índice al cociente de los radicandos.

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

2) Si los radicales tienen índice diferente, se reduce a índice común y se procede como en el caso anterior.

Así:

$$\frac{\sqrt[p]{x}}{\sqrt[q]{y}} = \frac{\sqrt[pq]{x^q}}{\sqrt[pq]{y^p}} = \sqrt[pq]{\frac{x^q}{y^p}}$$

POTENCIA DE RADICALES

Para elevar un radical a una potencia, se eleva el radicando a la misma potencia.

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$$

RAÍZ DE RADICALES

Para hallar la raíz de un radical, basta que tenga por índice el producto de los índices:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Efectuar:

$$E = \sqrt[m]{\sqrt{2} - 1} \; \sqrt[2m]{\sqrt{2} + 1} \; \sqrt[4m]{\sqrt{2} + 1} \; \sqrt[8m]{3 + \sqrt{8}}$$

Solución:

Transformando el último radical:

$$\sqrt[8m]{3 + \sqrt{8}} = \sqrt[8m]{3 + \sqrt{4\,.\,2}} = \sqrt[8m]{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[4m]{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt[4m]{\sqrt{2} + \sqrt{1}}$$

sustituyendo:

$$E = \sqrt[m]{\sqrt{2} - 1} \; \sqrt[2m]{\sqrt{2} + 1} \; \sqrt[4m]{\sqrt{2} + 1} \; \sqrt[4m]{\sqrt{2} + 1}$$

homogenizando:

$$E = \sqrt[4m]{\left(\sqrt{2} - 1\right)^4} \; \sqrt[4m]{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2} \; \sqrt[4m]{\sqrt{2} + 1} \; \sqrt[4m]{\sqrt{2} + 1}$$

también:

$$E = \sqrt[4m]{\left(\sqrt{2} - 1\right)^4 \left(\sqrt{2} + 1\right)^2 \left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)}$$

$$E = \sqrt[4m]{\left(\sqrt{2} - 1\right)^4 \left(\sqrt{2} + 1\right)^4}$$

$$E = \sqrt[4m]{\left[\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\right]^4} = \sqrt[4m]{\left[\left(\sqrt{2}\right)^2-1\right]^4}$$

$$E = \sqrt[4m]{(2-1)^4} = \sqrt[m]{1}$$

E = 1 valor aritmético

2.- Efectuar:

$$R = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\;\sqrt[8]{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}\;\sqrt[12]{5\sqrt{2}-7}}$$

Solución:

Transformando el segundo factor del numerador:

$$\sqrt[8]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{\sqrt{2}+1}$$

sustituyendo:

$$R = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\;\sqrt[4]{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}\;\sqrt[12]{5\sqrt{2}-7}}$$

homogenizando los radicales:

$$R = \sqrt[12]{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^4\left(\sqrt{2}+1\right)^3}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2\left(5\sqrt{2}-7\right)}} = \sqrt[12]{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^4\left(\sqrt{2}+1\right)^3}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}}$$

Efectuando el producto en el denominador:

$$R = \sqrt[12]{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^4\left(\sqrt{2}+1\right)^3}{\left(\sqrt{2}-1\right)}}$$

$$R = \sqrt[12]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3\left(\sqrt{2}+1\right)^3} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$R = \sqrt[4]{\left(\sqrt{2}\right)^2-1} = \sqrt[4]{2-1} = \sqrt[4]{1}$$

R = 1

3.- Efectuar:

$$E = \frac{\sqrt{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{x-\sqrt{x^2-4}}}$$

Solución:

Elevando al cuadrado la expresión dada:

$$E^2 = \frac{\left(\sqrt{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}\right)^2}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{x-\sqrt{x^2-4}}\right)^2}$$

efectuando:

$$E^2 = \frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{\left[(x^3-3x)+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\right]\left[(x^3-3x)-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\right]} + x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x+\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{(x+\sqrt{x^2-4})(x-\sqrt{x^2-4})} + x - \sqrt{x^2-4}}$$

reduciendo:

$$E^2 = \frac{2x^3-6x-2\sqrt{(x^3-3x)^2-(x^2-1)^2(x^2-4)}}{2x-2\sqrt{x^2-(x^2-4)}}$$

$$E^2 = \frac{2x^3-6x-2\sqrt{x^6-6x^4+9x^2-(x^6-6x^4+9x^2-4)}}{2x-2\sqrt{4}}$$

$$E^2 = \frac{2x^3-6x-2\sqrt{4}}{2x-4} = \frac{x^3-3x-2}{x-2}$$

dividiendo por Ruffini:

	1	0	-3	-2
	↓			
2		2	4	+2
	1	2	+1	0

el cociente es:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Por lo que:

$$E^2 = (x+1)^2$$

$$\therefore \qquad E = x + 1$$

4.- Hallar el valor de:

$$E = \frac{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2} + \sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}} + \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2} - \sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a} + \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2} + \sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}} + \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2} - \sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}}}}$$

Solución:

Haciendo:

$$\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}+\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}} = A \qquad (1)$$

$$\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}-\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}} = B \qquad (2)$$

Sustituyendo:

$$E = \frac{A+B}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}+A+B}} \qquad (\alpha)$$

Elevando al cubo:

$$E^3 = \frac{A^3+B^3+3AB(A+B)}{\sqrt[4]{a}+A+B}$$

Elevando al cubo (1) y (2):

$$\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}+\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1} = A^3 \qquad (3)$$

$$\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}-\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1} = B^3 \qquad (4)$$

Sumando (3) y (4) se obtiene:

$$3\sqrt[4]{a} = A^3+B^3$$

sustituyendo en (α):

$$E^3 = \frac{3\sqrt[4]{a}+3AB(A+B)}{\sqrt[4]{a}+A+B} \qquad (\beta)$$

Multiplicando (1) por (2):

$$\sqrt[3]{\left(\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}+\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}\right)\left(\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}-\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}\right)} = A\,.\,B$$

efectuando:

$$\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{a}}{4}-\left(\frac{9\sqrt{a}}{4}-1\right)} = \sqrt[3]{1} = 1 = A\,.\,B$$

Sustituyendo en (β):

$$E^3 = \frac{3\sqrt[4]{a}+3AB(A+B)}{\sqrt[4]{a}+A+B}$$

factorizando 3 en el numerador:

$$E^3 = \frac{3\left(\sqrt[4]{a}+A+B\right)}{\sqrt[4]{a}+A+B}$$

de donde: $E = \sqrt[3]{3}$

5.- Simplificar:

$$E = \frac{\sqrt{6ny}}{\sqrt{(\sqrt{ax}+\sqrt{ny})(\sqrt{ax}+\sqrt{ax-ny})}-\sqrt{(\sqrt{ax}-\sqrt{ny})(\sqrt{ax}+\sqrt{ax-ny})}}$$

Solución:

Trabajando con el denominador extrayendo factor común:

$$\sqrt{\sqrt{ax}+\sqrt{ax-ny}}$$

$$D = \sqrt{\sqrt{ax}+\sqrt{ax-ny}}\left[\sqrt{\sqrt{ax}+\sqrt{ny}}-\sqrt{\sqrt{ax}-\sqrt{ny}}\right] (1)$$

Llamando al corchete (α):

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{ax}+\sqrt{ny}} - \sqrt{\sqrt{ax}-\sqrt{ny}}$$

elevando al cuadrado:

$$\alpha^2 = \sqrt{ax}+\sqrt{ny} - 2\sqrt{\left(\sqrt{ax}+\sqrt{ny}\right)\left(\sqrt{ax}-\sqrt{ny}\right)} + \sqrt{ax}-\sqrt{ny}$$

reduciendo:

$$\alpha^2 = 2\sqrt{ax} - 2\sqrt{ax-ny} = 2\left(\sqrt{ax}-\sqrt{ax-ny}\right)$$

extrayendo raíz cuadrada:

$$\alpha = \sqrt{2}\,\sqrt{\sqrt{ax}-\sqrt{ax-ny}}$$

sustituyendo en (1):

$$D = \sqrt{\sqrt{ax}+\sqrt{ax-ny}}\left(\sqrt{2}\,\sqrt{\sqrt{ax}-\sqrt{ax-ny}}\right)$$

efectuando los radicales (diferencia de cuadrados):

$$D = \sqrt{2}\,\sqrt{(ax)-(ax-ny)} = \sqrt{2}\,\sqrt{ny}$$

sustituyendo en E:

$$E = \frac{\sqrt{6ny}}{\sqrt{2}\,\sqrt{ny}} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{ny}}{\sqrt{2}\,\sqrt{ny}}$$

$$E = \sqrt{3}$$

6.- Efectuar:

$$E = \frac{\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-a}}{\left[\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(a-b)(c-a)} + \sqrt{(b-c)(c-a)}\right]^{1/2}}$$

Solución:

Elevando al cuadrado la expresión:

$$E = \frac{\left(\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-a}\right)^2}{\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(a-b)(c-a)} + \sqrt{(b-c)(c-a)}}$$

efectuando operaciones:

$$E^2 = \frac{a-b+b-c+c-a+2\sqrt{(a-b)(b-c)} + 2\sqrt{(a-b)(b-c)} + 2\sqrt{(b-c)(c-a)}}{\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(a-b)(c-a)} + \sqrt{(b-c)(c-a)}}$$

reduciendo y factorizando:

$$E^2 = \frac{2\left[\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(a-b)(c-a)} + \sqrt{(b-c)(c-a)}\right]}{\left[\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(a-b)(c-a)} + \sqrt{(b-c)(c-a)}\right]}$$

simplificando: $E^2 = 2$

$\therefore$ $E = \sqrt{2}$

7.- Simplificar:

$$E = \frac{\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(6+\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(6-\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Solución:

Multiplicando y dividiendo por $(2)^{3/2}$ se obtiene:

$$E = \frac{\left(8+2\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(8-2\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(12+2\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(12-2\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \frac{\left(8+2\sqrt{15}\right)^3 + \left(8-2\sqrt{15}\right)^3}{\left(12+2\sqrt{35}\right)^3 - \left(12-2\sqrt{35}\right)^3}$$

transformando los radicales dobles a simples:

$$E = \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^3 + \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^3 - \left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^3}$$

elevando al cubo:

$$E = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^3 + 3\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{3}\right) + 3\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{7}\right)^3 + 3\left(\sqrt{7}\right)^2\left(\sqrt{5}\right) + 3\left(\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^3}$$

$$\frac{+\left(\sqrt{5}\right)^3 - 3\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{3}\right) + 3\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^3}{-\left(\sqrt{7}\right)^3 + 3\left(\sqrt{7}\right)^2\left(\sqrt{5}\right) - 3\left(\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^3}$$

reduciendo:

$$E = \frac{2\left(\sqrt{5}\right)^3 + 6\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right)^2}{6\left(\sqrt{7}\right)^2\left(\sqrt{5}\right) + 2\left(\sqrt{5}\right)^3}$$

factorizando:

$$E = \frac{2\left(\sqrt{5}\right)\left[\left(\sqrt{5}\right)^2 + 3\left(\sqrt{3}\right)^2\right]}{2\left(\sqrt{5}\right)\left[3\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2\right]}$$

$$E = \frac{5+9}{21+5} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$$

8.- Efectuar:

$$E = \frac{\sqrt{26+\sqrt{675}} - \sqrt{26-\sqrt{675}}}{\sqrt[3]{26+\sqrt{675}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{675}}}$$

Solución:

Trabajando separadamente el numerador y denominador:

$$N = \sqrt{26+\sqrt{675}} - \sqrt{26-\sqrt{675}}$$

elevando al cuadrado:

$$N^2 = 26 + \sqrt{675} - 2\sqrt{26^2 - \left(\sqrt{675}\right)^2} + 26 - \sqrt{675}$$

reduciendo:

$$N^2 = 52 - 2\sqrt{676 - 675} = 52 - 2 = 50$$

extrayendo raíz cuadrada:

$$N = 5\sqrt{2}$$

Efectuando el denominador:

$$D = \sqrt[3]{26 + \sqrt{675}} - \sqrt[3]{26 - \sqrt{675}}$$

$$D^3 = 26 + \sqrt{675} + 26 - \sqrt{675}$$
$$+ 3\sqrt{\left(26 + \sqrt{675}\right)\left(26 - \sqrt{675}\right)}\;.\;D$$

$$D^3 = 52 + 3\sqrt{1}\;.\;D$$

$$D^3 = 52 + 3D$$

$$D^3 - 3D - 52 = 0$$

por tanteos:

$$D = 4$$

Sustituyendo en la expresión los valores del numerador y denominador:

$$E = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$E = \frac{5}{4}\sqrt{2}$$

9.- Simplificar:

$$E = \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2} + x - 1}\right)$$
$$\cdot\left(\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{x}\right)$$

Solución:

Realizando operaciones sucesivamente, comenzando con las expresiones encerradas en el primer paréntesis:

• $$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{\sqrt{1-x}\;\sqrt{1+x} - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{\sqrt{1-x}\;\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

A continuación, simplificando la expresión encerrada en el segundo paréntesis:

• $$\left(\sqrt{x^{-2} - 1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x}$$

• Sustituyendo los equivalentes de los paréntesis en la expresión dada:

$$E = \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right)\left(\frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}\right)$$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

$$E = \left\{\frac{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{(1+x) - (1-x)}\right\}\left\{\frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}\right\}$$

efectuando el cuadrado:

$$E = \left\{\frac{2 + 2\sqrt{1-x^2}}{2x}\right\}\left\{\frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}\right\}$$

$$E = \left\{\frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{x}\right\}\left\{\frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}\right\}$$

efectuando:

$$E = \frac{(1-x^2) - 1}{x^2} = \frac{1 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2}$$

10.- Simplificar:

$$E = \left[\frac{x^3 - 3x - 2 + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{x^3 - 3x + 2 + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}\right]\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\right)$$

Solución:

el numerador del corchete se puede escribir así:

$$x^3 - 3x - 2 + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} = (x-2)(x^2 + 2x + 1)$$
$$+ (x+1)(x-1)\sqrt{x^2 - 4}$$

$$= (x-2)(x+1)^2 + (x+1)(x-1)\left(\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-2}\right)$$

$$= \sqrt{x-2}(x+1)\left[\sqrt{x-2}(x+1) + (x-1)\sqrt{x+2}\right]$$

El denominador se puede escribir así:

$$x^3 - 3x + 2 + (x^2-1)\sqrt{x^2-4} = (x+2)(x-1)^2$$

$$+ (x+1)(x-1)\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-2}$$

$$= \sqrt{x+2}(x-1)\left[\sqrt{x+2}\,(x-1) + \sqrt{x-2}\,(x+1)\right]$$

sustituyendo:

$$E = \left\{\frac{\sqrt{x-2}\,(x+1)\left[\sqrt{x+2}\,(x-1) + (x-1)\sqrt{x+2}\right]}{\sqrt{x+2}\,(x-1)\left[\sqrt{x+2}\,(x-1) + \sqrt{x-2}\,(x+1)\right]}\right\} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$$

simplificando:

$$E = \frac{x+1}{x-1}$$

11.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{Z^{\frac{M}{N}} + Z^{\frac{N}{M}}}{Z^{\frac{M}{N}} - Z^{\frac{N}{M}}}$$

sabiendo que:

$$Z = \left(\frac{M+N}{M-N}\right)^{\frac{MN}{M^2-N^2}}$$

Solución:

Factorizando en el numerador y en el denominador:

$$E = \frac{Z^{\frac{N}{M}}\left(Z^{\frac{M}{N}-\frac{N}{M}} + 1\right)}{Z^{\frac{N}{M}}\left(Z^{\frac{M}{N}-\frac{N}{M}} - 1\right)}$$

simplificando:

$$E = \frac{Z^{\frac{M^2-N^2}{M.N}} + 1}{Z^{\frac{M^2-N^2}{M.N}} - 1}$$

reemplazando Z por su valor:

$$E = \frac{\left[\left(\frac{M+N}{M-N}\right)^{\frac{M.N}{M^2-N^2}}\right]^{\frac{M^2-N^2}{M.N}} + 1}{\left[\left(\frac{M+N}{M-N}\right)^{\frac{M.N}{M^2-N^2}}\right]^{\frac{M^2-N^2}{M.N}} - 1}$$

simplificando los exponentes:

$$E = \frac{\frac{M+N}{M-N} + 1}{\frac{M+N}{M-N} - 1} = \frac{\frac{M+N+M-N}{M-N}}{\frac{M+N-M+N}{M-N}} = \frac{2M}{2N}$$

$$E = \frac{M}{N}$$

12.- Simplificar:

$$E = \left(\frac{5}{\sqrt{5+\sqrt{2}}} - \frac{5}{\sqrt{5-\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{2}}}\right)^2 + 2\sqrt{23}$$

Solución:

Agrupando convenientemente y sumando se obtiene:

$$E = \left(\frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{2}}} - \frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{2}}}\right)^2 + 2\sqrt{23}$$

simplificando:

$$E = \left(\sqrt{5+\sqrt{2}} - \sqrt{5-\sqrt{2}}\right)^2 + 2\sqrt{23}$$

Efectuando la potencia cuadrada:

$$E = 5 + \sqrt{2} - 2\sqrt{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})} + 5$$

$$- \sqrt{2} + 2\sqrt{23}$$

reduciendo

$$E = 10$$

13.- Calcular el valor de:

$$E = \sqrt{10 - \sqrt{4 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 \quad + \ldots (\infty)}}}}}$$

Solución:

Calculando previamente:

$$x = \sqrt{6 \ + \sqrt{6 \ + \sqrt{6 \ + \ldots (\infty)}}} \quad \text{veces}$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 = 6 + \sqrt{6 \ + \sqrt{6 \ + \ldots (\infty - 1)}} \quad \text{veces}$$

también:

$$x^2 = 6 + \sqrt{6 \ + \sqrt{6 \ + \ldots (\infty)}} \quad \text{veces}$$

luego, se puede escribir:

$$x^2 = 6 + x$$

$$x^2 - x = 6$$

$$x(x - 1) = 3 \cdot 2$$

por comparación:

$$x = 3$$

Al sustituir en "E" se obtiene:

$$E = \sqrt{10 - \sqrt{4 - 3}} = \sqrt{10 - \sqrt{1}} = \sqrt{9}$$

$$E = 3$$

14.- Calcular el valor de:

$$E = x^{3x} - 9x^{x+3} - 9x^{x+2} - 27x^{x+1} - x^6$$

si se cumple que:

$$x = \sqrt[x]{x^2 + 2x + 3 \ + \sqrt[x]{x^2 + 2x + 3 + \ldots \infty \text{ radicales}}}$$

Solución:

Elevando la condición, a la potencia "x", quedará la segunda raíz, que es igual a x, por recursión; así:

$$x^x = x^2 + 2x + 3 + x$$

$$x^x = x^2 + 3x + 3 \quad (\alpha)$$

La expresión dada se factoriza parcialmente, así:

$$E = x^{3x} - x^6 - 9x^{x+2}(x + 1) - 27^{x+1}$$

de la condición (α):

$$x + 1 = \frac{x^x - x^2}{3} \qquad (\beta)$$

Sustituyendo en E:

$$E = x^{3x} - x^6 - 9x^{x+2}\left(\frac{x^x - x^2}{3}\right) - 27^{x+1} ;$$

$$E = x^{3x} - x^6 - 3x^{2x+2} + 3x^{x+4} - 27x^x \cdot x$$

agrupando y reemplazando con(α):

$$E = (x^{3x} - 3x^{2x+2} + 3x^{x+4} - x^6) - 27(x^2 + 3x + 3)x$$

El primer paréntesis es una diferencia al cubo:

$$E = (x^x - x^2)^3 - 27(x^2 + 3x + 3)x$$

reemplazando $x^x - x^2 = 3x + 3$, deducido de (β):

$$E = (3x + 3)^3 - 27x^3 - 81x^2 - 81x$$

efectuando el cubo:

$$E = 27x^3 + 81x^2 + 81x + 27 - 27x^3 - 81x^2 - 81x$$

reduciendo:

$$E = 27$$

RACIONALIZACIÓN

Es la operación que consiste en transformar un denominador irracional en otro equivalente que sea racional.

FRACCIÓN IRRACIONAL

Se llama así a un quebrado en cuyo denominador está presente una raíz.

FACTOR RACIONALIZANTE

El factor racionalizante de una expresión irracional, es también otra expresión irracional que multiplicada por la primera la convierte en una expresión racional.

Cuando se racionaliza una fracción, desaparece todo signo radical del denominador.

Nota.-

Para racionalizar se multiplica y divide la fracción por el factor racionalizante.

CASOS

PRIMER CASO.– Cuando el denominador irracional es un monomio.

El factor racionalizante del denominador es un radical de igual índice, el radicando está elevado a un exponente igual a la diferencia entre el índice de la raíz y el exponente inicial del radicando.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Racionalizar $E = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^q}}$

Solución:

Multiplicando y dividiendo por:

$$F.\ R. = \sqrt[n]{a^{n-q}}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt[n]{a^q}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-q}}}{\sqrt[n]{a^{n-q}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-q}}}{\sqrt[n]{a^q}}$$

$$E = \frac{\sqrt[n]{a^{n-q}}}{a}$$

2.- Racionalizar:

$$E = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}\ \sqrt[3]{b^2}\ \sqrt[7]{c^4}}$$

Solución:

El factor racionalizante es:

$$F.R. = \sqrt[5]{a^{5-3}}\ \ \sqrt[3]{b^{3-2}}\ \ \sqrt[7]{c^{7-4}}$$

$$F.R. = \sqrt[5]{a^2}\ \ \sqrt[3]{b}\ \ \sqrt[7]{c^3}$$

Multiplicando y dividiendo por el Factor Racionalizante:

$$E = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}\ \sqrt[3]{b^2}\ \sqrt[7]{c^4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{a^2}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[7]{c^3}}{\sqrt[5]{a^2}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[7]{c^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{a^2}\ .\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[7]{c^3}}{abc}$$

SEGUNDO CASO.- Cuando el denominador presenta radicales de índice iguales a dos, se racionaliza multiplicando y dividiendo por la "conjugada" del denominador.

Se denomina expresiones "conjugadas" a dos expresiones que están formadas, una por la suma y otra por la resta de términos iguales.

> **NOTA.-** Se debe recordar que:
>
> $$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$$

Ejemplo:

$\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$ son expresiones conjugadas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Racionalizar:

$$E = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}$$

Solución:

Multiplicando y dividiendo por el F.R.:

$$F.R. = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$$

$$E = \left(\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}\right)\left(\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}\right)$$

Los denominadores son conjugados entre sí, es un producto de suma por diferencia que da diferencia de cuadrados:

$$E = \frac{\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}\right)}{\left(\sqrt{a+b}\right)^2 - \left(\sqrt{a-b}\right)^2} = \frac{a + b + \sqrt{a^2 - b^2}}{2b}$$

2.- Racionalizar:

$$E = \frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

Solución:

Multiplicando y dividiendo por el Factor Racionalizante:

$$F.R. = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) - \sqrt{5}$$

$$E = \frac{12}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) - \sqrt{5}}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) - \sqrt{5}}$$

efectuando:

$$E = \frac{12\,(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\,)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,)^2-(\sqrt{5}\,)^2} = \frac{12\,(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\,)}{2+2\sqrt{6}+3-5}$$

$$E = \frac{12\,(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\,)}{2\sqrt{6}} = \frac{6\,(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\,)}{\sqrt{6}}$$

$$E = \frac{6\,(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\,)}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}$$

$$E = 2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-30$$

3.- Racionalizar:

$$E = \frac{6}{5-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}}$$

Solución:

Factorizando el denominador:

$$D = 5-\sqrt{15}+\sqrt{10}-6$$

$$= \sqrt{5}\,(\sqrt{5}-\sqrt{3}\,)+\sqrt{2}\,(\sqrt{5}-\sqrt{3}\,)$$

$$= (\sqrt{5}-\sqrt{3}\,)(\sqrt{5}+\sqrt{2}\,)$$

Por lo tanto:

$$E = \frac{6}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}\,)(\sqrt{5}+\sqrt{2}\,)}$$

$$F.R. = (\sqrt{5}+\sqrt{3}\,)(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,)$$

$$E = \frac{6(\sqrt{5}-\sqrt{3}\,)(\sqrt{5}+\sqrt{2}\,)}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}\,)(\sqrt{5}+\sqrt{3}\,)(\sqrt{5}+\sqrt{2}\,)(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,)}$$

$$E = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3}\,)(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,)}{(5-3)(5-2)} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3}\,)(\sqrt{5}+\sqrt{2}\,)}{2\,.\,3}$$

$$E = (\sqrt{5}+\sqrt{3}\,)(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,) = 5+\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}$$

4.- Efectuar:

$$E = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{9+2\sqrt{18}}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$$

Solución:

Transformando los radicales dobles a simples:

$$E = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

racionalizando cada denominador, para lo cual se multiplica y divide por la conjugada del denominador:

$$E = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{3}\,)}{6-3} - \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2}\,)}{6-2} + \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,)}{3-2}$$

simplificando:

$$E = \sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{3}\,)-\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2}\,)+\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,)$$

$$E = \sqrt{12}-\sqrt{6}-\sqrt{18}+\sqrt{6}+\sqrt{18}-\sqrt{12}$$

reduciendo:

$$E = 0$$

5.- Efectuar:

$$E = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}-\sqrt{3+\sqrt{5}}} - \sqrt{5}$$

Solución:

Multiplicando y dividiendo cada fracción por 2, se obtiene:

$$E = \frac{20}{6-\sqrt{6+2\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{20}+6}{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}} - \sqrt{5}$$

transformando los radicales dobles a simples:

$$E = \frac{20}{6-(\sqrt{5}+1)} - \frac{\sqrt{20}+6}{4+(\sqrt{5}-1)} - \sqrt{5}$$

reduciendo:

$$E = \frac{20}{5-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{20}+6}{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5}$$

racionalizando y factorizando:

$$E = \frac{20(5+\sqrt{5}\,)}{25-5} - \frac{2(\sqrt{5}+3)}{(\sqrt{5}+3)} - \sqrt{5}$$

$$= 5+\sqrt{5}-2-\sqrt{5}$$

$$E = 3$$

TERCER CASO.- Cuando el denominador irracional es un binomio o trinomio cuyos radicales son de tercer orden de la forma:

$$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \quad ó \quad \sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$$

se debe recordar que:

$$\left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a \pm b$$

Uno de los factores es el factor racionalizante del otro.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hacer racional el denominador de:

$$E = \frac{7}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$$

Solución:

$$F.R. = \sqrt[3]{5^2} - \sqrt{5\,.\,2} + \sqrt[3]{2^2}$$

Multiplicando numerador y denominador de la fracción por el F.R.:

$$E = \frac{7\left(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}\right)}{5 + 2} = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$$

2.- Racionalizar el denominador:

$$E = \frac{48}{\sqrt[3]{21} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{35} - \sqrt[3]{5}}$$

Solución:

Factorizando el denominador:

$$\sqrt[3]{21} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{35} - \sqrt[3]{5}$$

$$= \sqrt[3]{7}\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}\right) - \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}\right)$$

$$= \left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{7} - 1\right)$$

Luego:

$$E = \frac{48}{\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{7} - 1\right)}$$

$$F.R. = \left(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5\,.\,3} + \sqrt[3]{3^2}\right)\left(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7} + 1\right)$$

Multiplicando numerador y denominador de la fracción por el Factor Racionalizante:

$$E = \frac{48\left(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}\right)\left(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + 1\right)}{(5 + 3)(7 - 1)}$$

$\therefore$

$$E = \left(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}\right)\left(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1\right)$$

3.- Racionalizar:

$$E = \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 2}$$

Solución:

Factorizando el denominador:

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3} = -\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1\right)$$

luego:

$$E = \frac{3\sqrt[3]{2}}{-\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1\right)}$$

Simplificando:

$$E = -\frac{3\,.\,1}{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1}$$

$$F.R. = \sqrt[3]{2} + 1$$

Luego:

$$E = -\frac{3\left(\sqrt[3]{2} + 1\right)}{2 + 1} = -\left(\sqrt[3]{2} + 1\right)$$

4.- Simplificar después de racionalizar:

$$E = \frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}} + \sqrt[3]{2}$$

Solución:

Los factores racionalizantes son $(\sqrt[3]{2} - 1)$ y $(\sqrt[3]{2} + 1)$, respectivamente; luego racionalizando cada uno de los quebrados parciales:

$$E = \frac{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1} + \dfrac{3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)}{2+1}}{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1} - \dfrac{3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)}{2+1}} + \sqrt[3]{2}$$

simplificando:

$$E = \frac{\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1-\sqrt[3]{2}-1} + \sqrt[3]{2}$$

$$E = \frac{2\sqrt[3]{2}}{-2} + \sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$$

$$E = 0$$

CUARTO CASO.- Cuando el denominador es un binomio o polinomio cuyos radicales tienen índices iguales pero mayores que 3, de las formas:

1) $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{a^{n-1}} \mp \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} \mp \sqrt[n]{a^{n-4}b^3} + \ldots \mp \sqrt[n]{b^{n-1}}$

En este caso, se debe recordar que:

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a - b$$

para todo valor de n.

y, que:

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a + b$$

para valores impares de “n”.

ademas:

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a - b$$

para valores pares de “n”.

Uno de los factores es el F.R.(factor racionalizado) del otro.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Racionalizar:

$$E = \frac{14}{\sqrt[5]{10} - \sqrt[5]{3}}$$

Solución:

$$F.R. = \sqrt[5]{10^4} + \sqrt[5]{10^3 \cdot 3} + \sqrt[5]{10^2 \cdot 3^2} + \sqrt[5]{10 \cdot 3^3} + \sqrt[5]{3^4}$$

Multiplicando numerador y denominador de la fracción por el F.R.:

$$E = \frac{14\left(\sqrt[5]{10\,000} + \sqrt[5]{3\,000} + \sqrt[5]{900} + \sqrt[5]{270} + \sqrt[5]{81}\right)}{10-3}$$

simplificando:

$$E = 2\left(\sqrt[5]{10\,000} + \sqrt[5]{3\,000} + \sqrt[5]{900} + \sqrt[5]{270} + \sqrt[5]{81}\right)$$

2.- Racionalizar:

$$E = \frac{N}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

Solución:

$$F.R. = \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}$$

Multiplicando numerador y denominador de la fracció por el F.R.:

$$E = \frac{N\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right)}{x - y}$$

3.- Racionalizar:

$$E = \frac{6}{2 + \sqrt{2} - \sqrt[4]{2}}$$

Solución:

Escribiendo el denominador como un binomio:

$$E = \frac{6}{\left(2+\sqrt{2}\right) - \sqrt[4]{2}}$$

El F.R. es: $\left(2+\sqrt{2}\right) + \sqrt[4]{2}$

Multiplicando numerador y denominador de la fracción por el factor racionalizante:

$$E = \frac{6\left[\left(2+\sqrt{2}\right) + \sqrt[4]{2}\right]}{\left(2+\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt[4]{2}\right)^2}$$

efectuando operaciones en el denominador:

$$E = \frac{6\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)}{4+4\sqrt{2}+2-\sqrt{2}} = \frac{6\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)}{6+3\sqrt{2}}$$

$$E = \frac{6\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)}{3\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)}{2+\sqrt{2}}$$

Para racionalizar,el F.R. es $\left(2-\sqrt{2}\right)$

$$E = \frac{2\left(2+2\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)}{4-2}$$

$$\therefore \quad E = 2+2\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}$$

4.- Simplificar:

$$E = \frac{(x-1)\left(1+x-\sqrt[3]{x^2}\right)}{1+\sqrt[3]{x}+x\sqrt[3]{x^2}}$$

Solución:

En el denominador, hacemos $\sqrt[3]{x} = y$; se obtiene:

$$D = 1 + y + y^5$$

Sumando y restando y^2:

$$D = (1+y+y^2) + (y^5-y^2) = (1+y+y^2) + y^2(y^3-1)$$

$$= (1+y+y^2) + y^2(y-1)(y^2+y+1)$$

$$= (y^2+y+1)(y^3-y^2+1)$$

Reemplazando $y = \sqrt[3]{x}$:

$$\therefore D = \left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt[3]{x^2}+1\right)$$

sustituyendo en la expresión:

$$E = \frac{(x-1)\left(1+x-\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(x-\sqrt[3]{x^2}+1\right)}$$

simplificando:

$$E = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

el F.R. es $\sqrt[3]{x}-1$

$$E = \frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{x-1}$$

$$E = \sqrt[3]{x}-1$$

5.- Racionalizar: $E = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}+\sqrt[6]{9}}$

Solución:

Homogenizando los radicales:

$$E = \frac{\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{3^2}} = \frac{\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[6]{3^2}\left(\sqrt[6]{3}+1\right)}$$

Simplificando:

$$E = \frac{1}{\sqrt[6]{3}+1}$$

El F.R. es $\left(\sqrt[6]{3}-1\right)$

$$E = \frac{\sqrt[6]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}$$

se vuelve a racionalizar:

El F.R. es: $\left(\sqrt[6]{3^2}+\sqrt[6]{3}+1\right)$

$$E = \frac{\left(\sqrt[6]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{3-1}$$

$$E = \frac{\left(\sqrt[6]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Racionalizar:

$$E = \frac{20}{7 + \sqrt{6} + \sqrt{14} + \sqrt{21}}$$

a) $7 + \sqrt{6} - \sqrt{21} - \sqrt{14}$

b) $7 + \sqrt{21} - \sqrt{6} - \sqrt{14}$

c) $7 + \sqrt{14} - \sqrt{6} - \sqrt{21}$

d) $7 + \sqrt{14} + \sqrt{6} - \sqrt{21}$

e) $7 + \sqrt{6} + \sqrt{21} - \sqrt{14}$

2. Expresar la suma $\sqrt{4 - \sqrt{15}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ como un solo radical.

a) $\sqrt{3 - 2\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$ c) $\sqrt{4 - \sqrt{3}}$

d) $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ e) $\sqrt{3 + 3\sqrt{5}}$

3. Luego de racionalizar:

$$I = \frac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{7}}, \text{ da:}$$

a) 70 b) 210 c) 140

d)150 e) 62

4. Simplificar:

$$M = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{3}}{33 - 19\sqrt{3}}}$$

a) $\sqrt{3} - 5$ b) $\sqrt{3} + 5$ c) $3\sqrt{3} + 5$

d) $3\sqrt{3} - 5$ e) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

5. Hallar el valor de:

$$f = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

a) 2,73… b) 0,73… c) 2,42…

d) 0,42… e) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

6. Hallar el equivalente simplificado de:

$$\frac{2 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

a) $\sqrt{3} + 1$ b) $\sqrt{3} - 1$ c) $\sqrt{2} + 1$

d) $\sqrt{2} - 1$ e) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

7. Hallar el valor numérico de $E = x^2 + 2$ para:

$$x = \sqrt{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + 1}}$$

a) 2 b) -2 c) $\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}$ E) Ninguno

8. Calcular el valor de:

$$y = \frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}; \text{ para } x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$$

a) a b) b c) ab

d) a + b e) $\sqrt{a + b}$

9. Efectuar:

$$E = \sqrt[3]{20\sqrt{2} + 12\sqrt{6}} + \sqrt[3]{20\sqrt{2} - 12\sqrt{6}}$$

a) 1 b) $2\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{6}$

d) 2 e) $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

10. Racionalizar:

$$E = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}$

c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$ d) $\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{5}$

e) $\frac{6}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{5})$

11. Transformar en radicales simples:

$$\sqrt{b^2 - ab + \frac{a^2}{4} + \sqrt{4ab^3 - 8a^2b^2 + a^3b}}$$

a) $\sqrt{ab} + \sqrt{b^2 - ab + \frac{a^2}{4}}$

b) $\sqrt{ab} - \sqrt{b^2 - ab - \frac{a^2}{4}}$

c) $\sqrt{ab} + \sqrt{b^2 - ab + \frac{a^2}{4}}$

d) $\sqrt{ab} + \sqrt{b^2 - 2ab + \frac{a^2}{4}}$

e) $\sqrt{ab} + \sqrt{b^2 + ab + \frac{a^2}{4}}$

12. Racionalizar:

$$\frac{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

a) $\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{5}-1$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1$

c) $1+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

d) $\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-1$

e) $\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-1$

13. Simplificar:

$$\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{2}\sqrt{3x+\sqrt{9x^2-1}}} + \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2}\sqrt{2x+\sqrt{4x^2-1}}} + \frac{5x^2}{\sqrt{9x^2-1}-\sqrt{4x^2-1}}$$

a) $-x$ b) $2x$ c) x^2

d) bx e) $3x$

14. Si: $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$; $b = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$; hallar:

$$E = 7a^2 + 11ab - 7b^2 - 5b\sqrt{3}$$

15. Después de racionalizar el denominador será:

$$\frac{N}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x+y}}$$

a) $x + y + xy$ b) $x^2 + y + xy^2$

c) $x^2y - xy^2$ d) $3x^2y + 3xy^2$

e) $3x^2y - 3xy^2$

16. Hallar el denominador racionalizado:

$$F = \frac{N}{\sqrt[8]{2}+\sqrt[4]{2}+1}$$

a) 3 b) 4 c) 7

d) 2 e) 1

17. Señalar el producto de los términos que aparecen luego de transformar la expresión a radicales simples:

$$V = \sqrt{21 + 3\sqrt{8} + 6\sqrt{5} + 6\sqrt{7} + \sqrt{24} + \sqrt{56} + 2\sqrt{21}}$$

a) 42 b) 314 c) 342

d) 378 e) Ninguno

18. Simplificar:

$$V = \frac{a - b}{\sqrt{a + b + \sqrt{4ab}}} + \frac{b - c}{\sqrt{b + c + \sqrt{4bc}}} + \frac{c - a}{\sqrt{c + a + \sqrt{4ca}}}$$

a) a + b b) b + c c) 0

d) abc e) $\sqrt{abc}$

19. Calcular:

$$V = \sqrt[3]{9ab^2 + (b^2 + 24a^2)\sqrt{b^2 - 3a^2}} + \sqrt[3]{9ab^2 - (b^2 + 24a^2)\sqrt{b^2 - 3a^2}}$$

a) 6a b) 6b c) 3a

d) 3b e) 2a

20. Simplificar y calcular la expresión:

$$E = \frac{(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} + (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} - (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

para: $z = \left(\frac{m^2 + n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$

a) $\frac{m}{n}$ b) $\frac{n}{m}$ c) $-\frac{m}{n}$

d) $-\frac{n}{m}$ e) 1

CLAVE DE RESPUESTAS

1) A	2) B	3) B	4) C	5) B
6) B	7) D	8) B	9) B	10) C
11) D	12) E	13) D	14) B	15) D
16) C	17) D	18) C	19) A	20) D

VERDADERO VALOR DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

PRINCIPALES CONCEPTOS

FORMAS SINGULARES O DETERMINADAS

Si en una fracción, el numerador o el denominador, se hacen cero o "infinito, resulta las siguientes formas determinadas:

$$\frac{a}{0}\ ,\ \frac{0}{a}\ ,\ \frac{a}{\infty}\ ,\ \frac{\infty}{a}\ ,\ \frac{0}{\infty}\ ,\ \frac{\infty}{0}$$

Notación formal de las formas determinadas:

1) $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{a}{x} = 0$

2) $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{x}{a} = \infty$

3) $\displaystyle\lim_{a\to \infty} \frac{x}{a} = 0$

4) $\displaystyle\lim_{a\to \infty} \frac{a}{x} = \infty$

5) $\displaystyle\lim_{\substack{a\to \infty\\ a\to 0}} \frac{x}{a} = 0$

6) $\displaystyle\lim_{\substack{a\to \infty\\ a\to 0}} \frac{a}{x} = \infty$

donde la expresión:

$$\lim_{a\to 0} \frac{a}{x} = 0$$

se lee "límite de la fracción $\frac{a}{x}$ cuando "a" tiende a cero".

NOTA.- El símbolo ∞, que se lee "infinito", se utiliza para representar un número variable cuyos valores crecen indefinidamente hacia un límite (el límite infinito), siendo siempre esos valores mayores que cualquier número por grande que sea.

FORMAS INDETERMINADAS

Si en una fracción, numerador y de nominador se hacen cero o infinito al mismo tiempo, se obtiene las siguientes formas indeterminadas:

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}$$

Existen también otras formas indeterminadas que no necesariamente proceden del cálculo con fracciones y son las siguientes:

$$\infty - \infty\ ,\ \ 0 . \infty\ ,\ \ 1^{\infty}\ ,\ \ 0^0$$

VERDADERO VALOR

En una expresión algebraica, cuando para un valor de las variables, la expresión adquiere forma indeterminada, hay que buscar su "verdadero valor" y se llama "verdadero valor" de dicha expresión el valor de la otra que sea equivalente a la dada.

CÁLCULO DEL VERDADERO VALOR

A-1) FORMA $\frac{0}{0}$

Cuando una fracción x = a ("x" tiende a "a") toma la forma indeterminada:

$$\frac{0}{0}$$

es porque esta fracción contiene necesariamente en el numerador y denominador el factor (x - a)

Para calcular el verdadero valor o levantar la indeterminación, se procede de la siguiente forma:

1º Se factoriza el numerador y denominador, buscando el factor (x - a).

2º Se simplifica en el numerador y denominador este factor.

3º Se sustituye nuevamente x = a. Si persiste la indeterminación, se repite el procedimiento; en caso contrario, el resultado obtenido es el verdadero valor.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el verdadero valor (V.V.) de la fracción:

$$E = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 + x - 12} \text{ , para } x = 3$$

Solución:

Sustituyendo x = 3 en la fracción:

$$E = \frac{2(3)^2 - 5(3) - 3}{(3)^2 + (3) - 12} = \frac{0}{0}$$

toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, lo cual indica que numerador y denominador de esta fracción, contienen el factor (x - 3).

1. Factorizando este factor en el numerador y denominador:

$$E = \frac{(2x + 1)(x - 3)}{(x + 4)(x - 3)}$$

2. Simplificando:

$$E = \frac{2x + 1}{x + 4}$$

3. Para x = 3:

$$E = \frac{2(3) + 1}{3 + 4} = \frac{7}{7}$$

$\therefore$ V.V.E = 1

2.- Calcular el V.V de la expresión:

$$E = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12} \text{ ; para } x = 2$$

Solución:

Para x = 2, la fracción toma la forma:

$$E = \frac{0}{0}$$

Factoricemos el numerador y denominador de la fracción, buscando el factor (x - 2). Por el método de Ruffini:

El numerador:

	1	+2	-5	-6
	↓			
2		+2	+8	+6
	1	+4	+3	0

$\therefore$ $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$;

El denominador:

	1	-3	-4	12
	↓			
2		+2	-2	-12
	1	-1	-6	0

$\therefore$ $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6)$

Sustituyendo en E :

$$E = \frac{(x - 2)(x^2 + 4x + 3)}{(x - 2)(x^2 - x - 6)} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 6}$$

para x = 2

$$\therefore \quad V.V.E = \frac{4 + 8 + 3}{4 - 2 - 6} = \frac{15}{-4} = -\frac{15}{4}$$

3.- Hallar el V.V. de la fracción:

$$E = \frac{nx^{n+2} - x^{n+1} - (n + 1)x^n + x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

para x = 1

Solución:

Para $x = 1$, la fracción E toma la forma indeterminada:

$$\frac{0}{0}$$

Factoricemos el numerador y denominador de la fracción por el método de Ruffini.

Numerador:

	n	-1	-n-1	0	0	0	…	+1	+1
	↓								
1		n	n-1	-2	-2	-2	…	-2	-1
	n	n-1	-2	-2	-2	-2	…	-1	0

$\therefore$ Numerador $= (x-1)[nx^{n+1} + (n-1)x^n - 2x^{n-1} - \ldots -1]$

Denominador

	1	-1	-1	+1
	↓			
1		+1	0	-1
	1	0	-1	0

$\therefore$ Denominador $= (x - 1)\,(x^2 - 1)$

sustituyendo en E:

$$E = \frac{(x-1)\;[nx^{n+1} + (n-1)x^n - 2x^{n-1} - 2x^{n-2} - \ldots -1]}{(x - 1)(x^2 - 1)}$$

$$E = \frac{nx^{n+1} + (n - 1)x^n - 2x^{n-1} - 2x^{n-2} - \ldots -1}{(x + 1)(x - 1)}$$

Para $x = 1$, nuevamente $E = \dfrac{0}{0}$

Es necesario eliminar por segunda vez el factor $(x - 1)$, para lo cual se procede a una nueva factorización en el numerador.

Numerador:

	n	(n-1)	-2	-2	-2	…	-2	-1
	↓							
1		n	2n-1	2n-3	2n-5 …		+3	1
	n	(2n-1)	(2n-3)	2n-5	2n-7	…	+1	0

Numerador:

$(x - 1)[nx^n + (2n - 1)x^{n-1} + (2n - 3)x^{n-2} + \ldots +1]$

luego:

$$E = \frac{(x - 1)[nx^n + (2n - 1)x^{n-1} + (2n - 3)x^{n-2} + \ldots + 1]}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$E = \frac{nx^n + (2n - 1)x^{n-1} + (2n - 3)x^{n-2} + \ldots + 1}{x + 1}$$

para $x = 1$

$$E = \frac{n + (2n - 1) + (2n - 3) + (2n - 5) + \ldots + 5 + 3 + 1}{2}$$

Cambiando el orden de la suma:

$(2n - 1) + (2n - 3) + \ldots +3 + 1 = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$:

$$E = \frac{n + [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1)]}{2}$$

Donde:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1) = n\left[\frac{2n - 1 + 1}{2}\right] = n^2$$

luego:

$$E = \frac{n + n^2}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}$$

4.- Si la fracción:

$$E = \frac{2x^4 - 13x^3 + ax^2 - 28x + 8}{x^4 - 4x^3 + bx + 16x - 16}$$

para $x = 2$, toma la forma $\dfrac{0}{0}$. Calcular su verdadero valor.

Solución:

Se debe calcular en primer lugar los valores de a y b. Si para $x = 2$, la fracción toma la forma 0/0, entonces, el numerador será igual a cero:

$$2(2)^4 - 13(2)^3 + a(2)^2 - 28(2) + 8 = 0$$

$$32 - 104 + 4a - 56 + 8 = 0$$

$$a = 30$$

y el denominador también será igual a cero, así:

$$(2)^4 - 4(2)^3 + b(2)^2 + 16(2) - 16 = 0$$

$$16 - 32 - 4b + 32 - 16 = 0$$

$$b = 0$$

reemplazando este valor en la expresión:

$$E = \frac{2x^4 - 13x^3 + 30x^2 - 28x + 8}{x^4 - 4x^3 + 16x - 16}$$

factoricemos, para el numerador empleando el método del aspa doble especial.

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & -5x & +2 \\ x^2 & -4x & +4 \end{array}$$

$$2x^4 - 13x^3 + 30x^2 - 28x + 8$$
$$= (2x^2 - 5x + 2)(x^2 - 4x + 4)$$

$$2x^4 - 13x^3 + 30x^2 - 28x + 8 = (2x - 1)(x - 2)(x - 2)^2$$

Para el denominador:

$$x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = (x^4 - 16) - 4x(x^2 - 4)$$
$$= (x^2 + 4)(x^2 - 4) - 4x(x^2 - 4)$$
$$= (x^2 - 4)(x^2 + 4 - 4x)$$
$$= (x + 2)(x - 2)(x - 2)^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = (x + 2)(x - 2)^3$$

Luego:

$$E = \frac{(2x - 1)(x - 2)^3}{(x + 2)(x - 2)^3} = \frac{2x - 1}{x - 2}$$

para x = 2:

$$E = \frac{2(2) - 1}{2 + 2}$$

$$\text{V.V.E.} = \frac{3}{4}$$

5.- Hallar el V.V. de:

$$R = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2a} + \sqrt{x - 2a}}{\sqrt{x^2 - 4a^2}}$$

para x = 2a

Solución:

Para x = 2a:

$$R = \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{2a} + \sqrt{2a - 2a}}{\sqrt{4a^2 - 4a^2}} = \frac{0}{0}$$

Lo que indica que ambos miembros de la fracción, contienen al factor (x - 2a). Para factorizar se debe racionalizar, multiplicando numerador y denominador por el factor racionalizante del numerador.

$$R = \frac{\left[\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 2a}\right) - \sqrt{2a}\right]\left[\sqrt{x} + \sqrt{x - 2a} + \sqrt{2a}\right]}{\sqrt{x^2 - 4a^2}\left[\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 2a}\right) + \sqrt{2a}\right]}$$

$$R = \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 2a}\right)^2 - \left(\sqrt{2a}\right)^2}{\sqrt{x^2 - 4a^2}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 2a} + \sqrt{2a}\right)}$$

$$R = \frac{x + 2\sqrt{x}\sqrt{x - 2a} + x - 2a - 2a}{\sqrt{x^2 - 4a^2}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 2a} + \sqrt{2a}\right)}$$

$$R = \frac{2(x - 2a) + 2\sqrt{x}\sqrt{x - 2a}}{\sqrt{x^2 - 4a^2}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 2a} + \sqrt{2a}\right)}$$

$$R = \frac{2\sqrt{x - 2a}\left(\sqrt{x - 2a} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + 2a}\sqrt{x - 2a}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 2a} + \sqrt{2a}\right)}$$

$$R = \frac{2\left(\sqrt{x - 2a} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + 2a}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 2a} + \sqrt{2a}\right)}$$

para x = 2a

$$R = \frac{2\left(\sqrt{2a - 2a} + \sqrt{2a}\right)}{\sqrt{2a + 2a}\left(\sqrt{2a} + \sqrt{2a - 2a} + \sqrt{2a}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{4a}\left(2\sqrt{2a}\right)}$$

$$R = \frac{2}{4\sqrt{a}}$$

$$\text{V.V. } E = \frac{\sqrt{a}}{2a}$$

6.- Hallar el verdadero valor de:

$$L = \frac{3\,125^x - 1\,024^x}{5^x - 4^x} \quad ; \qquad \text{para } x = 0$$

Solución:

Para x = 0:

$$L = \frac{3\,125^0 - 1\,024^0}{5^0 - 4^0} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

reescribiendo la expresión:

$$L = \frac{(5^x)^5 - (4^x)^5}{5^x - 4^x}$$

desarrollando por Cocientes Notables y simplificando el factor $(5^x - 4^x)$, que se manifiesta:

$$L = (5^x)^4 + (5^x)^3 (4^x) + (5^x)^2 (4^x)^2 + (5^x)(4^x)^3 + (4^x)^4$$

para x = 0

$$L = (5^0)^4 + (5^0)^3(4^0) + (5^0)^2(4^0)^2 + (5^0)(4^0)^3 + (4^0)^4$$

L = 5

$\therefore$ V.V.L = 5

7.- Hallar el V.V. de:

$$R = \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} \quad ; \quad \text{para } x = 64$$

Solución:

Para x = 64, toma la forma:

$$R = \frac{\sqrt{64} - 8}{\sqrt[3]{64} - 8} = \frac{0}{0}$$

homogenizando los radicales:

$$R = \frac{\sqrt[6]{x^3} - 8}{\sqrt[6]{x^2} - 4}$$

haciendo $\sqrt[6]{x} = m$:

$$R = \frac{m^3 - 8}{m^2 - 4}$$

factorizando:

$$R = \frac{(m-2)(m^2 + 2m + 4)}{(m-2)(m+2)} = \frac{m^2 + 2m + 4}{m + 2}$$

reponiendo:

$$R = \frac{\sqrt[6]{x^2} + 2\sqrt[6]{x} + 4}{\sqrt[6]{x} + 2}$$

para $x = 64 = 2^6$:

$$R = \frac{\sqrt[6]{(2^6)^2} + 2\sqrt[6]{2^6} + 4}{\sqrt[6]{2^6} + 2} = \frac{4 + 4 + 4}{2 + 2}$$

$\therefore$ V.V.R = 3

A-2) FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

Para levantar la indeterminación de esta forma, se divide el numerador y denominador entre la máxima potencia de la variable, cuya presencia provoca la indeterminación.

REGLA PRACTICA.- En la forma práctica, el V.V. se obtiene analizando ambos miembros de la fracción.

1º Si el numerador es de mayor grado que el denominador, el V.V es ∞, es decir:

$$°|N| > °|D| \Rightarrow \text{V.V. Expresión} = \infty$$

2º Si el numerador es de menor grado que el denominador, el V.V. es 0, es decir:

$$°|N| < °|D| \Rightarrow \text{V.V. Expresión} = 0$$

3º Si el numerador y el denominador son de igual grado, el V.V. es un cociente formado por la suma de los coeficientes de los términos de máxima potencia, del numerador y del denominador es decir:

Si $°|N| = °|D|$, entonces:

$$\text{V.V.E} = \frac{\text{Coeficiente de mayor grado de N}}{\text{Coeficiente de mayor grado de D}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Calcular el V.V. de:

$$R = \frac{15x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 5x + 9}{5x^4 + 2x^2 + 7x + 6}$$

para $x = \infty$

Solución:

Cuando $x = \infty$:

$$R = \frac{\infty + \infty + \infty + \infty + 9}{\infty + \infty + \infty + \infty + 6} = \frac{\infty}{\infty} = \text{forma indeterminada}$$

Según la regla práctica, por ser de igual grado numerador y denominador de la fracción:

$$V.V.R = \frac{15}{5}$$

$$V.V.R = 3$$

2.- Calcular el V.V. de:

$$R = \frac{(x^4 + x^2 + 1)^{10} + (x^4 + x + 1)^{10} + (x^2 + 1)^5 + 16x^{40}}{(3x^{20} + 4x^5 + 5x^2 + 1)^2}$$

cuando $x \rightarrow \infty$

Solución:

Cuando $x \rightarrow \infty$:

$$R = \frac{(\infty + \infty + 1)^{10} + (\infty + \infty + 1)^{10} + (\infty + 1)^{10} + \infty}{(\infty + \infty + \infty + 1)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Como el grado del numerador es 40 y el grado del denominador también es 40; aplicando la regla práctica:

$$R = \frac{(1)^{10} + (1)^{10} + 16(1)^{40}}{(3)^2} = \frac{18}{9} = 2$$

$$V.V.R = 2$$

3.- Hallar el V.V. de:

$$L = \frac{\sqrt[3]{8x^{15} + 2x + 3} + \sqrt[5]{32x^{25} + 2x + 6}}{3x^5 + 4x + 6 + \sqrt{x^{10} + 5x + 7}}$$

para $x = \infty$.

Solución:

Cuando $x \rightarrow \infty$, la fracción toma la forma ∞/∞, analizando los grados $°|N| = °|D|$ por la regla práctica:

$$V.V.L = \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[5]{32}}{3 + \sqrt{1}} = \frac{2 + 2}{3 + 1}$$

$$V.V.L = 1$$

4.- Hallar el V.V. de:

$$R = \frac{(x - 2)^{17}(2x - 3)^5 (3x - 1)^2}{(x - 3)^{15}(2x - 1)^7 (3x - 2)^2}$$

para $x = \infty$.

Solución:

Cuando $x = \infty$,la fracción toma la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Analizando los grados: $°|N| = 24 = °|D|$

Aplicando la regla práctica:

$$V.V.R = \frac{(1)^{17}(2)^5(3)^2}{(1)^{15}(2)^7(3)^2} = \frac{1}{4}$$

5.- Hallar el V.V. de:

$$A = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \; ; \text{ para } n = \infty$$

Solución:

Cuando $n \rightarrow \infty$,la fracción toma la forma $\frac{\infty}{\infty}$; dividiendo el numerador y denominador entre 3^{n+1}:

$$A = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + \dfrac{3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{2^n}{3^{n+1}} + \dfrac{3^n}{3^{n+1}}} = \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}}$$

$$V.V.A. = \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\infty} + 1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\infty} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}} = \frac{0 + 1}{0 + \dfrac{1}{3}} = 3$$

Aclaración: Como $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n < 1$, luego:

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\infty} < 1$, y tiende a cero.

6.- Hallar el V.V. de:

$$J = \frac{\sqrt{2x^2 + \sqrt{3x^4 + 1}}}{\sqrt[4]{7x^4 + 4\sqrt{3x^8 + 1}}}$$

para $x = \infty$

Solución:

Cuando $x \to \infty$, la fracción toma la forma $\frac{\infty}{\infty}$;

Analizando los grados $°|N| = 1 = °|D|$
Aplicando la regla práctica:

$$V.V.J = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$$

$$V.V.J = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7+2\sqrt{4\,.\,3}}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{4}+\sqrt{3}}}$$

$$V.V.J = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

7.- Si el V.V. de la expresión E para:

$$x \to \infty \text{ es } \frac{125}{512}$$

indicar cuánto vale "n".

$$E = \frac{(25x^2+7)^n(100x^3-1)^{n-2}(2x^5-1)}{(80x^4+1)^n(5x-2)^{n-1}}$$

Solución:

Analizando los grados :

$$°|N| = 2n + 3n - 6 + 5 = 5n - 1$$

$$°|D| = 4n + n - 1 = 5n - 1$$

se observa que los grados son iguales.

Aplicando la regla práctica:

$$V.V.E = \frac{(25)^n(100)^{n-2}(2)}{(80)^n(5)^{n-1}} = \frac{125}{512}$$

$$\frac{(5^2)^n(5^2\,.\,2^2)^{n-2}(2)}{(2^4\,.\,5)^n\,.\,5^{n-1}} = \frac{125}{512}$$

$$\frac{5^{2n}\,.\,5^{2n-4}\,.\,2^{2n-4}\,.\,2^1}{2^{4n}\,.\,5^n\,.\,5^{n-1}} = \frac{125}{512}$$

$$\frac{5^{4n-4}\,.\,2^{2n-3}}{2^{4n}\,.\,5^{2n-1}} = \frac{125}{512}$$

$$\frac{5^{4n-4-2n+1}}{2^{4n-2n+3}} = \frac{125}{512}$$

$$\frac{5^{2n-3}}{2^{2n+3}} = \frac{5^3}{2^9}$$

$$\frac{5^{2n}\,.\,5^{-3}}{2^{2n}\,.\,2^3} = \frac{5^3}{2^9}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2n} = \frac{5^6}{2^6} = \left(\frac{5}{2}\right)^6$$

identificando exponentes:

$$2n = 6 \quad \therefore \quad n = 3$$

B-1) FORMA = $\infty - \infty$

1) Si una expresión f (x), irracional cuando $x \to \infty$, toma la forma indeterminada $\infty - \infty$; se lleva ésta a la forma $\frac{\infty}{\infty}$, multiplicando y dividiendo por su F.R o conjugada. Obtenida la forma $\frac{\infty}{\infty}$, para hallar su V.V. se aplica la regla práctica.

2) Si una expresión f (x), para x = a, toma la forma $\infty - \infty$ para hallar su V.V se efectúa las operaciones indicadas, se simplifica y se reemplaza x = a.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el V.V. de:

$$E = ax + b - \sqrt{a^2x^2 + abx + c}$$

para $x = \infty$.

Solución:

Multiplicando y dividiendo por:

$$\left[(ax+b) + \sqrt{a^2x^2 + abx + c}\right]$$

$$E = \frac{\left[(ax+b) - \sqrt{a^2x^2+abx+c}\right]\left[(ax+b)+\sqrt{a^2x^2+abx+c}\right]}{(ax+b) + \sqrt{a^2x^2+abx+c}}$$

$$E = \frac{(ax+b)^2 - (a^2x^2+abx+c)}{ax+b+\sqrt{a^2x^2+abx+c}}$$

$$E = \frac{a^2x^2 + 2abx + b^2 - a^2x^2 - abx - c}{ax+b+\sqrt{a^2x^2+abx+c}}$$

$$E = \frac{abx + b^2 - c}{ax + b + \sqrt{a^2x^2 + abx + c}}$$

cuando $x \rightarrow \infty$, $E = \frac{\infty}{\infty}$

Analizando los grados: $°|N| = 1 = °|D|$

Aplicando la regla práctica:

$$V.V.E = \frac{ab}{a + \sqrt{a^2}} = \frac{ab}{2a} = \frac{b}{2}$$

2.- Hallar el V.V. de:

$$E = \sqrt{x^2 + 10x + 8} - (x + 3)$$

para $x = \infty$.

Solución:

Cuando $x \rightarrow \infty$:

$E = \infty - \infty$

Multiplicando y dividiendo por el F.R.:

$$E = \frac{\left[\sqrt{x^2+10x+8} - (x+3)\right]\left[\sqrt{x^2+10x+8}+(x+3)\right]}{\sqrt{x^2 + 10x + 8} + (x + 3)}$$

$$E = \frac{\left(\sqrt{x^2 + 10x + 8}\right)^2 - (x + 3)^2}{\sqrt{x^2 + 10x + 8} + (x + 3)}$$

$$E = \frac{x^2 + 10x + 8 - x^2 - 6x - 9}{\sqrt{x^2 + 10x + 8} + x + 3} = \frac{4x - 1}{\sqrt{x^2 + 10x + 8} + x + 3}$$

Cuando $x \rightarrow \infty$:

$E = \frac{\infty}{\infty}$

Analizando los grados $°|N| = °|D| = 1$

Aplicando la regla práctica:

$$V.V.E = \frac{4}{\sqrt{1} + 1} = 2$$

3.- Hallar el V.V. de:

$$E = \frac{x + 6}{x^2 - 16} - \frac{x + 1}{x(x - 4)} \text{ ; para } x = 4$$

Solución:

Para $x = 4$, la expresión toma la forma indeterminada:

$$\infty - \infty$$

El primer denominador es diferencia de cuadrados, efectuando y simplificando:

$$E = \frac{x + 6}{(x + 4)(x - 4)} - \frac{x + 1}{x(x - 4)}$$

$$E = \frac{(x + 6)x - (x + 1)(x + 4)}{x(x + 4)(x - 4)}$$

$$E = \frac{x^2 + 6x - x^2 - 5x - 4}{x(x + 4)(x - 4)}$$

$$E = \frac{x - 4}{x(x + 4)(x - 4)} = \frac{1}{x(x + 4)}$$

para $x = 4$:

$$V.V.E = \frac{1}{4(4 + 4)} = \frac{1}{32}$$

4.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3} \text{ ; para } x = 1$$

Solución:

Para $x = 1$, la expresión toma la forma indeterminada $\infty - \infty$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$E = \frac{2}{(1 + x)(1 - x)} - \frac{3}{(1 - x)(1 + x + x^2)}$$

$$E = \frac{2(1 + x + x^2) - 3(1 + x)}{(1 + x)(1 - x)(1 + x + x^2)}$$

$$E = \frac{2 + 2x + 2x^2 - 3 - 3x}{(1 + x)(1 - x)(1 + x + x^2)}$$

$$E = \frac{2x^2 - x - 1}{(1 + x)(1 - x)(1 + x + x^2)}$$

$$E = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(1 + x)(1 - x)(1 + x + x^2)}$$

$$E = -\frac{2x + 1}{(1 + x)(1 + x + x^2)}$$

para $x = 1$

$$V.V.E = -\frac{2(1)+1}{(1+1)(1+1+1)} = -\frac{3}{2(3)} = -\frac{1}{2}$$

B-2 FORMA 0 . ∞

Cuando una expresión para x = a, toma la forma indeterminada 0 x ∞, su V.V. se encuentra efectuando las operaciones indicadas, simplificando y reemplazando x = a; o también, tratando de transformarlo, a otras formas conocidas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el V.V. de:

$$E = \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3x-1}\right)\left(\frac{7}{x^2+6x-16}\right)$$

para x = 2.

Solución:

Para x = 2, se obtiene 0 . ∞; efectuando operaciones:

$$E = \left[\frac{3x-1-x-3}{(x+3)(3x-1)}\right]\left[\frac{7}{(x+8)(x-2)}\right]$$

$$E = \left[\frac{2(x-2)}{(x+3)(3x-1)}\right]\left[\frac{7}{(x+8)(x-2)}\right]$$

$$E = \frac{14}{(x+3)(3x-1)(x+8)}$$

para x = 2

$$V.V.E = \frac{14}{(5)(5)(10)} = \frac{7}{125}$$

2.- Hallar el V.V. de:

$$E = \left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} - 1\right)x \quad \text{para } x = \infty$$

Solución:

Cuando $x \to \infty$, E toma la forma 0 . ∞

Multiplicando y dividiendo por el F.R.:

$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} + 1$$

se tiene:

$$E = \frac{\left(1+\frac{3}{x}-1\right)x}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} + 1}$$

$$E = \frac{\left(\frac{3}{x}\right)x}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} + 1}$$

$$E = \frac{\left(\frac{3}{x}\right)x}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} + 1}$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} + 1}$$

para $x \to \infty$:

$$V.V.E = \frac{3}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Evaluar: $\left[\dfrac{x^3 + 3x^2 - 2}{4x^2 + \sqrt[3]{27x^9 + 7}}\right]$

para $x = \infty$

a) $\frac{1}{4}$ b) ∞ c) 0

d) $\frac{1}{3}$ e) Indeterminado

2. Evaluar, para $x = -5$:

$$\left[\frac{3}{x^2 + 7x + 10}\right] - \left[\frac{1}{x^2 + 9x + 20}\right]$$

a) 2 b) 3 c) 1

d) $\frac{2}{3}$ e) $-\frac{3}{2}$

3. Evaluar: $\dfrac{\sqrt{ax} - a^2x^{-1}}{1 - ax^{-1}}$ para $x = a$

a) $6a^2$ b) $\dfrac{3}{2\sqrt{a}}$ c) $\dfrac{\sqrt{a}}{a}$

d) $\dfrac{3}{2a}$ e) Ninguna

4. Evaluar: $\dfrac{1 - \sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}}{1 - \sqrt{2 - \sqrt{\dfrac{1}{3 - 2x}}}}$

para $x = 1$

a) $\frac{-3}{2}$ b) -2 c) -3

d) $-\frac{2}{3}$ e) Ninguna

5. Evaluar:

$$\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\ldots+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{8+\sqrt{28}}}}}}}}}}$$

a) $2\left(\sqrt{7} - 1\right)$ b) $2\left(\sqrt{7} + 1\right)$ c) $\sqrt{7} + 1$

d) $\sqrt{7} - 1$ e) $3\sqrt{7} - 1$

6. Hallar: $E = \dfrac{\sqrt[3]{5x + 7} + 2}{\sqrt{3 - 2x} + x}$; para $x = -3$

a) 0 b) $\frac{5}{8}$ c) $-\frac{5}{4}$

d) $\frac{15}{8}$ e) $-\frac{15}{8}$

7. Hallar el V.V. de la fracción:

$T = x(2x + 1)\left[1 - \dfrac{2x - 1}{2x}\right]$; para $x = 0$

a) ∞ b) $\frac{7}{8}$ c) 0

d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{3}{4}$

8. Siendo: $i = \sqrt{-1}$, evaluar:

$$T = (1 + i)^{401} - (1 - i)^{401}$$

a) 0 b) i c) 2^{201}

d) 2^{200} e) $2^{201}\, i$

9. Hallar el V.V. de:

$\dfrac{\sqrt[3]{x + 1}}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$ para $x = \infty$

a) 1 b) -1 c) 0

d) ∞ e) 2

10. Hallar el V.V. de:

$\left[\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right]^{1/n}$; para $x = \infty$

a) a b) b c) $\sqrt{ab}$

d) ab e) $\frac{a}{b}$

11. Hallar el V.V. de:

$$\frac{nx + \text{sen } mx}{mx + \text{sen } nx} \; ; \quad \text{para } x \to 0$$

a) 1 b) $\frac{n^2 + m}{m^2 + n}$ c) $\frac{m}{n}$

d) $\frac{m^2 + n}{n^2 + m}$ e) $\frac{n}{m}$

12. Hallar el verdadero valor de la siguiente expresión:

$$\frac{(a + b)x^2 - (a^2 + b^2)x - 2abx + ab(a + b)}{(a - b)x^2 - (a^2 + b^2)x + 2abx - ab(a - b)}$$

a) 1 b) a c) a + b

d) $a^2 - b^2$ e) $a^2 + b^2$

13. Calcular el V.V. de:

$$V = \frac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1}}$$

si x = 1.

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 3

d) 4 e) N.A.

14. Hallar el verdadero valor de:

$$E = n\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right\} \text{ cuando } n \to \infty$$

a) 1 b) p c) $\frac{1}{p}$

d) p^2 e) 2p

15. Calcular los valores de a y b para que la fracción:

$$E = \frac{x^4 + 4x^3 + ax^2 + 4x + 1}{x^4 + 6x^3 + 12x^2 + bx + 3}$$

tome la forma $\frac{0}{0}$

para x = 1,

dar como respuesta: a + b + V.V. “E”

a) -10 b) -22 c) -32

d) +32 e) +10

16. Hallar el verdadero valor de:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x} - 1} - \frac{2}{x} \; ; \quad \text{para } x = 0$$

a) 1 b) 0 c) ∞

d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

17. Calcular el verdadero valor de:

$$\frac{\sqrt{a}\,(a - 1) + \sqrt{x}\,(1 - x)}{x - a} \; ; \quad \text{para } x = a$$

a) $\frac{(1 + a)\sqrt{a}}{2a}$ b) $\frac{a\sqrt{a}}{3}$

c) $\frac{a\sqrt{a}}{2}$ d) $\frac{1 - 2a}{2a}$

e) $\frac{(1 - 3a)\sqrt{a}}{2a}$

18. Hallar el V.V. de:

$$\frac{2x + \sqrt{15x^2 + \sqrt{x^4 + 1}}}{3x + \sqrt{96x^2 + \sqrt{16x^4 + 1}}}$$

para x = ∞ .

a) $\frac{2}{13}$ b) $\frac{4}{13}$

c) $\frac{6}{13}$ d) $\frac{5}{13}$

e) $\frac{10}{13}$

19. Hallar el V.V. de:

$$\frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}} \quad ; \text{ para } x = a$$

a) $\frac{p}{m} a^{p/m}$ b) $\frac{p}{m} a^{p-m}$ c) $\frac{p}{m} \sqrt[mp]{a^{p+m}}$

d) $\frac{p}{m} \sqrt[mp]{a^{p-m}}$ e) $\frac{m}{p}$

20. Hallar el V.V. de:

$$V = \frac{\sqrt[3]{27x^6 + 2x + 1} + \sqrt[4]{x^4+1} + 2\sqrt[5]{x^{10} + 4x + 3}}{\sqrt[3]{64x^6 + 2x - 1} + \sqrt[4]{x^8 + 6} + \sqrt[5]{x^4 + x^2 - 2}}$$

para $x = \infty$

a) 2 b) 1 c) $\frac{5}{2}$

d) Ninguna e) 3

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) D	3) D	4) A	5) C
6) B	7) D	8) E	9) B	10) C
11) A	12) A	13) A	14) B	15) C
16) D	17) E	18) C	19) D	20) B

CANTIDADES IMAGINARIAS Y NÚMEROS COMPLEJOS

PRINCIPALES CONCEPTOS

CANTIDADES IMAGINARIAS

DEFINICIÓN.- Las cantidades imaginarias son las raíces de índice par de cantidades negativas.

Ejemplos: $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[8]{-12}$

UNIDAD IMAGINARIA.- La cantidad $\sqrt{-1}$ se le denomina "unidad imaginaria". Según la notación de Gauss, la unidad imaginaria se representa por la letra "i".

Por lo tanto:

$i = \sqrt{-1}$, por definición:

$i^2 = -1$

Ejemplo: $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = 2i$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

1) $i^1 = \left(\sqrt{-1}\right)^1 = i$

2) $i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = -1$

3) $i^3 = i^2 \,.\, i = -i$

4) $i^4 = i^2 \,.\, i^2 = 1$

5) $i^5 = i^4 \,.\, i = i$

6) $i^6 = i^4 \,.\, i^2 = -1$

7) $i^7 = i^4 \,.\, i^3 = -i$

8) $i^8 = i^4 \,.\, i^4 = 1$

Se observa que los resultados de las potencias de la unidad imaginaria se repiten en períodos de 4 en 4 y estos valores son: i, -1, -i, 1.

TRANSFORMACIÓN DE LA POTENCIA i^m, DONDE "m" ES ENTERO Y POSITIVO

Suponiendo que se desea calcular i^m, donde $m > 4$:

1) Se divide m entre 4, de donde se tiene:

$$m = 4q + r$$

2) $i^m = i^{4q+r} = i^{4q} \,.\, i^r = (i^4)^q \,.\, i^r = i^r$

$\therefore \quad i^m = i^r$

donde $r = 0, 1, 2, 3$

$$i^m = i^r \begin{cases} r = 0 \quad \Rightarrow \quad i^0 = 1 \\ r = 1 \quad \Rightarrow \quad i^1 = i \\ r = 2 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1 \\ r = 3 \quad \Rightarrow \quad i^3 = -i \end{cases}$$

CONCLUSIÓN

Cuando "i" está elevada a una potencia positiva, si el exponente es múltiplo de 4, el resultado es la unidad; si el exponente es igual a un múltiplo de cuatro más 1 el resultado es i; si es igual a múltiplo de cuatro más 2 el resultado es -1; y si es igual al múltiplo de cuatro más 3 el resultado es igual a -i.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Calcular

$$E = 5i^{476} - 3i^{258} + 4i^{327} - 8i^{932} + 4i^{441}$$

Solución:

Transformando las potencias:

$$E = 5(1) - 3i^2 + 4(i)^3 - 8(1) + 4(i)^1$$

$$E = 5 - 3(-1) + 4(-i) - 8 + 4i = 5 + 3 - 4i - 8 + 4i$$

$$E = 0$$

2.- Simplificar:

$$E = \frac{i^{52} + i^{421} + i^{65} + i^{74} + i^{33}}{i^{2\,541} + i^{3244} + i^{2\,460} + i^{3\,581} + i^{2\,723}}$$

Solución:

Efectuando las potencias indicadas:

$$E = \frac{1 + i + i + (i^2) + i}{i + 1 + 1 + i + (i^3)}$$

$$E = \frac{1 + i + i - 1 + i}{i + 1 - 1 + i + i} = \frac{3i}{3i}$$

$$E = 1$$

4.- Calcular la expresión:

$$E = \frac{i^{-5} + i^{-15} + i^{-49} - i^{-18} + i^{-400} + 2i^{-14}}{i^{-6} + i^{-50} - i^{-23} + i^{-35} - i^{-441}}$$

Solución:

Transformando las potencias:

$$E = \frac{\dfrac{1}{i^5} + \dfrac{1}{i^{15}} + \dfrac{1}{i^{49}} - \dfrac{1}{i^{18}} + \dfrac{1}{i^{400}} + \dfrac{2}{i^{14}}}{\dfrac{1}{i^6} + \dfrac{1}{i^{50}} - \dfrac{1}{i^{23}} + \dfrac{1}{i^{35}} - \dfrac{1}{i^{441}}}$$

efectuando las potencias:

$$E = \frac{\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i^3} + \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{(-1)} + \dfrac{1}{1} + \dfrac{2}{(-1)}}{\dfrac{1}{(-1)} - \dfrac{1}{(-1)} - \dfrac{1}{i^3} + \dfrac{1}{i^3} - \dfrac{1}{2}}$$

$$E = \frac{\dfrac{3}{i}}{-\dfrac{i}{i}}$$

$$E = -3$$

4.- Calcular: $E = \dfrac{(1 + i)^9}{1 + i^9}$

Solución:

Efectuando la potencia $i^9 = i$

$$E = \frac{(1 + i)^9}{(1 + i)} = (1 + i)^8$$

pero:

$$(1 + i)^8 = [(1 + i)^2]^4 = (1 + 2i + i^2) = (2 + i)^4$$

$$\therefore \;\; E = (2i)^4 = 16i^4$$

$$E = 16$$

5.- Calcular: $E = \dfrac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$

Solución:

Escribiendo como potencias pares:

$$E = \frac{(1 + i)^8\,(1 + i)}{(1 - i)^6\,(1 - i)}$$

$$E = \frac{[(1 + i)^2]^4\,(1 + i)}{[(1 - i)^2]^3\,(1 - i)} = \frac{(2i)^4\,(1 + i)}{(-2i)^3\,(1 - i)}$$

Multiplicando y dividiendo por $(1 + i)$:

$$E = \frac{16i^4(1 + i)^2}{-8i^3(1 - i)(1 + i)} = \frac{16(2i)}{-8(-i)(1 - i^2)} = \frac{32i}{8i(2)}$$

$$E = 2$$

6.- La expresión adjunta se cumple para dos valores de "n" cuya suma se pide:

$$\sqrt[\lfloor\underline{n+1}]{\frac{\left(i^{\lfloor\underline{n}}\right)^{\lfloor\underline{n}}}{i^{4^{n+\lfloor\underline{1}}}}} = i$$

Solución:

Operando en el primer miembro:

$$\sqrt[\lfloor n+1]{\frac{i^{(\lfloor n)^2}}{i^{4\lfloor n}\ .\ i}} = \sqrt[\lfloor n+1]{\frac{i^{(\lfloor n)^2}}{(i^4)^{\lfloor n}\ .\ i}}$$

$$\sqrt[\lfloor n+1]{\frac{i^{(\lfloor n)^2}}{i}} = \sqrt[\lfloor n+1]{i^{(\lfloor n)^2-1}}$$

$$= i^{\frac{\lfloor n^2-1}{\lfloor n+1}} = i^{\frac{(\lfloor n+1)(\lfloor n-1)}{\lfloor n+1}} = i^{\lfloor n-1}$$

Luego, la igualdad primitiva será:

$$i^{\lfloor n-1} = i$$

identificando exponentes

$$\lfloor n - 1 = 1 \qquad \lfloor n = 2$$

$\therefore \quad n = 2$

otra solución se logra de:

$$i^{\lfloor n-1} = i = i^5$$

identificando exponentes:

$$\lfloor n - 1 = 5 \qquad \lfloor n = 6$$

$$\lfloor n = \lfloor 3$$

$\therefore \ n = 3$

Rpta.: La suma es 5.

7.- Simplificar:

$$E = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt[4]{16}}}\right)^{3n} .\ (-\sqrt{-1})^{13n+5}\ .\ (\sqrt{-1})^{2n+8}$$

Solución:

Al efectuar operaciones en el primer factor resulta:

$$E = (\sqrt{-1})^{3n}\ .\ (-\sqrt{-1})^{13n+5}\ .\ (\sqrt{-1})^{2n+8}$$

$$E = (i)^{3n}\ .\ (-i)^{13n+5}\ .\ (i)^{2n+8}$$

$$E = (i)^{3n}\ .\ (i^3)^{13n+5}\ .\ (i)^{2n+8}$$

$$E = i^{3n}\ .\ i^{39n+15}\ .\ i^{2n+8} = i^{44n+23}$$

$$E = i^{23} = i^3 = -i \qquad ; \qquad E = -i$$

8.- Cuántos valores diferentes puede tomar la expresión:

$$E = i^n + i^{-n}\ ?$$

Solución:

Transformando la potencia:

$$E = i^n + \frac{1}{i^n}$$

para n $= \overset{o}{4}$:

$$E = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

para n $= \overset{o}{4} + 1$:

$$E = i + \frac{1}{i} = i + \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = i + \frac{i}{-1} = 0$$

para n $= \overset{o}{4} + 2$:

$$E = i^2 + \frac{1}{i^2} = -1 + \frac{1}{(-1)} = -2$$

para n $= \overset{o}{4} + 3$:

$$E = i^3 + \frac{1}{i^3} = -i + \frac{1}{(-1)} \cdot \frac{i}{i} = -\,i + i = 0$$

Rpta.: Para los valores siguientes de n, se vuelve a repetir el ciclo, por lo tanto hay 3 valores diferentes.

9.- Calcular el valor de:

$$E = i^2 + 2i^4 + 3i^6 + 4i^8 + 5i^{10} + \ldots + (4n)i^{8n}$$

Solución:

La suma indicada tiene 4n términos, la cual está señalada por los coeficientes.

Desarrollando las potencias de i:

$$E = \underbrace{(-1) + 2(1) + 3(-1) + 4(1) + \ldots + (4n-1)(-1) + 4n(1)}_{(4n)\ \text{términos}}$$

$$E = \underbrace{-1 + 2}_{1}\ \underbrace{-3 + 4}_{1}\ \underbrace{-5 + 6}_{1} - \ldots\ \underbrace{-4n + 1 + 4n}_{1}$$

agrupando de 2 en 2 (cada grupo vale 1)

entonces:

$$E = \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots +}_{(2n)\ \text{veces}} = 2n$$

$$E = 2n$$

10.- Calcular el valor de:

$$E = i^{1^{1^{1}}} + i^{2^{2^{2}}} + i^{3^{3^{3}}} + i^{4^{4^{4}}} + i^{5^{5^{5}}} + i^{6^{6^{6}}} + i^{7^{7^{7}}}$$

Solución:

Analizando cada potencia:

1) $i^{1^{1^{1}}} = i^{1} = i$

2) $i^{2^{2^{2}}} = i^{2^{4}} = i^{16} = 1$

3) $i^{3^{3^{3}}} = i^{(4k-1)^{3^{3}}} = i^{4k+(-1)^{3^{3}}} = i^{-1} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{i}{i} = -i$

4) $i^{4^{4^{4}}} = i^{4} = 1$

5) $i^{5^{5^{5}}} = i$ (potencia es múltiplo de 4 + 1)

6) $i^{6^{6^{6}}} = i^{4k} = 1$

7) $i^{7^{7^{7}}} = i^{(4k+3k)^{7^{7}}} = i^{4k+3k} = i^{4k} \cdot i^{3k} = -i$

Luego:

$$E = i + 1 - i + 1 + i + 1 - i = 3$$

11.- Calcular el vlaor de "n" en la igualdad:

$$(1+i)^{7n} + C_1^n(1+i)^{7n-7}(1-i)^7 + C_2^n(1+i)^{7n-14}(1-i)^{14} + \dots + (1-i)^{7n} = 2^{61}$$

Solución:

Se observa que el primer miembro es el desarrollo de:

$$[(1+i)^7+(1-i)^7]^n = 2^{6!} \quad \text{(binomio de Newton)}$$

se puede escribir:

$$[(1+i)(1+i)^6 + (1-i)(1-i)^6]^n = 2^{6!}$$

$$\{(1+i)[(1+i)^2]^3 + (1-i)[(1-i)^2]^3\}^n = 2^{6!}$$

$$[(1+i)(1+2i+i^2)^3 + (1-i)(1-2i+i^2)^3]^n = 2^{6!}$$

$$[(1+i)(1+2i-1)^3+(1-i)(1-2i-1)^3]^n = 2^{6!}$$

$$[(1+i)(2i)^3 + (1-i)(-2i)^3]^n = 2^{6!}$$

$$[(1+i)8i^3 + (1-i)(-8i^3)]^n = 2^{6!}$$

$$[(1+i)(-8i) + (1-i)\{-8(-i)\}]^n = 2^{6!}$$

$$[-8i(1+i) + 8i(1-i)]^n = 2^{6!}$$

$$[8i(-1-i+1-i)]^n = 2^{6!}$$

$$[-16i^2]^n = 2^{6!}$$

$$[-16(-1)]^n = 2^{6!}$$

$$(16)^n = 2^{6!}$$

$$(2^4)^n = 2^{6!}$$

$$2^{4n} = 2^{6!}$$

$$4n = 6!$$

$$n = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4}$$

$$n = 180$$

12.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{(1+i)^{11}}{32(1-i)}$$

Solución:

Transformando:

$$E = \frac{(1+i)^{10}(1+i)}{32(1-i)}$$

$$E = \frac{[(1+i)^2]^5(1+i)}{32(1-i)} = \frac{(1+i^2+2i)^5(1+i)}{32(1-i)}$$

$$E = \frac{(1-1+2i)^5(1+i)}{32(1-i)} = \frac{(2i)^5(1+i)}{32(1-i)}$$

$$E = \frac{32i^5(1+i)}{32(1-i)} = \frac{(i^2)^2 \cdot i(1+i)}{(1-i)}$$

$$E = \frac{i(1+i)}{1-i} = \frac{i+i^2}{1-i} = \frac{i-1}{1-i} = \frac{-(1-i)}{(1-i)}$$

$$E = -1$$

13.- Calcular el valor de:

$$E = \left(\sqrt{12+5i} + \sqrt{12-5i}\right)\left(\sqrt{4+3i} + \sqrt{4-3i}\right)$$

Solución:

Elevando al cuadrado y extrayendo raíz cuadrada, se obtiene:

$$E = \sqrt{\left(\sqrt{12+5i}+\sqrt{12-5i}\right)^2\left(\sqrt{4+3i}+\sqrt{4-3i}\right)^2}$$

operando:

$$E = \sqrt{[12+5i+2\sqrt{(12+5i)(12-5i)}+12-5i]}$$
$$\overline{[4+3i+2\sqrt{(4+3i)(4-3i)}+4-3i]}$$

reduciendo:

$$E = \sqrt{\left(24+2\sqrt{144-25i^2}\right)\left(8+2\sqrt{16-9i^2}\right)}$$

Como $i^2 = -1$:

$$E = \sqrt{\left(24+2\sqrt{144+25}\right)\left(8+2\sqrt{16+9}\right)}$$

$$E = \sqrt{(24+2\,.\,13)(8+2.\,5)} = \sqrt{(24+26)(8+10)}$$

$$E = \sqrt{50(18)} = \sqrt{900} = 30$$

$$E = 30$$

14.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{(1+i)^3-(1+i)^2}{(1-i)^6}$$

Solución:

Extrayendo factor común en el numerador y transfromando el denominador:

$$E = \frac{(1+i)^2[(1+i)-1]}{[(1-i)^2]^3}$$

$$E = \frac{(1+i^2+2i)(1+i-1)}{(1-2i+i^2)^3}$$

$$E = \frac{(1-1+2i)(i)}{(1-2i-1)^3} = \frac{(2i)(i)}{(-2i)^3} = \frac{2i^2}{-8i^3}$$

$$E = \frac{2(-1)}{-8i^2\,.\,i} = \frac{-2}{-8(-1)i} = -\frac{1}{4i}$$

Multiplicando y dividiendo por i:

$$E = -\frac{1}{4i}\,.\,\frac{i}{i} = -\frac{i}{4i^2} = -\frac{i}{4(-1)}$$

$$E = \frac{1}{4}$$

15.- Calcular el valor de:

$$E = (1+i)^{-(1-i)^{-(1-i)^4}}$$

Solución:

Calculando en primer lugar el último exponente, ésto es:

$$(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (1-2i+i^2)^2$$

$$(1-i)^4 = (1-2i-1)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = 4(-1) = -4$$

la expresión que se obtiene es:

$$E = (1+i)^{-(1-i)^{-(-4)}} \quad = (1+i)^{-(1-i)^4}$$

luego, como $(1-i)^4 = -4$, se tiene:

$$E = (1+i)^{-(-4)} = (1+i)^4$$

$$E = [(1+i)^2]^2 = (1+2i+i^2)^2 = (1+2i-i)^2$$

$$E = (2i)^2 = 4i^2 = 4(-1) = -4$$

$$E = -4$$

16.- Calcular el valor de:

$$E = (1 - i^{-1} + 1^{-2} - i^{-3} + i^{-4} - i^{-5} + \ldots - i^{-223})^2$$

Solución:

Transformando en potencias positivas:

$$E = \left(1 - \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} - \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} - \ldots - \frac{1}{i^{223}}\right)^2$$

también:

$$E = \left(\frac{i^{223} - i^{222} + i^{221} - i^{220} + i^{219} - \ldots - 1}{i^{223}}\right)^2$$

Escribiendo como coeficiente notable:

$$E = \left\{ \frac{\dfrac{i^{224} - 1}{i + 1}}{i^{223}} \right\}^2 = \left\{ \frac{\dfrac{(i^2)^{112} - 1}{i + 1}}{(i^2)^{112} \ . \ i} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{\dfrac{(-1)^{112} - 1}{i + 1}}{(-1)^{111} \ . \ i} \right\}^2 = \left\{ \frac{\dfrac{1 - 1}{i + 1}}{-i} \right\}^2 = 0$$

$E = 0$

17.- Simplificar la expresión:

$$E = \left\{ i^{\frac{754!}{753!}} \right\}^{i^{C^{21}_{15}}}$$

Solución:

Cálculo de los exponentes:

$$\frac{754!}{753!} = \frac{754 \ . \ 753!}{753!} = 754$$

$$C^{21}_{15} = \frac{\lfloor 21}{\lfloor 15 \ \lfloor 6}$$

$$= \frac{21 \ . \ 20 \ . \ 19 \ . \ 18 \ . \ 17 \ . \ 16 \ . \ \lfloor 15}{\lfloor 15 \ . \ 1 \ . \ 2 \ . \ 3 \ . \ 4 \ . \ 5 \ . \ 6}$$

$C^{21}_{15} = 21 \ . \ 19 \ . \ 17 \ . \ 8 =$ múltiplo de $4 = m4$

como $i^4 = 1$, se tiene:

$$E = \{i^{754}\}^{i^{m4}} = \{(i^4)^{188} \ . \ i^2\}^{i^{m4}} = \{(i)^{188} \ . \ i^2\}^1 = (i^2)^1$$

$E = -1$

18.- Calcular el valor de:

$$E = 3i + 5i^2 + 7i^3 + 9i^4 + 11i^5 + \ldots + (8n + 1)i^{4n} - 4n$$

Solución:

Transformando las primeras potencias, con la finalidad de obtener una regla de formación teniendo presente que:

$$i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad i^4 = 1$$

se tendrá:

$$E = 3\,i + 5(-1) + 7(-i) + 9(1) + 11(i) + 13(-1)$$
$$+ 15(-i) + 17(1) + \ldots + (8n + 1)(1) - 4n$$

$$E = 3i - 5 - 7i + 9 + 11i - 13 - 15i + 17 + \ldots + (8n + 1) - 4n$$

Agrupando de 4 en 4 términos:

$$E = (3i - 5 - 7i + 9) + (11i - 13 - 15i + 17) + \ldots$$
$$+ (8n + 1) - 4n$$

$$E = (4 - 4i) + (4 - 4i) + \ldots + (4 - 4i) - 4n$$

En este caso, se debe considerar $\frac{\text{“}4n\text{”}}{4}$ términos ya que se han tomado de 4 en 4 y el número de términos es 4n; ésto se obtiene observando los exponentes de i. De esta manera:

$$E = (4 - 4i)n - 4n = 4n - 4ni - 4n = -4ni$$

$E = -4ni$

19.- Calcular: $E = \dfrac{x + y}{x - y}$

si se cumple que:

$$(1 + i)^2 + (1 + i)^4 + (1 + i)^6 + (1 + i)^8 = x + yi$$

Solución:

Se puede escribir el primer miembro:

$$(1 + i)^2 + \{(1 + i)^2\}^2 + \{(1 + i)^2\}^3 + \{(1 + i)^2\}^4$$
$$= x + yi$$

Como:

$$(1 + i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i$$

entonces:

$$(2i) + (2i)^2 + (2i)^3 + (2i)^4 = x + yi$$

efectuando:

$$2i + 4i^2 + 8i^3 + 16i^4 = x + yi$$

Como:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad 1^4 = 1$$

se obtiene:

$$2i - 4 - 8i + 16 = x + yi$$

$$12 - 6i = x + yi$$

de aquí:

$$x = 12$$

$$y = -6$$

reemplazando en la expresión pedida:

$$E = \frac{12 - 6}{12 - (-6)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

20.- Calcular el menor valor de n que verifica:

$$(1 + i)^n = 32i$$

Solución:

Como $i = i^5$ y aque $i^4 = 1$, se puede escribir:

$$1 + i)^n = 32i^5$$

también:

$$(1 + i)^n = (2i)^5$$

Como:

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

se puede escribir:

$$(1 + i)^n = [(1 + i)^2]^5$$

$$(1 + i)^n = (1 + i)^{10}$$

por lo tanto: $n = 10$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El valor de: $\left(i^{7^7}\right)^{7^7}$ es:

a) 1 b) -1 c) i

d) -4 e) Ninguna

2. Racionalizar: $\dfrac{a + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}\,i}$

a) $\sqrt{a} - \sqrt{b}\,i$ b) $\sqrt{a} + \sqrt{b}\,i$ c) $a + bi$

d) $a - bi$ e) $(a + b)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)i$

3. Hallar el valor de:

$$E = \left[\left(i^{55^{57^{58}}}\right)^{21^{22^{23}}}\right]^{29^{31}}$$

a) i b) -i c) 1

d) -1 e) Ninguna

4. Efectuar: $\left(\dfrac{i^{28!} + i^{27!}}{i^{26!} + i^{25!}}\right)^{i^{50!} + i^{52!}}$

a) Imposible b) Indeterminado

c) Ninguno d) 1

e) 0

5. Efectuar:

$$E = \left\{\frac{-\dfrac{-i^5}{i^{23}}}{\dfrac{-i^9}{i^{39}}}\right\}\left\{\frac{\dfrac{i^{17}}{-i^{51}}}{-\dfrac{-i^{25}}{i^{49}}}\right\}$$

a) i b) -i c) 1

d) -1 e) 0

6. Calcular:

$$E = i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 - i^6 + i^7 - i^8 \ldots\text{. 4n términos}$$

a) 1 b) i c) 0

d) -i e) -1

7. Calcular:

$$E = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots + (n)i^n$$

a) 2n b) 3n c) 4n

d) n e) 1

8. Calcular:

$$E = i^2 + 3i^4 + 5i^6 + 7i^8 + \ldots + (2n-1)i^{2n}$$

a) n b) $\frac{n}{2}$ c) 2n

d) -2n e) 1

9. Efectuar:

$$E = i^{1^{2^{3^4}}} + i^{5^{6^{7^8}}} + i^{9^{10^{11^{12}}}} + \ldots$$

$$+ i^{(4n+1)^{(4n+2)^{(4n+3)^{(4n+4)}}}}$$

a) n b) 4n c) ni

d) 4ni e) 2ni

10. Calcular:

$$E = (1+i)^{200} - (1-i)^{200}$$

a) 2^{100} b) 0 c) 2^{50}

d) i e) -i

11. Calcular: $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$

para "n" entero y positivo.

a) $4i^n$ b) $3i^n$ c) $2i^{n-1}$

d) i^{n+1} e) $2i^n$

12. Calcular "x" é "y" sabiendo que el siguiente polinomio tiene raíz cuadrada exacta:

$$a^2 + 6a + 2ai + x - yi$$

a) x = 6, y = -8 b) x = -6, y = -8 c) x = -6, y = 8

d) x = 6, y = -8 e) x = 8, y = -6

13. Calcular:

$$E = (1+i) + (2+i^2) + (3+i^3) + \ldots + (4n + i^{4n})$$

a) 2n(4n + 1) b) 2n(4n - 1)

c) 2n(4n + 2) d) 2n(4n - 2)

e) $8n^2$

14. Si: $\dfrac{x^2 - y^2 + (x^2 + y^2)i}{x - y + (x + y)i}$

es igual a 3, hallar x.

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

15. Si: $\dfrac{a^b + a^{2b}i}{b^a + b^{2a}i}$ es un real puro

Calcular a^b.

a) a b) b c) a^a

d) $a^{\frac{1}{a}}$ e) a^2

16. Si: $Z_1 = \sqrt{a^{2b} - b^{2a} + 2a^bb^ai}$

$Z_2 = \sqrt{b^{2a} - a^{2b} + 2a^bb^ai}$

siendo $Z_1 + Z_2 = ab(1 + b)$, calcular:

$$E = \frac{b^{a-1}}{a} + \frac{a^{b-1}}{b}$$

a) a b) b c) ab

d) 1 e) $\frac{a}{b}$

17. Si:

$\sqrt{5 + 12i} = x + yi$, hallar: x + y

a) 3 b) 2 c) 5

d) 7 e) 4

18. Si se cumple que:

$$\frac{\sqrt{a^{ai}+1}-\sqrt{a^{ai}-1}}{\sqrt{a^{ai}+1}+\sqrt{a^{ai}-1}}+\frac{(a^{ai}-b^{bi})(a^{ai}+b^{bi})}{\sqrt{a^{2ai}-1}-\sqrt{b^{2bi}-1}}+\frac{\sqrt{b^{bi}+1}-\sqrt{b^{bi}-1}}{\sqrt{b^{bi}+1}+\sqrt{b^{bi}-1}}$$

hallar la relación entre a y b.

a) $a = -b$ b) $a - b = 0$

c) $a = b^2$ d) $b = a^2$

e) $a^2 = b^3$

19. Si se cumple que:

$$i^{(4n-1)^{(4n-2)^{(4n-3)}}} + i^{(4n+1)^{(4n+2)^{(4n+3)}}} = ni$$

calcular "n".

a) 1 b) 0 c) 2

d) -1 e) -2

20. Calcular el valor de:

$$E = \frac{1}{512}\left\{-2+\sqrt{20}\pm\sqrt{-40-8\sqrt{5}}\right\}^5$$

a) 64 b) 512 c) 256 d) 64 e) 32

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) A	3) A	4) D	5) C
6) C	7) A	8) A	9) C	10) B
11) C	12) E	13) A	14) C	15) C
16) D	17) C	18) B	19) C	20) A

NÚMEROS COMPLEJOS

DEFINICIÓN.- Los números complejos son aquellos que tienen una parte real y una imaginaria. Son de la forma:

$$Z = a + bi$$

Donde a y b pueden ser números positivos, negativos y aún nulos.

CLASES DE NÚMEROS COMPLEJOS

COMPLEJO REAL.- Es aquel cuya parte imaginaria es nula.

COMPLEJO PURO.- Es aquel cuya parte real es nula.

COMPLEJO NULO.- Es aquel cuya parte real y cuya parte imaginaria son nulas.

COMPLEJOS IGUALES.- Son dos complejos, que tienen iguales sus partes reales e iguales sus partes imaginarias.

Ejemplo: Si: $a + bi = c + di$

$$\therefore \quad \begin{aligned} a &= c \\ b &= d \end{aligned}$$

COMPLEJOS CONJUGADOS.- Son dos complejos que tienen iguales sus partes reales e iguales pero de signos contrarios sus partes imaginarias.

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= a + bi \\ Z_2 &= a - bi \end{aligned}\right\} \text{son dos complejos conjugados}$$

COMPLEJOS OPUESTOS.- Son dos complejos que tienen iguales, pero de signos contrarios, tanto las partes reales como las imaginarias.

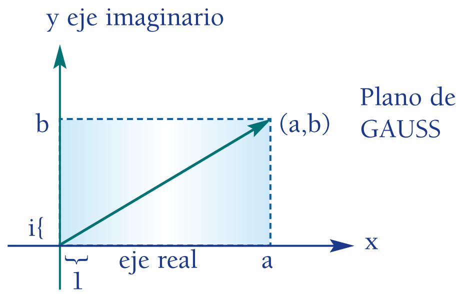
Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= a + bi \\ Z_2 &= -a - bi \end{aligned}\right\} \text{son dos complejos opuestos}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

1.- REPRESENTACION CARTESIANA

Se realiza utilizando un sistema de ejes rectangulares o cartesianos; en el eje "x" se representa los números reales y las cantidades imaginarias en el eje "y". Al plano formado por los ejes real e imaginario se denomina llama Plano de Gauss.



Sea:

$$Z = a + bi$$

En el eje y:

i = unidad de medida de los valores imaginarios.

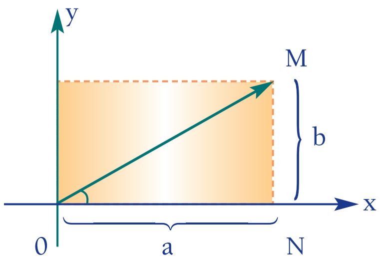
En el eje x:

1 = unidad de medida de los valores reales.

2.-REPRESENTACIÓN POLAR O TRIGONOMÉTRICA

Para representar un complejo de esta manera, es necesario conocer el "radio vector", conocido con el nombre de "módulo" y el ángulo que forma ésta con la parte positiva del eje "x".

Sea el complejo $Z = a + bi$, a representar en forma polar.



r = radio vector o módulo

θ = ángulo o argumento del módulo

Apoyados en el gráfico podemos calcular los valores de r y θ:

Cálculo del módulo.

En el triángulo rectángulo MNO:
(por Pitágoras)

$$\overline{MN}^2 + \overline{NO}^2 = \overline{MO}^2$$

$$b^2 + a^2 = r^2$$

$$\therefore \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{(I)}$$

Cálculo del argumento o ángulo θ.-

En el triángulo rectángulo MNO:

$$\text{tg } \theta = \frac{b}{a}$$

$$\therefore \qquad \theta = \text{arc tg } \frac{a}{b} \qquad \text{(II)}$$

ya que según el gráfico: $a = r\cos\theta$ y $b = r\text{sen }\theta$, la forma polar de $a + bi$ será:

$$a + bi = r\cos\theta + ri\text{ sen}\theta$$

ó:

$$a + bi = r(\cos\theta + i\text{ sen }\theta)$$

Ejemplo.- Expresar en forma polar:

$$8 + 6i$$

Solución:

Se sabe que:

$$8 + 6i = r(\cos\theta + i\text{ sen }\theta)$$

Ejecutemos el cálculo de r y θ, apoyados en las fórmulas (I) y (II):

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$\theta = \text{arc tg } \frac{b}{a} = \text{arc tg } \frac{6}{8} = \text{arc tg } \frac{3}{4} = 37°$$

Luego:

$$8 + 6i = 10(\cos 37° + i\text{ sen } 37°)$$

OPERACIONES CON COMPLEJOS

SUMA DE COMPLEJOS.- Para sumar dos o más complejos, se suma las partes reales y las partes imaginarias separadamente.

Ejemplo: Sean los números complejos:

$$Z_1 = a + bi$$

$$Z_2 = c + di$$

$$\therefore \quad (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

MULTIPLICACIÓN DE COMPLEJOS.- El producto de números complejos puede ser: otro complejo, un imaginario puro, o un número real. Para efectuar el producto, se considera a los complejos como binomios.

Ejemplo:

$$\text{Si: } (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

o también en forma polar:

$$Z_1 = a + bi = r(\cos\theta + i\text{ sen }\theta)$$

$$Z_2 = c + di = r_1(\cos\theta_1 + i\text{ sen }\theta_1)$$

$$Z_1Z_2 = r(\cos\theta + i\text{ sen }\theta)\ .\ r_1(\cos\theta_1 + i\text{ sen }\theta_1)$$

$$= rr_1[(\cos\theta\ \cos\theta_1 - \text{sen }\theta\text{sen }\theta_1)$$

$$+ i(\text{sen }\theta\ \cos\theta_1 + \cos\text{ sen }\theta_1)]$$

$$\therefore \quad Z_1Z_2 = r\,r_1[\cos(\theta + \theta_1) + i\text{ sen }(\theta + \theta_1)]$$

PROPIEDADES

1° El módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores.

2° El argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.

DIVISIÓN DE COMPLEJOS.- El cociente de dos complejos puede ser: otro complejo, un imaginario puro o un número real. Para dividir dos complejos, se expresa el cociente en forma de quebrado y se racionaliza el denominador, multiplicando ambos miembros de la fracción por la conjugada del denominador.

Ejemplo:

Hallar: $\dfrac{Z_1}{Z_2}$, siendo: $Z_1 = a + bi$

$Z_2 = c + di$

$\therefore$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{a + bi}{c + di}\right)\left(\frac{c - di}{c - di}\right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 - d^2i^2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$$

o, también en forma polar:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)} \cdot \frac{\cos\theta_1 - i\,\text{sen}\,\theta_1}{\cos\theta_1 - i\,\text{sen}\,\theta_1}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left[\frac{(\cos\theta\cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta_1)}{\cos\theta_1\cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_1} + \frac{i\,(\text{sen}\,\theta\cos\theta_1 - \cos\theta\,\text{sen}\,\theta_1)}{}\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r}{r_1}\,[(\cos\theta\cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta_1) + i(\text{sen}\,\theta\cos\theta_1 - \cos\theta\,\text{sen}\,\theta_1)]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r}{r_1}\,[(\cos(\theta - \theta_1) + i\,\text{sen}\,(\theta - \theta_1)]$$

PROPIEDADES

1º El módulo del cociente es igual al cociente de los módulos del dividendo y el divisor.

2º El argumento del cociente es igual a la diferencia entre los argumentos del dividendo y el divisor.

POTENCIA DE UN COMPLEJO.- La potencia de un complejo puede ser: otro complejo, un número real o un imaginario puro.

Para efectuar la operación se aplica el desarrollo del Binomio de Newton; para potencias elevadas, es conveniente potenciar en forma polar.

$$[r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n$$

$$= r^n(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\,.\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\ldots(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= r^n[\cos\,(\underbrace{\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta}_{n}) + i\,\text{sen}\,(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n})\,]$$

$$[r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

PROPIEDADES

1º El módulo de la potencia es la potencia del módulo de la base.

2º El argumento de la potencia es el argumento de la base multiplicado por el exponente.

RAÍZ DE UN COMPLEJO.- La raíz de un complejo es otro complejo, puro o real. Para extraer la raíz de índice elevado, se opera con la forma polar:

$$\sqrt[n]{r\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)} = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \quad \text{(I)}$$

Elevando a la potencia "n" para calcular r_1 y + θ_1, en función de r y θ que se conoce.

El primer miembro de (I) se puede escribir así:

$$r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\,\text{sen}(\theta + 2k\pi)]$$

$$= r_1^n(\cos n\theta_1 + i\,\text{sen}\,n\theta_1)$$

para que los complejos sean iguales.

1) $r_1^n = r$

$\therefore \quad r_1 = \sqrt[n]{r}$

2) $\theta + 2k\pi = n\theta_1$

$\therefore \quad \theta_1 = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$

Sustituyendo los valores de r_1 y θ_1 en (I):

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde k = 0,1,2,3,…, n - 1; ya que se debe obtener "n" raíces.

PROPIEDADES

1º El módulo de la raíz es la raíz del módulo del radicando.

2º El argumento de la raíz es el argumento del radicando incrementado en $2k\pi$, dividido entre el índice.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Efectuar:

$$E = \frac{1+i}{12-5i} - \frac{1-i}{5-12i} + \frac{10+3i}{169}$$

Solución:

Racionalizando las dos primeras fracciones:

$$E = \frac{(1+i)(12+5i)}{12^2 - 25i^2} - \frac{(1-i)(5+12i)}{5^2 - 12^2i^2} + \frac{(10+3i)}{169}$$

$$E = \frac{12+5i+12i-5}{169} - \frac{5+12i-5i+12}{169} + \frac{10+3i}{169}$$

$$E = \frac{7+17i-17-7i+10+3i}{169} = \frac{13i}{169} = \frac{i}{13}$$

2.- Dos números complejos tienen el mismo módulo. Uno de ellos es conjugado del otro. Sus argumentos suman 510°. Calcular los argumentos de ambos complejos.

Solución:

Sean los complejos:

$r(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $r(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$

Por datos:

$$r\cos\theta_1 + ri\operatorname{sen}\theta_1 = r^2\cos 2\theta_2 - r^2 i \operatorname{sen} 2\theta_2$$

identificando las partes reales y las partes imaginarias entre sí:

$$r\cos\theta_1 = r^2\cos 2\theta_2 \qquad (1)$$

$$r\operatorname{sen}\theta_1 = -r^2\operatorname{sen} 2\theta_2 \qquad (2)$$

dividiendo (2) : (1) miembro a miembro:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_1} = -\frac{\operatorname{sen}2\theta_2}{\cos 2\theta_2}$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = -\operatorname{tg}2\theta_2$$

pero: $-\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}(-2\theta_2)$$

de aquí por por propiedad trigonométrica:

$$\theta_1 - (-2\theta_2) = 360k$$

$$\theta_1 + 2\theta_2 = 360k \qquad (3)$$

Por datos:

$$\theta_1 + \theta_2 = 510° \qquad (4)$$

La solución aceptable de (3) y (4) es:

$$\theta_1 = 300°$$

$$\theta_2 = 210°$$

3.- Obtener "x" e "y" sabiendo que el siguiente polinomio tiene raíz cuadrada exacta:

$$P = a^2 + 6a + 2ai + cx - yi$$

Solución:

Representando como (a+b) la raíz cuadrada del polinomio:

$$a^2 + 6a + 2ai + x - yi = (a+b)^2$$

$$a^2 + 2a(3+i) + (x - yi) = a^2 + 2ab + b^2$$

identificando términos:

$$b = 3 + i \qquad (1)$$

$$b^2 = x - yi \qquad (2)$$

sustituyendo (1) en (2):

$$(3+i)^2 = x - yi$$

$$8 + 6i = x - yi$$

Identificando términos nuevamente:

$$x = 8$$
$$y = -6$$

4.- El cociente de dos números complejos es imaginario puro; su suma es real y vale 5. El módulo del dividendo es doble que el del divisor. Hallar el divisor.

Solución:

Siendo la suma real entonces los complejos son de la forma:

$$(x + yi), \quad (z - yi)$$

Por datos:

$$\frac{x + yi}{z - yi} = bi \qquad (1)$$

$$x + z = 5 \qquad (2)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{z^2 + y^2} \qquad (3)$$

De (1) se obtiene:

$$x + yi = bzi + by$$

identificando términos: $x = by$
$y = bz$

dividiendo miembro a miembro, resulta:

$$y^2 = xz \qquad (4)$$

resolviendo el sistema (2), (3), (4):

$$x = 4$$
$$y = \pm 2$$
$$z = 1$$

$\therefore$ El divisor es: $1 \pm 2i$

5.- La diferencia de dos números complejos es real, su producto vale $1 + 3i$ y la parte real de la suma es igual a 3. Calcular la suma de los cuadrados de los módulos.

Solución:

Por ser la diferencia real, los complejos serán de la forma:

$$(a + bi) , (c + bi)$$

según datos:

$$(a + bi)(c + bi) = 1 + 3i$$

o, bien:

$$(ac - b^2) + b(a + c)i = 1 + 3i$$

identificando términos:

$$ac - b^2 = 1 \qquad (1)$$

$$b(a + c) = 3 \qquad (2)$$

además, por datos:

$$a + c = 3 \qquad (3)$$

(3) en (2): $b = 1$

En (1): $ac = 2 \qquad (4)$

De (3) y (4): $a = 1; c = 2$ ó $a = 2, c = 1$

Los complejos serán: $2 + i$, y, $1 + i$

6.- Calcular "a" sabiendo que:

$$\frac{a + 3i}{2 - 5i}$$

es un imaginario puro.

Solución:

Por condición del problema:

$$\frac{a + 3i}{2 - 5i} = ki$$

de aqui:

$$a + 3i = 5k + 2ki$$

identificando: $a = 5k \qquad (\alpha)$

$$3 = 2k$$

$$k = \frac{3}{2}$$

De (α):

$$a = 5\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$a = 7 . 5$$

7.- Hallar el módulo del complejo:

$$Z = \frac{(4 + 3i)^2 (-1 + i)^4}{\left(\sqrt{3} + i\right)^5}$$

Solución:

Cálculo de los módulos r_1, r_2 y r_3

$$r_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$r_3 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

El módulo del complejo será:

$$r = \frac{(5)^2 \left(\sqrt{2}\right)^4}{(2)^5} = \frac{25 \;.\; 4}{32}$$

$$r = \frac{25}{8}$$

8.- Calcular el valor de:

$$E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{45}$$

Solución:

Aplicando las propiedades de los complejos:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$q = \text{arc tg}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \text{arc tg}\,\sqrt{3} = 60°$$

Por lo tanto:

$$E = [1(\cos 60 + i \text{ sen } 60°)]^{45}$$

$$= (1)^{45} (\cos 60 \;.\; 45 + i \text{ sen } 60 \;.\; 45)$$

$$E = \cos 2\,700° + i \text{ sen } 2\,700°$$

$$= \cos 180° + i \text{ sen } 180°$$

$$E = -1$$

9.- Calcular la raíz cuadrada de $5 + 12i$

Solución:

Suponiendo que la raíz cuadrada es de la forma $a + bi$:

$$\sqrt{5 + 12i} = a + bi$$

elevando al cuadrado:

$$5 + 12i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

identificando términos:

$$a^2 - b^2 = 5 \qquad (1)$$

$$2ab = 12 \qquad (2)$$

resolviendo (1) y (2) se obtiene:

$$a = \pm 3$$

$$b = \pm 2$$

Rpta.: $\sqrt{5 + 12i} = \pm 3 \pm 2i$

RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

EJEMPLO.- Determinar las raíces cúbicas de la unidad.

Solución:

Utilizando la fórmula de la raíz se tendrá:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1 + 0i} = \sqrt[3]{\cos 0° + i \text{ sen } 0°}$$

$$= \cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)$$

dando valores a k:

1) Para $k = 0$:

$$\sqrt[3]{1} = \cos 0 + i \text{ sen } 0 = 1 \qquad (A)$$

2) Para $k = 1$:

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{0 + 2\pi}{3} + i \text{ sen}\frac{0 + 2\pi}{3}$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i \text{ sen}\frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \qquad \text{(B)}$$

3) Para k = 1:

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{0 + 4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{0 + 4\pi}{3}$$

$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \qquad \text{(C)}$$

$$\text{En resumen: } \sqrt[3]{1}: \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{cases}$$

PROPIEDADES

1º De las dos raíces complejas que aparecen en la raíz cúbica de la unidad, una de ellas es el cuadrado de la otra.

Si una raíz compleja es w, la otra es w^2, siendo la tercera el número real 1.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{1} = 1, \quad \sqrt[3]{1} = w, \quad \sqrt[3]{1} = w^2$$

2º La suma de las tres raíces cúbicas de la unidad es igual a cero:

$$1 + w + w^2 = 0$$

3º Debido a que w es una de las raíces cúbicas de la unidad, $w^3 = 1$, y por lo tanto w^3 elevada a cualquier exponente es igual a la unidad.

Como:

$$w^3 = 1$$

Elevando a la potencia k:

$$w^{3k} = 1$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Simplificar:

$$E = (1 - w)^2 (1 - w^2)^2 (1 - w^4)^2 (1 - w^5)^2$$

Solución:

Se sabe que:

$$w^3 = 1; \qquad w^4 = w; \qquad w^5 = w^2$$

sustituyendo:

$$E = (1 - w)^2 (1 - w^2)^2 (1 - w)^2 (1 - w^2)^2$$

$$E = [(1 - w)(1 - w^2)]^4 = [1 - w^2 - w + w^3]^4$$

pero:

$$1 + w + w^2 = 0$$

$$\therefore \quad 1 = -w - w^2$$

y como:

$$w^3 = 1$$

sustituyendo en E:

$$E = (1 + 1 + 1)^4$$

$$E = 81$$

2.- Calcular:

$$E = (1 + w - w^2)^3 - (1 - w + w^2)^3$$

Solución:

Como:

$$\left.\begin{aligned} 1 + w + w^2 &= 0 \\ 1 + w &= -w^2 \\ 1 + w^2 &= -w \end{aligned}\right\} \quad \text{sustituyendo en la expresión}$$

$$E = (-w^2 - w^2)^3 - (-w - w)^3 = (-2w^2)^3 - (-2w)^3$$

$$E = -8w^6 + 8w^3 = -8 + 8 = 0$$

$$E = 0$$

3.- Calcular:

$$E = (5 + 7w + 7w^2)^{12}$$

Solución:

La expresión se puede escribir:

$$E = [5 \; +7(w + w^2)]^{12}$$

Como: $1 + w + w^2 = 0$, se tiene:

$$w + w^2 = -1$$

$$\therefore \quad E = [5 + 7(-1)]^{12} = (-2)^{12} = 2^{12}$$

$$E = 4\,096$$

4.- Simplificar:

$$E = w^{273} + w^{542} + w^{115} + w^{439} + w^{855} + w^{668}$$

Solución:

Transformando:

$$E = (w^3)^{91} + (w^3)^{180} \, . \, w^2 + (w^3)^{38} \, . \, w + (w^3)^{146} . \, w$$
$$+(w^3)^{285} + (w^3)^{222} \, . \, w^2$$

Como $w^3 = 1$, se tendrá:

$$E = 1 + w^2 + w + w + 1 + w^2$$

$$E = 0 + 0$$

$$E = 0$$

3.- Calcular el valor de:

$$E = (1 + w^2)^{10} + (1 - w + w^2)\,(1 + w - w^2)w - 5w$$

siendo w y w^2 las raíces cúbicas de la unidad.

Solución:

Como:

$$1 + w^2 + w^2 = 0 \quad \begin{cases} 1 + w^2 = -w \\ 1 + w = -w^2 \end{cases}$$

Sustituyendo en el ejercicio:

$$E = (-w)^{10} + (-w - w)\,(-w^2 - w^2)w - 5w$$

$$E = (-w)^{10} + (-2w)(-2w^2)w - 5w$$

$$E = w^{10} + 4w^4 - 5w$$

Como $w^{3k} = 1$, luego:

$$E = (w^3)^3 \, . \, w + 4(w^3) \, . \, w - 5w$$

$$E = (1)^3 \, . \, w + 4(1) \, . \, w - 5w$$

$$E = w + 4w - 5w$$

$$E = 0$$

6.- Calcular el valor de:

$$E = \left[\left\{ \left[(w^w)^{w^2} \right]^{w^3} \right\}^{w^4} \cdots \right]^{w^{50}}$$

siendo w, w^2 las raíces cúbicas complejas de la unidad.

Solución:

Efectuando el producto de potencias, se obtiene:

$$E = w^{w \, . \, w^2 \, . \, w^3 \, . \, w^4 \, \ldots \, w^{50}}$$

Efectuando la multiplicación de potencias, en el exponente:

$$E = w^{w^{1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 50}}$$

la suma de exponentes puede ser reemplazada por:

$$E = w^{w^{\frac{50 \, . \, 51}{2}}} = w^{w^{1\,275}} = w^{(w^3)^{425}}$$

Como $w^3 = 1$ se obtiene:

$$E = w^{(1)^{425}} = w^1$$

$$E = w$$

7.- Calcular el valor de:

$$E = (1 + w + w^2 + w^3 + \ldots + w^{25})(1 - w^5 + w^{10} - w^{15} \ldots + w^{220})$$

siendo, w, w^2, las raíces cúbicas complejas de la unidad.

Solución:

Transformando cada paréntesis a cocientes notables se tendrá:

$$E = \left(\frac{1 - w^{26}}{1 - w} \right) \left(\frac{1 + w^{225}}{1 + w^5} \right)$$

Transformando las potencias:

$$E = \left[\frac{1 - (w^3)^8 \,.\, w^2}{1 - w}\right]\left[\frac{1 + (w^3)^{75}}{1 + (w^3)\,.\,w^2}\right]$$

como $w^3 = 1$:

$$E = \left[\frac{1 - w^2}{1 - w}\right]\left[\frac{1 + 1}{1 + w^2}\right] = \left[\frac{(1+w)(1-w)}{(1 - w)}\right]\left(\frac{2}{1 + w^2}\right)$$

Como:

$$1 + w + w^2 = 0$$

$$1 + w = -w^2$$

$$1 + w^2 = -w$$

se tendrá:

$$E = \left(\frac{-w^2}{1}\right)\left(\frac{2}{-w}\right)$$

$$E = 2w$$

8.- Calcular el valor de "n", si:

$$(1 - w)^{2n} = -2\,187w$$

siendo w, w^2 las raíces cúbicas completas de la unidad.

Solución:

Desarrollando el cuadrado del primer miembro:

$$(1 + w^2 - 2w)^n = -2\,187w \qquad (1)$$

Como $1 + w + w^2 = 0$:

$$1 + w^2 = -w \qquad (\alpha)$$

También: $w^7 = w$

$$2\,187 = 3^7 \qquad (\beta)$$

Sustituyendo (α) y (β) en (I):

$$(-w - 2w)^n = -3^7w^7$$

$$(-3w)^n = (-3w)^7$$

de aquí:

$$n = 7$$

9.- Si 1, w, w^2 son las tres raíces cúbicas de 1, hallar el valor de n que cumple con la siguiente identidad:

$$(1 + w) + (1 + w^2)^2 + (1 + w^3)^3 + (1 + w^4)^4 + \ldots + (1 + w^{3n})^{3n} = 584$$

Solución:

Como: $1 + w + w^2 = 0$

$$1 + w = -w^2$$

$$1 + w^2 = -w$$

y también: $w^3 = 1$

$$w^{3k} = (w^3)^k = 1$$

$$w^{3k+1} = (w^3)^k \,.\, w = w$$

$$w^{3k+2} = (w^3)^k \,.\, w^2 = w^2$$

Luego, el primer miembro puede escribirse cómo:

$$(-w^2)+(-w)^2+(1 + 1)^3 + (1 + w)^4 + (1 + w^2)^5$$

$$+ (1 + 1)^6 + \ldots + (1 + 1)^{3n} = 584$$

$$-w^2 + w^2 + 2^3 + (-w^2)^4 + (-w)^5 + 2^6 + \ldots + 2^{3n} = 584$$

$$2^3 + w^8 - w^5 + 2^6 + \ldots + 2^{3n} = 584$$

$$2^3 + w^2 - w^2 + 2^6 + \ldots + 2^{3n} = 584$$

Se observa que, de dos en dos se elimina los términos, que son reducidos a w^2; quedando sólo potencias de 2 elevado a un múltiplo de 3. Luego la expresión de primer miembro es:

$$2^3 + 2^6 + 2^9 + \ldots\ldots + 2^{3n} = 584$$

$$2^3(1 + 2^3 + 2^6 + \ldots + 2^{3n-3}) = 584$$

Escribiendo como Cociente Notable:

$$2^3\left(\frac{1 - 2^{3n}}{1 - 2^3}\right) = 584$$

$$\frac{8}{-7}(1 - 2^{3n}) = 584$$

$$1 - 2^{3n} = -511$$

$$512 = 2^{3n}$$

$$2^9 = 2^{3n}$$

identificando exponentes:

$$3n = 9$$
$$n = 3$$

10.- Sabiendo que 1, w, w^2 son las raíces cúbicas de la unidad, calcular el valor de:

$$E = \frac{1 + w^{-1} + w^{-2} + w^{-3} + \ldots + w^{-54}}{1 + \binom{53}{1}w + \binom{53}{2}w^2 + \ldots + \binom{53}{52}w^{52} + w^{53}}$$

Solución:

Transformando el numerador:

$$N = 1 + w^{-1} + w^{-2} + w^{-3} + \ldots + w^{-54}$$

$$N = 1 + \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^3} + \ldots + \frac{1}{w^{54}}$$

$$N = \frac{w^{54} + w^{53} + w^{52} + \ldots + 1}{w^{54}}$$

Escribiendo como Cociente Notable:

$$N = \frac{\dfrac{w^{55} - 1}{w - 1}}{w^{54}}$$

como $w^3 = 1$, se tendrá:

$$N = \frac{\dfrac{(w^3)^{18} \,.\, w - 1}{w - 1}}{(w^3)^{18}} = \frac{\dfrac{w - 1}{w - 1}}{1} = 1$$

Transformando el denominador:

$$D = 1 + \binom{53}{1}w + \binom{53}{2}w^2 + \ldots + \binom{53}{52}w^{52} + w^{53}$$

se puede escribir:

$$D = 1 + C_1^{53}w + C_2^{53}w^2 + \ldots + C_{52}^{53}w^{52} + C_{53}^{53}w^{53}$$

Se observa que es el desarrollo de:

$$D = (1 + w)^{53}$$

como $1 + w + w^2 = 0$:

$$1 + w = -w^2$$

entonces:

$$D = (-w^2)^{53} = -w^{106} = -(w^3)^{35} \,.\, w$$

dado que: $w^3 = 1$:

$$D = -(1)^{35} \,.\, w = -w$$

Sustituyendo en la expresión:

$$E = -\frac{1}{w} \,.\, \frac{w^2}{w^2} = -\frac{w^2}{w^3}$$

$$E = -w^2$$

11.- Sabiendo que $1,w,w^2$ son las raíces cúbicas de 1, calcular:

$$E = (m - n)(wm - w^2n)(w^2m - wn)$$

Solución:

Extrayendo factor común w a los factores segundo y tercero, se obtiene:

$$E = (m-n)\ w\ (m-wn)\ w\ (wm-n),$$

o también:

$$E = w^2(m - n)(m - wn)(wm - n)$$

efectuando los dos factores últimos:

$$E = w^2(m - n)\ [\underline{m^2w} - \underline{\underline{mn}} - \underline{\underline{w^2mn}} + \underline{wn^2}]$$

agrupando en forma conveniente:

$$E = w^2(m - n)\ [w(m^2 + n^2) - mn(1 + w^2)]$$

Como: $1 + w^2 + w = 0$

$\therefore \quad 1 + w^2 = -w$

Sustituyendo:

$$E = w^2(m - n)\ [w(m^2 + n^2) - mn(-w)]$$

$$E = w^2(m - n)\ [w(m^2 + n^2) + mnw]$$

Sacando factor común w:

$$E = w^2(m - n)\ w\ (m^2 + n^2 + mn)$$

$$E = w^3(m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

como $w^3 = 1$:

$$E = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

$$E = m^3 - n^3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de b para que la expresión x sea real:

$$x = \frac{2a + ib}{3 - 2i} + \frac{2a + 3bi}{3 + 2i}$$

a) 1   b) -1   c) 2

d) 0   e) -2

2. Indicar cuál es la forma polar del siguiente complejo:

$$r = \frac{(3 - 3i)\left(2 - 2\sqrt{3}\,i\right)^2}{\left(-3 - \sqrt{3}\,i\right)(4 - 3i)}$$

a) $\frac{8}{5}\sqrt{3}\,(\cos 382° + i \text{ sen } 382°)$

b) $\frac{8}{5}\sqrt{2}\,(\cos 82° + i \text{ sen } 82°)$

c) $\frac{8}{5}\sqrt{6}\,(\cos 382° + i \text{ sen } 382°)$

d) $\frac{8}{5}\sqrt{6}\,(\cos 82° + i \text{ sen } 82°)$

e) Ninguna

3. Si los siguientes cocientes:

$$\frac{a + 2i}{b - 3i} \quad y \quad \frac{b + (a + 8)i}{a + bi}$$

son respectivamente un número real y un número imaginario puro, hallar el valor del primer cociente.

a) $-\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{2}{5}$ e) $-\frac{2}{5}i$

4. Siendo $(1, w, w^2)$ las raíces cúbicas de la unidad, calcular el valor de:

$$R = (5 + 7w + 5w^2)^9 + (3 + 3w - w^2)^3$$

a) 238   b) 228   c) 668

d) 448   e) 558

5. Teniendo presente la igualdad de complejos:

$$(1 + i)^2 + (1 + i)^4 + (1 + i)^6 + (1 + i)^8 = x + yi$$

determinar $P(x,y) = \frac{x + y}{x - y}$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{3}$

6. Dé la suma de los n primeros valores positivos que verifican la siguiente igualdad:

$$\sqrt{\frac{i^{x+1} + i^{x-1}}{i^{x+1} - i^{x-1}}} + \sqrt{\frac{i^{x+1} - i^{x-1}}{i^{x+1} + i^{x-1}}} = 2$$

a) $\frac{n(n + 1)}{2}$ b) $\frac{n(n - 1)}{2}$ c) n^2

d) $n(n + 1)$ e) N.A.

7. Cuál debe ser el valor de b para que se cumpla:

$$(i - 1)^{-1}(i + 1)^{-1} + (i - 1)^{-1}(-1 - i)^{-1} + (i + 1)^{-1}(1 - i)^{-1} = a + bi$$

a) $(-2)^{-1}$ b) -2   c) 2^{-1}

d) 1   e) 0

8. Efectuar:

$$E = \frac{(3 + i)(4 + i)}{11 + 7i} + \frac{(2 + i)(3 + i)}{1 + i} + \frac{(3 + i)(5 + i)}{7 + 4i}$$

a) 6   b) 3 + i   c) 4

d) 2 + i   e) 8

9. Indicar el módulo de:

$$\frac{(2+3i)^3 \sqrt[5]{1-i}}{\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\,i\right)^2 \sqrt[5]{1+i}}$$

a) $\sqrt{13}$ b) $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$ c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{5}/7$

10. Hallar el módulo de un complejo, sabiendo que éste, su conjugado y el origen del plano cartesiano forman un triángulo equilátero; además la suma del complejo con su conjugada es 4.

a) 2 b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

d) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e) 4

11. Siendo $a > 0$, $b > 0$, ¿cuál es el cuadrante donde estará representado el complejo $(a - bi)$ multiplicado por $i + 425$ en el plano de Gauss?

a) 1° cuadrante b) 2° cuadrante

c) 3° cuadrante d) 4° cuadrante

E) Ninguno

12. Indicar el coeficiente del término de primer grado del resto que se obtiene de dividir:

$$(\cos a + x \operatorname{sen} a)^n \div (x^2 + 1)$$

a) cos na b) sen na c) cos a

d) sen a e) -sen a

13. Efectuar:

$$E = \frac{\dfrac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}} + \dfrac{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}}{\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}} + \dfrac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}}$$

a) 1 b) 2 c) $\sqrt{a}$

d) a e) b

14. Señalar la condición que debe cumplir “m” para que la expresión:

$$(x+1)^m + x^m + 1,$$

sea divisible entre $(x^2 + x + 1)^2$.

a) $m = \overset{\circ}{6} + 5$ b) $m = \overset{\circ}{6} + 5$ c) $m = \overset{\circ}{6} + 4$

d) $m = \overset{\circ}{6}$ e) $m = \overset{\circ}{6} + 1$

15. Escribir en forma cartesiana el siguiente complejo:

$$\frac{(\cos 17 + i \operatorname{sen} 17)^3 \left[\sqrt{2}\,(\cos 28 + i \operatorname{sen} 28)\right]^2}{(\cos 7 + i \operatorname{sen} 7)^{11}}$$

a) $\sqrt{3} - i$ b) $i - \sqrt{3}$ c) $i - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{3} + i$ e) $\sqrt{2} + i$

16. Si Z_1 y Z_2 son opuestos, hallar b, siendo:

$$Z_1 = (a-3)i^3 + (b-2)i^2 - ai + 2b$$

$$Z_2 = (b+1)i^3 + (1-a)i^2 + 3i - 1$$

a) 1 b) -1 c) 2

d) -2 e) 3

17. ¿Qué condición debe tener “m” para que el polinomio:

$$(x+1)^m + x^m + 1$$

sea divisible por $(x^2 + x + 1)$?

a) 3k b) 3k - 1 c) 3k + 1

d) 6k + 1 e) 3k + 2

18. Si $x = a + b$; $y = aw + bw^2$; $z = aw^2 + bw$.

Calcular: $E = xyz$.

a) a^3 b) b^3 c) $a^2 + b^2$

d) $a^3 + b^3$ e) $a^3 - b^3$

19. Efectuar:

$$E = (2 + 5w + 2w^2)^3 - (2 + 2w + 5w^2)^3$$

a) 27 b) 54 c) 81

d) 729 e) 9

20. Simplificar:

$$(1 + w - w^2)(1 + w^2 - w^4)(1 + w^4 - w^8)(1 + w^8 - w^{16})$$

… 6n factores.

a) 4 b) 4^{2n} c) 4^{3n}

d) 1 e) 4^n

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) C	3) A	4) D	5) E
6) D	7) A	8) E	9) B	10) C
11) C	12) A	13) B	14) C	15) D
16) A	17) C	18) D	19) B	20) C

ECUACIONES

PRINCIPALES CONCEPTOS

IGUALDAD .- Es la expresión de la equivalencia de dos cantidades.

ECUACIONES EQUIVALENTES

Son ecuaciones que tienen las mismas soluciones; es decir, que las soluciones de una, son también las de la otra.

Ejemplo:

$$4x - 5 = 2x + 13$$

$$x + 3 = 12$$

son ecuaciones equivalentes ya que $x = 9$ es la solución de ambas ecuaciones.

CLASES DE IGUALDADES

A) IGUALDAD ABSOLUTA

Llamada también identidad, o igualdad incondicional. Es aquella que se verifica para cualquier valor numérico de sus letras.

Ejemplos:

i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ii) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

B) IGUALDAD RELATIVA O ECUACIÓN

Llamada también igualdad condicional. Es aquella que se verifica para algunos valores particulares, atribuidos a sus letras, llamadas incógnitas.

Ejemplos:

i) $5x + 2 = 17$; se verifica para $x = 3$

ii) $x^2 - 5x + 6 = 0$; se verifica para $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

Esta se realiza atendiendo:

1) Al grado: Pueden ser de primer grado, segundo grado, tercer grado, etc.

2) A los coeficientes: Pueden ser numéricas o literales.

3) A las incógnitas: Pueden ser de una, dos, tres incógnitas, etc.

4) A las soluciones: Pueden ser compatibles e incompatibles.

a) Compatibles.- Son aquellas que admiten solución y pueden ser, a su vez:

1º Determinadas.- Si admiten un número limitado de soluciones.

2º Indeterminadas.- Si admiten un número ilimitado de soluciones.

b) Incompatibles o absurdas.- Son aquellas que no admiten solución.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LAS IGUALDADES QUE PERMITEN TRANSFORMAR LAS ECUACIONES

1er. PRINCIPIO.- Si a ambos miembros de una ecuación se suma o resta una misma expresión o un mismo número, resulta una ecuación equivalente a la primera.

Ejemplo:

Sea la ecuación A = B donde A y B son el primer y segundo miembro y "m" una cantidad cualesquiera, entonces:

$$A \pm m = B \pm m$$

2do. PRINCIPIO.- Si a ambos miembros de una ecuación se multiplica o divide por un mismo número o por una misma expresión independiente de x($m \neq 0$, $m \neq \infty$) se obtiene una ecuación que es equivalente a la primera.

Ejemplo:

Sea la ecuación: $A = B$

Multiplicando por $m \neq 0$, $m \neq \infty$; se tiene:

$$A \,.\, m = B \,.\, m$$

dividiendo entre $m \neq 0$, $m \neq \infty$; se tiene:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$$

NOTA.- Obsérvese que si m está dependiendo de la incógnita, se obtendrá soluciones extrañas; o sea, soluciones que no pertenecen a la ecuación.

3er. PRINCIPIO.- Si a ambos miembros se una ecuación se eleva a una misma potencia o se extrae una misma raíz, la ecuación que resulta es parcialmente equivalente a la primera.

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$A = B$$

o:

$$A - B = 0$$

Elevando los dos miembros a la "m":

$$A^m = B^m$$

o:

$$A^m - B^m = 0$$

factorizando por cocientes notables:

$$(A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + A^{m-3}B^2 + \ldots + B^{m-1}) = 0$$

de aquí se obtiene:

$$A - B = 0$$

$$A = B$$

y:

$$A^{m-1} + A^{m-2}B + A^{m-3} + B^2 + \ldots + B^{m-1} = 0$$

(Ecuación donde aparecen soluciones extrañas).

En forma análoga, se obtiene para la raíz.

NOTA.- Se denomina soluciones extrañas, a aquellas que se introducen o se pierden en una ecuación al realizar ciertas operaciones.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

Son aquellas que pueden reducirse a la forma:

$$ax + b = 0$$

siendo a y b coeficientes. La solución es:

$$x = -\frac{a}{b}$$

DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN

1) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, se tendrá:

$$x = -\frac{a}{b}$$

2) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, se tendrá: $x = 0$.

3) Si $a = 0$, $b = 0$, se tendrá: x = indeterminada

4) Si $a = 0$, $b \neq 0$; no se tendrá ninguna solución; o, es una ecuación incompatible o absurda.

EJERCICIO RESUELTOS

1.- Resolver:

$$x - \sqrt{x^2 - 8} = 4$$

Solución:

Transponiendo términos para lograr eliminar el radical:

$$x - 4 = \sqrt{x^2 - 8}$$

elevando al cuadrado:

$$(x - 4)^2 = \left(\sqrt{x^2 - 8}\right)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 8$$

$$24 = 8x$$

$$x = 3$$

Para verificar la solución obtenida, se reemplaza este valor en la ecuación propuesta, así:

$$3 - \sqrt{9 - 8} = 3 - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2 \neq 4$$

El valor $x = 3$, no satisface a la ecuación propuesta, luego se trata de una solución extraña. Como no existe otra solución, la solución es incompatible ya que aritméticamente $\sqrt{1} = 1$, pero tambien podría considerarse $\sqrt{1} = -1$

2.- Resolver:

$$\frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 + 8x + 17} = \left(\frac{x - 3}{x + 4}\right)^2$$

Solución:

Desarrollando la potencia:

$$\frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 + 8x + 17} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 16}$$

haciendo un cambio de variable:

$$x^2 - 6x = a$$

$$x^2 + 8x = b$$

se tendrá:

$$\frac{a + 10}{b + 17} = \frac{a + 9}{b + 16}$$

efectuando:

$$(a + 10)(b + 16) = (a + 9)(b + 17)$$

$$ab + 10b + 16a + 160 = ab + 17a + 9b + 153$$

transponiendo y simplificando los términos iguales de ambos miembros:

$$10b - 9b + 16a - 17a = 153 - 160$$

de donde:

$$b - a = -7$$

sustituyendo valores de a y b:

$$(x^2 + 8x) - (x^2 - 6x) = -7$$

simplificando:

$$14x = -7 \quad x = -\frac{7}{14}$$

finalmente:

$$x = -\frac{1}{2}$$

3.- Resolver:

$$\sqrt{x + 11 + 5\sqrt{2x - 3}} + \sqrt{x + 3 + 3\sqrt{2x - 3}} = 9\sqrt{2}$$

Solución:

Multiplicando ambos miembros por $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}\left[\sqrt{x + 11 + 5\sqrt{2x - 3}} + \sqrt{x + 3 + 3\sqrt{2x - 3}}\right] = 9 . 2$$

Efectuando:

$$\sqrt{2x + 22 + 10\sqrt{2x - 3}} + \sqrt{2x + 6 + 6\sqrt{2x - 3}} = 18$$

Transformando los radicales dobles a simples:

$$\sqrt{2x + 22 + 2\sqrt{25(2x - 3)}} + \sqrt{2x + 6 + 2\sqrt{9(2x - 3)}} = 18$$

$$\sqrt{25 + (2x - 3) + 2\sqrt{25(2x - 3)}}$$

$$+ \sqrt{9 + (2x - 3) + 2\sqrt{9(2x - 3)}} = 18$$

$$\sqrt{25} + \sqrt{2x - 3} + \sqrt{9} + \sqrt{2x - 3} = 18$$

$$5 + 3 + 3\sqrt{2x - 3} = 18$$

$$\sqrt{2x - 3} = 5$$

elevando al cuadrado:

$$2x - 3 = 25$$

$$x = \frac{28}{2}$$

finalmente:

$$x = 14$$

4.- Resolver:

$$\frac{\sqrt[n]{2 + x}}{2} = \sqrt[n]{2} - \frac{\sqrt[n]{2 + x}}{x}$$

Solución:

El mínimo común múltiplo de los denominadores es (2x); multiplicando ambos miembros de la ecuación por este valor:

$$\frac{(2x)\sqrt[n]{2+x}}{2} = (2x)\sqrt[n]{2} - \frac{(2x)\sqrt[n]{2+x}}{x}$$

$$x\sqrt[n]{2+x} = (2x)\sqrt[n]{2x} - 2\sqrt[n]{2+x}$$

transponiendo términos, adecuadamente:

$$x\sqrt[n]{2+x} + 2\sqrt[n]{2+x} = (2x)\sqrt[n]{2x}$$

factorizando:

$$(x+2)\sqrt[n]{2+x} = (2x)\sqrt[n]{2x}$$

elevando a la "n":

$$\left[\sqrt[n]{2+x}\,(2+x)\right]^n = \left[(2x)\sqrt[n]{2x}\right]^n$$

efectuando:

$$(2+x)(2+x)^n = (2x)^n(2x)$$

$$(2+x)^{n+1} = (2x)^{n+1}$$

extrayendo raíz "n + 1":

$$2 + x = 2x$$

$\therefore \quad x = 2$

5.- Resolver:

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}$$

Solución:

Escribiendo los numeradores de la siguiente manera:

$$\frac{(x+1)^2+1}{(x+1)} + \frac{(x+4)^2+4}{(x+4)} = \frac{(x+2)^2+2}{(x+2)} + \frac{(x+3)^2+3}{(x+3)}$$

descomponiendo las fracciones en fracciones parciales:

$$\frac{(x+1)^2}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{(x+4)^2}{x+4} + \frac{4}{x+4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)}$$

$$+ \frac{2}{x+2} + \frac{(x+3)^2}{(x+3)} + \frac{3}{(x+3)}$$

simplificando:

$$x + 1 + \frac{1}{x+1} + x + 4 + \frac{4}{x+4}$$

$$= x + 2 + \frac{2}{x+2} + x + 3 + \frac{3}{x+3}$$

reduciendo términos iguales:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+3} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$$

transponiendo adecuadamente:

$$\frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+3} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

Efectuando operaciones en cada miembro:

$$\frac{x}{(x+4)(x+3)} = \frac{x}{(x+2)(x+1)}$$

Eliminado "x"(una solución es x = 0), se obtiene:

$$(x+4)\,(x+3) = (x+2)(x+1)$$

efectuando:

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 2$$

$$4x = -10$$

finalmente:

$$x = -\frac{5}{2}$$

6.- Resolver:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x - 1\right] - 1\right] - 1\right] - 1\right] - 1 = 0$$

Solución:

Efectuando operaciones en el corchete más interior y luego en los externos:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{9}x - \frac{1}{3} - 1\right] - 1\right] - 1\right] - 1 = 0$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{27}x - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1\right] - 1\right] - 1 = 0$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{81}x - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1\right] - 1 = 0$$

$$\frac{1}{243}x - \frac{1}{81} - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 = 0$$

Multiplicando toda la ecuación por 243:

$$x - 3 - 9 - 27 - 81 - 243 = 0$$

despejando x:

$$x = 363$$

7.- Resolver:

$$\frac{1}{ax + n + 1} = \frac{1}{(ax + 1)(ax + 2)} + \frac{1}{(ax + 2)(ax + 3)}$$

$$+ \frac{1}{(ax + 3)(ax + 4)} + \ldots + \frac{1}{(ax + n)(ax + n + 1)}$$

Solución:

Descomponiendo las fracciones en fracciones parciales:

$$\frac{1}{ax + n + 1} = \frac{1}{ax + 1} - \frac{1}{ax + 2} + \frac{1}{ax + 2} - \frac{1}{ax + 3}$$

$$+ \frac{1}{ax + 3} - \frac{1}{ax + 4} + \ldots + \frac{1}{ax + n} - \frac{1}{ax + n + 1}$$

reduciendo la segunda fracción con la tercera, la cuarta con la quinta, y así sucesivamente, se tiene:

$$\frac{1}{ax + n + 1} = \frac{1}{ax + 1} - \frac{1}{ax + n + 1}$$

transponiendo:

$$\frac{2}{ax + n + 1} = \frac{1}{ax + 1}$$

$$2(ax + 1) = ax + n + 1$$

$$ax + n + 1 = 2ax + 2$$

$$ax = n - 1$$

finalmente:

$$x = \frac{n - 1}{a}$$

8.- Resolver:

$$\frac{121(5x^4 + 10x^2 + 1)}{61(x^4 + 10x^2 + 5)} = 2x$$

Solución:

Haciendo transposiciones de términos:

$$\frac{121}{(61) \,.\, (2)} = \frac{x(x^4 + 10x^2 + 5)}{5x^4 + 10x^2 + 1}$$

$$\frac{121}{122} = \frac{x^5 + 10x^3 + 5x}{5x^4 + 10x^2 + 1}$$

Por propiedad de proporciones, se sabe que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$$

aplicando esta propiedad:

$$\frac{121 + 122}{121 - 122} = \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}{x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1}$$

$$\frac{243}{-1} = \frac{(x + 1)^5}{(x - 1)^5}$$

aplicando raíz quinta a ambos:

$$\frac{\sqrt[5]{-243}}{-1} = \left(\frac{x - 1}{x - 1}\right)$$

$$-3 = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$-3x + 3 = x + 1$$

De donde:

$$x = \frac{1}{2}$$

9.- Resolver:

$$\frac{(x - a)\sqrt{x - a} + (x - b)\sqrt{x - b}}{\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b}} = a - b$$

y dar el valor numérico de x cuando:

$$4a - b = 15$$

Solución:

Introduciendo los factores en los radicales:

$$\frac{\left(\sqrt{x - a}\,\right)^3 + \left(\sqrt{x - b}\,\right)^3}{\left(\sqrt{x - a}\,\right) + \left(\sqrt{x - b}\,\right)} = a - b$$

desarrollando por cocientes notables y simplificando:

$$\left(\sqrt{x - a}\,\right)^2 - \left(\sqrt{x - a}\,\right)\left(\sqrt{x - b}\right) + \left(\sqrt{x - b}\right)^2 = a - b$$

$$x - a - \left(\sqrt{x - a}\,\right)\left(\sqrt{x - b}\right) + x - b = a - b$$

reduciendo:

$$2(x - a) = \sqrt{x - a}\ \sqrt{x - b}$$

Elevando al cuadrado y extrayendo raíz cuadrada al paréntesis del primer miembro:

$$2\sqrt{(x-a)^2} = \sqrt{x-a}\ \sqrt{x-b}$$

dividiendo por $\sqrt{x-a}$:

$$2\sqrt{x-a} = \sqrt{x-b} \qquad \text{(I)}$$

Observese que se ha eliminado la solución:

$$x - a = 0, \qquad x = a$$

Elevando al cuadrado (I):

$$4(x-a) = x - b$$

$$x = \frac{4a - b}{3}$$

por dato: $4a - b = 15$:

$\therefore \qquad x = 5$

10.- Resolver:

$$\frac{1}{(x+a)^2 - b^2} + \frac{1}{(x+b)^2 - a^2} = \frac{1}{x^2 - (a+b)^2} + \frac{1}{x^2 - (a-b)^2}$$

Solución:

Factorizando los denominadores:

$$\frac{1}{(x+a+b)(x+a-b)} + \frac{1}{(x+b+a)(x+b-a)}$$

$$= \frac{1}{(x+a+b)(x-a-b)} + \frac{1}{(x+a-b)(x-a+b)}$$

transponiendo términos en forma conveniente:

$$\frac{1}{(x+a+b)(x+a-b)} - \frac{1}{(x+a+b)(x-a-b)}$$

$$= \frac{1}{(x+a-b)(x-a+b)} + \frac{1}{(x+a+b)(x-a+b)}$$

Restando parcialmente, en cada miembro de la ecuación:

$$\frac{x - a - b\ -(x + a - b)}{(x+a+b)(x+a-b)(x-a-b)}$$

$$= \frac{(x+a+b) - (x+a-b)}{(x+a-b)(x+a+b)(x-a+b)}$$

reduciendo los numeradores y simplificando $x + a + b$, de los denominadores, tómese en cuenta que al simplificar esta factor, se ha eliminado la solución:

$$x = -b - a \qquad (1)$$

Que no es solución.

$$\frac{-2a}{(x+a-b)(x-a-b)} = \frac{2b}{(x+a-b)(x-a+b)}$$

simplificando $x + a - b$, igual que la simplificación anterior, se elimina la solución:

$$x = b - a \qquad (2)$$

Que no es solución.

$$\frac{-a}{x-a-b} = \frac{b}{x-a+b}$$

$$-a(x - a + b) = b(x - a - b)$$

$$-ax + a^2 - ab = bx - ba - b^2$$

$$a^2 + b^2 = x(a + b)$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \qquad (3)$$

Luego, la solución es:

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

igualmente: $x = -a - b$

No es solución, porque no verificar la igualdad relativa.

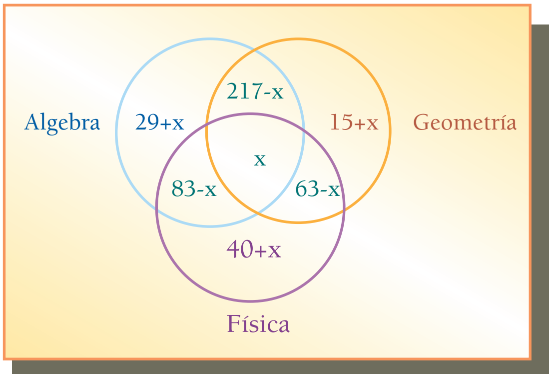
Del mismo modo: $x = b - a$ No es solución.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- En cierto Instituto, estudian 500 postulantes en el ciclo intensivo. De éstos, 329 dominan Álgebra; 186, Física; 295, Geometría; 83, Algebra y Física; 217, Algebra y Geometría; y 63, Física; y Geometría. Hallar el número de alumnos que dominan 3 cursos.

Solución:

Supongamos que “x” es el número de alumnos que dominan los tres cursos a la vez; luego, de acuerdo al problema se puede plantear el siguiente gráfico.



Postulantes que dominan sólo Algebra:

$$329 - (217 - x + x + 83 - x) = 29 + x$$

Postulantes que dominan sólo Física:

$$186 - (83 - x + x + 63 - x) = 40 + x$$

Postulantes que dominan sólo Geometría:

$$295 - (217 - x + x + 63 - x) = 15 + x$$

De acuerdo con el problema, los postulantes de la Academia son en total 500.

Luego:

$$29 + x + 217 - x + 83 - x + x + 15 + x + 63 - x + 40 + x = 500$$

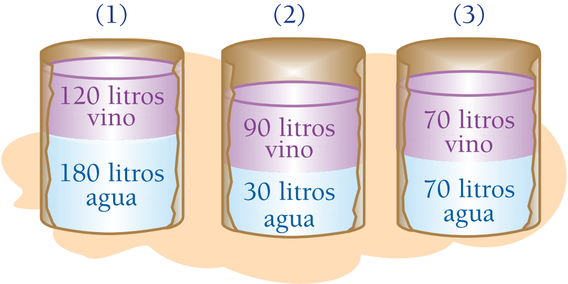
reduciendo y despejando x:

Dominan los tres cursos:

$$x = 51 \text{ alumnos.}$$

2.- Un barril contiene 120 litros de vino y 180 litros de agua; un segundo barril contiene 90 litros de vino y 30 litros de agua. ¿Cuántos litros debe tomarse de cada uno de los barriles para formar una mezcla homogénea que contenga 70 litros de agua y 70 litros de vino?

Solución:



Supongamos que se extrae “x” litros del barril (1), del segundo barril se debe extraer 140-x litros, ya que la mezcla a formarse debe tener 140 litros.

Del primer barril se extrae:

$$(\text{x litros de mezcla})\left(\frac{120 \text{ litros vino}}{300 \text{ litros mezcla}}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \text{ x litros de vino.}$$

Del segundo barril se extrae:

$$[(140 - x)\text{litros mezcla}]\left[\frac{90 \text{ litros vino}}{120 \text{ litros mezcla}}\right]$$

$$= \frac{3}{4}\ (140 - x) \text{ litros de vino}$$

La mezcla a formarse, debe tener 70 litros de vino. Por lo tanto:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}(140 - x) = 70$$

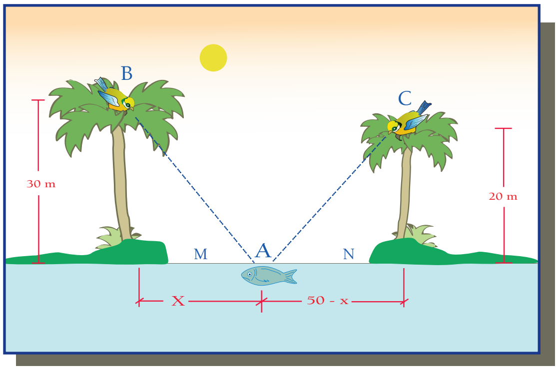
de donde: $x = 100$

100 litros del primer barril y

40 litros del segundo barril.

3.- En ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una es de 30 metros y la de la otra de 20. La distancia entre sus troncos, 50 metros. En la copa de cada palmera hay un pájaro, ellos vuelan a la misma velocidad. De súbito, los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

Solución:



En la figura, aplicando el Teorema de Pitágoras, el triángulo rectángulo BMA:

$$\overline{AB}^2 = 30^2 + x^2$$

En el triángulo rectángulo CNA:

$$\overline{AC}^2 = 20^2 + (50 - x)^2$$

Pero $\overline{AB} = \overline{AC}$, por cuanto los pájaros vuelan a la misma velocidad, luego estas distancias son iguales.

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2$$

efectuando:

$$900 + x^2 = 400 + 2\,500 - 100x + x^2$$

$$100x = 2\,000$$

$$x = 20$$

Rpta.: El pez apareció a 20 metros de la palmera que tenía 30 metros de altura.

4.- ¿A qué hora, entre las 3 y las 4 las agujas de un reloj forman por segunda vez un ángulo recto?

Solución:

Para resolver este tipo de problemas, se debe tener en cuenta la siguiente relación:

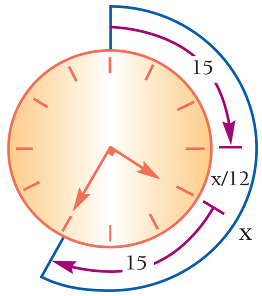
Horario: velocidad como 5 en un hora

Minutero: velocidad como 60 en una hora

Dividiendo la esfera del reloj en 60 partes o minutos; en un mismo instante, el espacio recorrido por el horario es 1/12 del espacio recorrido por el minutero.

Sea "x" en minutos, el espacio recorrido por el minutero, desde las 12 hasta que forma ángulo recto con el horario, después de las 3; en este tiempo, el horario habrá recorrido x/12, espacio recorrido desde las 3 hasta el punto donde se forma el ángulo de 90 grados.

Cuando las agujas del reloj forman un ángulo recto, el espacio comprendido entre éstas, es la cuarta parte del total de la esfera, es decir 15 minutos, 15 partes o divisiones



Del gráfico: $x = 15 + \dfrac{x}{12} + 15$

$$x - \frac{x}{12} = 30$$

$$\frac{11x}{12} = 30$$

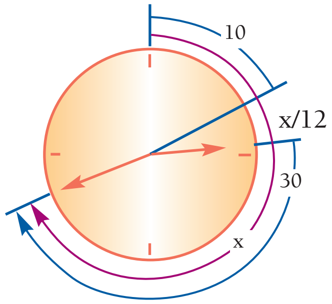
$$\therefore \quad x = \frac{360}{11} = 32\,\frac{8}{11}$$

Hora:3 horas $32\,\frac{8}{11}$ minutos.

5.- ¿A qué hora entre las 2 y las 3, el horario y el minutero estarán en direcciones opuestas?

Solución:

Cuando las agujas del reloj estan en direcciones opuestas, el espacio comprendido entre éstas es la mitad del total de las esfera es decir 30 minutos.



Sea "x", en minutos, el espcio recorrido por el minutero, desde la 12 hasta que se encuetra en dirección opuesta al horario, desde las 2; en este tiempo el horario habrá recorrido x/12, medido desde las 2.

Del gráfico: $x = 10 + \dfrac{x}{12} + 30$

$$x - \frac{x}{12} = 40$$

$$\frac{11x}{12} = 40$$

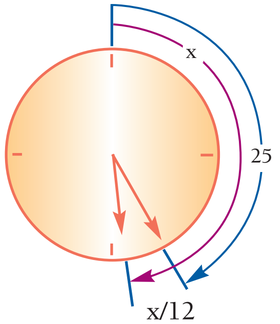
$$x = \frac{480}{11} = 43\,\frac{7}{11}$$

Hora: 2horas $43\,\frac{7}{11}$ minutos

6.- ¿Qué hora es entre las 5 y las 6, cuando el minutero encuentra al horario?

Solución:

Cuando el horario y el minutero coinciden, el espacio comprendido entre éstos es igual a cero ya que no hay separación entre ellos.



Sea "x" el espacio recorrido por el minutero, en el mismo tiempo, el horario habrá recorrido: x/12.

Del gráfico:

$$x = \frac{x}{12} + 25$$

$$x - \frac{x}{12} = 25$$

$$\frac{11x}{12} = 25$$

$$x = \frac{300}{11} = 27\,\frac{3}{11}$$

Hora: 5 horas $27\,\frac{3}{11}$ minutos.

7.- Averiguar en qué día y hora del mes de abril de 1 952 (año bisiesto) se verificó que la fracción transcurrida del mes fue igual a la fracción transcurrida del año.

Solución:

Por ser el año bisiesto, el mes de febrero tiene 29 días y el año 366 días.

Sea x los días transcurridos del mes de abril. El número total de días transcurridos del año será:

Enero	:	31
Febrero	:	29
Marzo	:	31
Abril	:	x
Total días	:	x + 91

De los 30 días que tiene el mes de abril, han transcurrido x días, luego la fracción transcurrida del mes será:

$$\frac{x}{30} \qquad \text{(I)}$$

De los 366 días que tiene el año, han transcurrido (x+91) días, luego la fracción transcurrida del año será:

$$\frac{x+91}{366} \qquad \text{(II)}$$

Por condición, (I) y (II) son iguales:

$$\frac{x}{30} = \frac{x+91}{366}$$

de donde:

$$x = \frac{2\,730}{336} = 8\,\frac{1}{8} \text{ días}$$

Transformando:

$\frac{1}{8}$ de día en horas = $\frac{1}{8}$ x 24 = 3 horas.

$\therefore$ x = 8 días y 3 horas

Luego, han transcurrido 8 días y 3 horas.

Rpta.:El día buscado será el 8 de abril a las 3 horas.

8.- ¿Qué día del año marcará la hoja de un almanaque cuando el número de hojas arrancadas exceda en 2 a los 3/8 del número de hojas que quedan?

(El año no es bisiesto).

Solución:

El año no bisiesto tiene 365 dias, por tener en el mes de febrero sólo 28 días.

Sea "x" el número de hojas arrancadas.

Luego (365 - x) representa el número de hojas por arrancar.

Por condición:

$$x - \frac{1}{8}(365 - x) = 2$$

$$8x - 1\,095 + 3x = 16$$

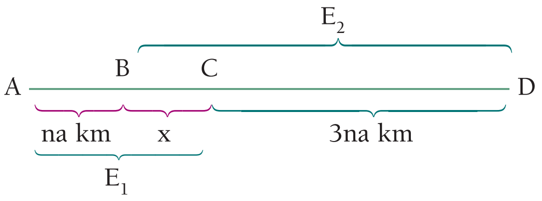
$$x = 101$$

Se arrancó 101 hojas, de las cuales corresponden al mes de enero 31; a febrero 28; a marzo 31; en total 90 días. El resto corresponde al mes de abril que son 101 - 90 = 11 días, y que es el número de hojas arrancadas en el mes de abril. El día que marcará el almanaque será el 12 de abril.

9.- Dos móviles van en el mismo sentido. La velocidad de uno es "n" veces la velocidad del otro. Si en un determinado momento la ventaja es "na" kilómetros y después de 2 horas se ha triplicado la ventaja. ¿Cuál es la menor velocidad?.

Solución:

Sea A el punto donde se encuentra el automóvil menos veloz y B el punto donde se halla el automóvil más veloz. Sea: "E_1" el recorrido del primer automóvil y "E_2" el recorrido del segundo automóvil. El primero se halló en el punto C y el segundo en el punto D.



Sea la velocidad del automóvil que parte de A igual a $V_A = V$, y $V_B = nV$ la velocidad del automóvil que parte de B.

Sea "x" la distancia entre B y C; del gráfico se plantea:

$$E_2 = x + 3na = (nV)(2) = 2nV \qquad (1)$$

ya que han transcurrido 2 horas, y el espacio es igual a velocidad por tiempo:

$$E_1 = na + x = (V)(2) = 2V \qquad (2)$$

Por la misma razón.

$$x = 2nV - 3na \qquad (a)$$

de (1) y (2):

$$x = 2V - na \qquad (b)$$

Si: $(\alpha) = (\beta)$:

$$2nV - 3na = 2V - na$$

de donde:

$$V = \frac{na}{n - 1}$$

Rpta.: La menor velocidad es $\dfrac{na}{n - 1} \cdot \dfrac{km}{h}$

10.- De un depósito que contiene 729 litros de un ácido puro se ha extraído "a" litros y se ha rellenado con agua. Después del mezclado se ha extraído nuevamente "a" litros de la solución y se ha rellenado con agua, revolviendo la mezcla escrupulosamente. Después de repetir 6 veces tales operaciones, el líquido del depósito contenía 64 litros de ácido puro. Determinar el valor de "a".

Solución:

Después que se extrajo del depósito por vez primera "a" litros de ácido puro y se repuso con agua, en éste quedó,"729 - a" litros de ácido puro. Es evidente que un litro de la solución ahora contiene:

$$\left(\frac{729 - a}{729}\right) \text{ litros de ácido puro.}$$

En la segunda vez, se extrae del depósito:

$$a \cdot \left(\frac{729 - a}{729}\right) \text{ litros de ácido}$$

y en éste queda:

$$729 - a - a \cdot \left(\frac{729 - a}{729}\right) = \frac{(729 - a)^2}{729} \text{ litros de ácido.}$$

Por consiguiente, al reponer la solución con agua por segunda vez, un litro de la nueva solución contiene:

$$\frac{(729-a)^2}{729} \div 729 = \frac{(729-a)^2}{729^2} \text{ litros de ácido.}$$

Por lo tanto, la tercera sustracción disminuye la cantidad de ácido en el depósito en:

$$a\ .\ \frac{(729-a)^2}{729^2} \text{ litros.}$$

es decir, después de la tercera operación queda:

$$\frac{(729-a)^2}{729} - a \cdot \frac{(729-a)^2}{729^2} = \frac{(729-a)^3}{729^2} \text{ litros de ácido.}$$

No es difícil notar, que la cantidad de ácido en el depósito, después de la sexta operación, será igual a:

$$\frac{(729-a)^6}{729^5} \text{ litros}$$

Y por dato se tiene que:

$$\frac{(729-a)^6}{729^5} 64$$

se observa que:

$$64 = 2^6$$

$$729 = 3^6$$

$$\therefore\ (729-a)^6 = 2^6\,.(3^6)^5 = 2^6\,.3^{30}$$

Extrayendo raíz sexta a ambos miembros:

$$729 - a = 2\ .\ 3^5 = 486$$

$$a = 729 - 486 = 243$$

Por lo tanto en cada operación se extrajo $a = 243$ litros.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver la ecuación:

$$\frac{(5x^4+10x^2+1)\ \ (5a^4+10a^2+1)}{(x^4+10x^2+5)(a^4+10a^2+5)} = ax$$

a) a b) $\frac{1}{a}$ C) a^2

d) a^4 e) a^{-2}

2. Si $(a-1)^n = a(a+1)^{n-1}$, calcular "x":

$$\frac{\sqrt[n]{ax+1} + \sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{ax+1} - \sqrt[n]{ax}} = a$$

a) a b) a^n c) a^{-n}

d) 1 e) $\frac{a}{n}$

3. Resolver:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+a} + \frac{1}{\sqrt{x}+b} = \frac{1}{\sqrt{x}-a} + \frac{1}{\sqrt{x}-b}$$

a) $a + b$ b) $a - b$ c) $\frac{a}{b}$

d) $\frac{b}{a}$ e) ab

4. Resolver:

$$\frac{(a+x)\ \sqrt[4]{a-x} + (a-x)\ \sqrt[4]{a+x}}{\sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x}} = a$$

a) a b) $\frac{1}{a}$ c) $2a$

d) 0 e) $-a$

5. Resolver:

$$\sqrt{(x+a)\ (x^2+a)} + 2\sqrt{(x-a)(x^2-a^2)}$$
$$= 2\sqrt{(x^2+a)(x-a)} + \sqrt{(x+a)^2\ (x-a)}$$

a) Imposible b) $5a$ c) $\frac{5a}{3}$

d) $\frac{3a}{5}$ e) $2a$

6. Resolver:

$$\frac{(a+b+c+x)\,(a+b+c+1)-x}{(a+x+c+b)\,(a+b+x-d)-cd}=\frac{a+b+c+x-1}{x+a+b+c-d}$$

a) 1 b) a c) b

d) c e) a + b + c

7. Resolver:

$$\frac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)}-\frac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)}=\frac{5}{84}$$

a) 10 b) 25 c) 15

d) 18 e) 12

8. Resolver:

$$\frac{\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{c}{d}\right)x}{\frac{a}{b}-\frac{c+d}{c-d}}-\frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}+\frac{c+d}{c-d}}=\frac{\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{c}{d}\right)x}{\frac{a}{b}+\frac{c+d}{c-d}}-\frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}-\frac{c+d}{c-d}}$$

a) -1 b) a c) b

d) c e) a + b + c

9. Resolver:

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c$$

a) ab + ac b) ab + ac + bc c) ac

d) ab e) 1

10. Resolver: $\dfrac{(x-1)x}{4}=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

a) 0 b) 1 c) 4

d) 3 e) 2

11. Jorge y Rosario segaron una huerta en cierto tiempo, si cada uno hubiera segado la mitad, Jorge habría trabajado cinco días menos, mientras Rosario hubiera trabajado siete días más. ¿En cuánto tiempo segaron la huerta Jorge y Rosario?

a) 7 días b) 35 días

c) 12 días d) 14 días

e) 10 días

12. Una vía de tren eléctrico de 8 km de longitud, está recorrida en 2 sentidos por vehículos que parten cada 10 minutos y marchan a 10 km/h. La primera salida ha sido simultáneamente de A a B a las seis de la mañana. Un peatón parte de A a las 8 y cuarto hasta B con velocidad de 4 km/h., hallar el número de trenes que encontrará en su recorrido.

a) 18 b) 14 c) 16

d) 12 e) 19

13. El latón es un aleación de cobre y zinc; el bronce es una aleación de Cu, Zn y Sn, el bronce es una aleación que contiene el 80% de cobre, 4% de zinc y 16% de estaño. Analizando una masa fundida de latón y bronce vemos que contiene 74% de cobre, 16% de zinc y 10% de estaño. Hallar la razón del cobre al zinc en la composición del latón.

a) $\frac{9}{16}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{16}{9}$

d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{9}{14}$

14. Un negociante de terrenos compra una propiedad a razón de S/. 5 000.00 la hectárea; una vez que ha realizado el negocio se da cuenta que el terreno tiene 8 áreas menos, pero ya no existe lugar a reclamo; sin embargo vende el terreno a S/. 60,00 el área (contenida exactamente) y gana así el 12% de su inversión. ¿Cuántas áreas media el terreno?

a) 108 b) 212 c) 112

d) 180 e) 190

15. ¿Cuántos litros de alcohol al 90% habrá que mezclarlos con alcohol al 70% para obtener 10 litros de solución de alcohol al 85%?

a) 7 litros b) 7,5 litros

c) 6 litros d) 6,5 litros e) 9 litros

16. Cuando marchaba a lo largo de una línea de tren observé que cada 11 minutos me alcanzaba uno de esos vehículos, y cada 4 minutos otro de ellos pasaba en dirección contraria. Tanto los vehículos como yo nos desplazábamos con velocidad constante. ¿Cada cuántos minutos salían los trenes de las estaciones terminales?

a) 4 min b) 12 min c) 8 min

d) 6 min e) 10 min

17. El barco explorador recibió la orden de hacer el reconocimiento en la dirección que llevaba la escuadra. Tres horas después, la nave debía incorporarse a la escuadra. ¿Al cabo de cuánto tiempo, a partir del momento en que se distancia de la escuadra, debe iniciar el barco explorador el regreso, si su velocidad es de 60 nudos, y la de la escuadra de 40 nudos?

a) 2h b) 3 h c) $2\frac{1}{2}$ h

d) $3\frac{1}{2}$ h e) 4 h

18. Un corredor da una vuelta circular cada 40 seg. Otro corredor recorre la pista en sentido contrario y se cruza con el anterior cada 15 seg. ¿Cuántos segundos emplea el segundo corredor en cada vuelta a la pista?

a) 20 s b) 15 s c) 22 s

d) 17 s e) 24 s

19. Un escolar encola de nuevo todos sus sellos en otro álbum. Si pega 20 sellos en cada hoja, entonces no le alcanzará el albúm; si pega 28 sellos, le sobrará, por lo menos, una hoja vacía. Y si al escolar se le regala igual álbum con 21 sellos, en cada hoja al escoger tendrá 500 sellos. ¿Cuántas hojas tiene el álbum?

a) 10 hojas b) 15 hojas

c) 12 hojas d) 16 hojas e) 17 hojas

20. ¿En cuántas posiciones pueden coincidir el horario y el minutero de un reloj que marche normalmente?

a) 12 b) 11 c) 10

d) 143 e) 144

CLAVE DE RESPUESTAS

1) B	2) D	3) E	4) D	5) E
6) E	7) B	8) A	9) B	10) C
11) B	12) C	13) D	14) C	15) B
16) D	17) C	18) E	19) C	20) B

SISTEMA DE ECUACIONES

Se denomina sistema de ecuaciones a un conjunto de ellas que se verifica para un mismo valor de las incógnitas.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Son aquellas cuyas ecuaciones son de primer grado.

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos o más sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Es un conjunto de valores de las letras llamadas incógnitas, que al sustituir por estos valores en las ecuaciones, todas se transforman en identidades.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

De acuerdo a las soluciones se clasifican en:

(a) Compatibles:

Cuando el sistema tiene soluciones. Pueden ser:

a_1)Determinados.- Si el número de soluciones es limitado.

a_2)Indeterminados.- Si el número de soluciones es ilimitado.

(b) Incompatibles:

Cuando el sistema no tiene ninguna solución.

En general:

1) Son sistemas determinados: cuando tienen igual número de ecuaciones que de incógnitas.

2) Son sistemas indeterminados: cuando tienen más incógnitas que ecuaciones.

3) Imposibles: cuando tienen más ecuaciones que incógnitas.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES PARA LA TRANSFORMACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

PRIMER PRINCIPIO

Si en un sistema de ecuaciones se sustituye una de ellas por la que resulta de sumarla o restarla miembro a miembro con otra u otras cualquiera de las restantes, el sistema obtenido es equivalente al dado.

SEGUNDO PRINCIPIO

Si en un sistema de ecuaciones se sustituye una de ellas por la que resulta de sumarla o restarla miembro a miembro, con la combinación lineal de una y otras cualquiera de las restantes, el sistema obtenido será equivalente al propuesto.

TERCER PRINCIPIO

Un sistema de ecuaciones se transforma en otro al sustituir una de ellas por la ecuación obtenida multiplicándola miembro a miembro por otra o producto de otras, o bien dividiéndola miembro a miembro por otra o producto de otras, siempre que ninguna de las soluciones del primer sistema anule a los miembros de la última o últimas ecuaciones.

MÉTODOS DE ELIMINACIÓN Y RESOLUCIÓN

Son muy variados, entre los más elementales se encuentran los siguientes:

1) Sustitución

2) Igualación

3) Reducción

Se explica estos métodos con el siguiente sistema:

Resolver:

$$2x + 5y = 26 \qquad \text{(I)}$$

$$3x - 4y = -7 \qquad \text{(II)}$$

1) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

De una de las ecuaciones se despeja una de las incógnitas en función de la otra y el resultado se sustituye en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación con una sola incógnita.

El valor obtenido de esta ecuación se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones del sistema para obtener el valor de la otra incógnita.

Así de (I):

$$x = \frac{26 - 5y}{2} \qquad (\alpha)$$

Sustituyendo en (II):

$$3\left(\frac{26 - 5y}{2}\right) - 4y = -7$$

$$78 - 15y - 8y = -14$$

$$92 = 23y$$

$$y = 4$$

Sustituyendo este valor en (α):

$$x = \frac{26 - 5(4)}{2}$$

$$x = 3$$

Rpta.: $x = 3$

$y = 4$

2) MÉTODO DE IGUALACIÓN

De las ecuaciones del sistema se despeja el valor de la misma incógnita en función de la otra y se igualan ambos resultados, obteniéndose una ecuación con una incógnita. El valor obtenido de esta ecuación se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones del sistema para determinar el valor de la otra incógnita. Con el mismo ejemplo:

De (I):

$$x = \frac{26 - 5y}{2} \qquad (\alpha)$$

De (II):

$$x = \frac{-7 + 4y}{3} \qquad (\beta)$$

(α) = (β):

$$\frac{26 - 5y}{2} = \frac{-7 + 4y}{3}$$

$$78 - 15y = -14 + 8y$$

$$92 = 23y$$

$$y = 4$$

reemplazando en (α):

$$x = \frac{26 - 5(4)}{2} = 3$$

Rpta.: $x = 3$

$y = 4$

3) MÉTODO DE REDUCCIÓN

Consiste en buscar que la incógnita a eliminar tenga el mismo coeficiente, para lo cual se multiplica cada ecuación por el coeficiente que tenga la incógnita en la otra, sumando o restando las dos ecuaciones obtenidas, según tengan los coeficientes de las incógnitas a eliminar signos contrarios o iguales. Con el mismo ejemplo:

(I) por 4:

$$8x + 20y = 104$$

(II) por 5:

$$15x - 20y = -35$$

Sumando miembro a miembro:

$$23x = 69$$

$$x = 3$$

Sustituyendo en (I):

$$2(3) + 5y = 26$$

$$y = 4$$

Rpta.: $x = 3$

$y = 4$

NOTA IMPORTANTE.- El método más práctico y rápido es el de reducción y se aplicará en la solución de los ejercicios.

Otros métodos:

- Coeficientes indeterminados o método de Bezout.
- Determinantes: Regla de Cramer.
- Método gráfico.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver:

$$5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3 \qquad \text{(I)}$$

$$25x - 9y = 81 \qquad \text{(II)}$$

Solución:

Sustituyendo en (II) lo siguiente:

$$25x = \left(5\sqrt{x}\right)^2$$

$$9y = \left(3\sqrt{y}\right)^2$$

La ecuación toma la forma:

$$\left(5\sqrt{x}\right)^2 - \left(3\sqrt{y}\right)^2 = 81$$

factorizando la diferencia de cuadrados:

$$\left(5\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)\left(5\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right) = 81 \qquad \text{(III)}$$

pero por (I): $5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3$

Sustituyendo en (III):

$$3\left(5\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right) = 81$$

$$5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 27 \qquad \text{(IV)}$$

Sumando la ecuación (I) y (IV):

$$10\sqrt{x} = 30$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9$$

Sustituyendo este valor en (I):

$$5(3) - 3\sqrt{y} = 3$$

$$12 = 3\sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} = 4$$

$$y = 16$$

Rpta.: $x = 9$

$y = 16$

2.- Resolver:

$$\sqrt[3]{x + y + 2} - \sqrt{2x - 3y - 7} = -3 \qquad \text{(I)}$$

$$2\sqrt[3]{x + y + 2} + 3\sqrt{2x - 3y - 7} = 14 \qquad \text{(II)}$$

Solución:

Haciendo que:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3]{x + y + 2} &= a \\ \sqrt{2x - 3y - 7} &= b \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

el sistema toma la forma:

$$a - b = -3 \qquad (\text{I}^{\text{I}})$$

$$2a + 3b = 14 \qquad (\text{II}^{\text{I}})$$

aplicando reducción, para lo cual:

(I^{I}) por 3: $3a - 3b = -9$

(II^{I}) por 1: $2a + 3b = 14$

Sumando miembro a miembro:

$$5a = 5$$

$$a = 1$$

sustituyendo en (I^{I}):

$$1 - b = -3$$

$$b = 4$$

Sustituyendo en (α):

a) $\sqrt[3]{x + y + 2} = 1$

$$x + y + 2 = 1$$

$$x + y = -1 \qquad \text{(III)}$$

b) $\sqrt{2x - 3y - 7} = 4$

$$2x - 3y - 7 = 16$$

$$2x - 3y = 23 \qquad \text{(IV)}$$

Resolviendo (III) y (IV) por reducción:

(III) por 3: $3x + 3y = -3$

(IV) por 1: $2x - 3y = 23$

Sumando miembro a miembro:

$$5x = 20$$
$$x = 4$$

Sustituyendo en (III):

$$4 + y = -1$$
$$y = -5$$

Rpta.: $x = 4$

$y = -5$

3.- Resolver:

$$\frac{2}{3x + y - 2} + \frac{3}{4x + y + 1} = -\frac{7}{24} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{2}{3x + y - 2} - \frac{3}{4x + y + 1} = -\frac{7}{24} \quad \text{(II)}$$

Solución:

Haciendo que:

$$\frac{1}{3x + y - 2} = a$$

$$\frac{1}{4x + y + 2} = b$$

El sistema toma la forma:

$$2a + 3b = -\frac{7}{24} \qquad \text{(A)}$$

$$a - 2b = -\frac{7}{12} \qquad \text{(B)}$$

Aplicando reducción, para lo cual:

(A) por 1: $\quad 2a + 3b = -\frac{7}{24}$

(B) por -2: $\quad -2a + 4b = +\frac{7}{12}$

Sumando miembro a miembro:

$$7b = \frac{14}{12} - \frac{7}{24} = \frac{28 - 7}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$b = \frac{1}{8}$$

Sustituyendo en (A):

$$2a + 3\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{7}{24}$$

de donde: $a = -\frac{1}{3}$

Reemplazando estos valores en las definiciones de a y b:

a) $\dfrac{1}{3x + y - 2} = -\dfrac{1}{3}$

$$3x + y -2 = -3$$

$$3x + y = -1 \qquad \text{(III)}$$

b) $\dfrac{1}{4x + y + 1} = \dfrac{1}{3}$

$$4x + y + 1 = 8$$

$$4x + y = 7 \qquad \text{(IV)}$$

Resolviendo (III) y (IV) por reducción:

(III) por -1: $\quad -3x - y = 1$

(IV) por 1: $\quad 4x + y = 7$

Sumando miembro a miembro:

$$x = 8$$

Sustituyendo en (III):

$$3(8) + y = -1$$
$$y = -25$$

Rpta.: $x = 8$

$y = -25$

4.- Resolver:

$$\frac{1}{2\sqrt{x - y}} - \frac{1}{2\sqrt{x + y}} = \frac{1}{15} \qquad \text{(A)}$$

$$15\sqrt{x + y} + 15\sqrt{x - y} = 8\sqrt{x^2 - y^2} \quad \text{(B)}$$

Solución:

Extrayendo factor común a la ecuación (A):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x - y}} - \frac{1}{\sqrt{x + y}}\right) = \frac{1}{15}$$

así: $\frac{1}{\sqrt{x-y}} - \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{15}$ (I)

Dividiendo (B) por:

$$15\sqrt{x^2-y^2} = 15\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}$$

se obtiene:

$$\frac{15\sqrt{x+y}}{15\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}} + \frac{15\sqrt{x-y}}{15\sqrt{x-y}\sqrt{x+y}}$$

$$= \frac{8\sqrt{x^2-y^2}}{15\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}}$$

simplificando:

$$\frac{1}{\sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{8}{15} \qquad \text{(II)}$$

Aplicando el método de reducción a (I) y (II), sumando miembro a miembro:

$$\frac{2}{\sqrt{x-y}} = \frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-y}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{x-y} = 3$$

$$x - y = 9 \qquad \text{(III)}$$

Sustituyendo en (II):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{8}{15} - \frac{1}{3} = \frac{8-5}{15}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{x+y} = 5$$

$$x + y = 25 \qquad \text{(IV)}$$

Sumando miembro a miembro (III) y (IV):

$$2x = 34$$

$$x = 17$$

Sustituyendo en (IV):

$$17 + y = 25$$

$$y = 8$$

5.- Resolver:

$$\frac{m}{x-a} + \frac{n}{y-b} = \frac{m-n}{b-a} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{r}{x-a} + \frac{s}{y-b} = \frac{r+s}{b-a} \qquad \text{(II)}$$

Solución:

Aplicando el Método de Reducción:

(I) por "s":

$$\frac{ms}{x-a} + \frac{ns}{y-b} = \frac{ms-ns}{b-a}$$

(II) por "n":

$$\frac{nr}{x-a} + \frac{ns}{y-b} = \frac{nr+ns}{b-a}$$

Sumando miembro a miembro:

$$\frac{ms}{x-a} + \frac{nr}{x-a} = \frac{ms-ns}{b-a} + \frac{nr+ns}{b-a}$$

$$\frac{ms+nr}{x-a} = \frac{ms-ns+nr+ns}{b-a}$$

$$\frac{ms+nr}{x-a} = \frac{ms+nr}{b-a}$$

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{b-a}$$

$$x - a = b - a$$

$$x = b$$

Sustituyendo en (I):

$$\frac{m}{b-a} + \frac{n}{y-b} = \frac{m-n}{b-a}$$

$$\frac{n}{y-b} + \frac{m-n}{b-a} = \frac{m}{b-a}$$

$$\frac{n}{y-b} = -\frac{n}{b-a}$$

$$y - b = -b + a$$

Rpta.: $x = b \quad y = a$

6.- Resolver:

$$xy + x + y = 23$$

$$xz + x + z = 41$$

$$yz + y + z = 27$$

Solución:

Transformando cada ecuación, sumando "1" a ambos miembros con la finalidad de factorizar:

1) $xy + x + y + 1 = 23 + 1$

agrupando:

$$x(y + 1) + (y + 1) = 24$$

$$(y + 1)(x + 1) = 24 \qquad \text{(I)}$$

2) $xz + x + z + 1 = 41 + 1$

$$x(z + 1) + (z + 1) = 42$$

$$(z + 1)(x + 1) = 42 \qquad \text{(II)}$$

3) $yz + y + z + 1 = 27 + 1$

$$y(z + 1) + (z + 1) = 28$$

$$(z + 1)(y + 1) = 28 \qquad \text{(III)}$$

Multiplicando miembro a miembro (I), (II) y (III):

$$(x + 1)^2 (y + 1)^2 (z + 1)^2 = 24 \,.\, 42 \,.\, 28$$

extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros:

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 7 \,.\, 8 \,.\, 3 \quad \text{(IV)}$$

dividiendo, miembro a miembro (IV) por (I):

$$\frac{(x + 1)(y + 1)(z + 1)}{(y + 1)(x + 1)} = \frac{7 \,.\, 8 \,.\, 3}{24}$$

$$(z + 1) = 7$$

$$z = 6$$

sustituyendo en (III):

$$(7)(y + 1) = 28$$

$$y + 1 = 4$$

$$y = 3$$

sustituyendo en (I):

$$(4)(x + 1) = 24$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 5$$

Rpta.: $x = 5$
$y = 3$
$z = 6$

7.- Resolver:

$$xy - (a - 1)(x + y) = 2a - 1 \qquad \text{(I)}$$

$$yz - (b - 1)(y + z) = 2b - 1 \qquad \text{(II)}$$

$$xz - (c - 1)(x + z) = 2x - 1 \qquad \text{(III)}$$

Solución:

Efectuando operaciones en (I):

$$xy - a(x + y) + (x + y) = 2a - 1$$

$$xy + x + y + 1 = 2a + a(x + y)$$

factorizando:

$$x(y + 1) + (y + 1) = a(2 + x + y)$$

$$(x + 1)(y + 1) = a(x + y + 2)$$

$$\frac{1}{a} = \frac{x + y + 2}{(x + 1)(y + 1)}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{(x + 1) + (y + 1)}{(x + 1)(y + 1)} = \frac{x + 1}{(x + 1)(y + 1)} + \frac{y + 1}{(x + 1)(y + 1)}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} \qquad \text{(I)}_1$$

En forma análoga con (II) y (III):

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{y + 1} + \frac{1}{z + 1} \qquad \text{(II)}_1$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{z+1} \qquad (III)_1$$

Sumando miembro a miembro a $(I)_1$, $(II)_1$ y $(III)_1$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc + ac + ba}{abc}\right) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \quad (IV)_1$$

Sustituyendo $(I)_1$ en (IV):

$$\frac{1}{z+1} + \frac{1}{a} = \frac{bc + ac + ba}{2abc}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{bc + ac + ba}{2abc} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{bc + ac + ba - 2bc}{2abc} = \frac{ba + ac - bc}{2abc}$$

Invirtiendo:

$$z + 1 = \frac{2abc}{ab + ac - bc}$$

$$z = \frac{2abc}{ab + ac - bc} - 1 = \frac{2abc - ac - ac + bc}{ab + ac - bc}$$

$$\therefore \quad z = \frac{2abc - ab - ac + bc}{ab + ac - bc}$$

Sustituyendo. $(II)_1$ en (IV):

$$y = \frac{2abc + ab - ac - bc}{bc + ac - ab}$$

Sustituyendo. $(III)_1$ en (IV):

$$x = \frac{2abc - bc - ab + ac}{bc + ab - ac}$$

8.- Después de resolver el sistema:

$$\sqrt[4]{\frac{a}{x}} + \sqrt[4]{\frac{b}{y}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt[4]{\frac{a}{y}} + \sqrt[4]{\frac{b}{x}} = 2\sqrt[4]{ab}$$

Calcular: $E = x^{-1} + y^{-1}$

Solución:

Escribiendo:

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2}$$

$$\sqrt{b} = \sqrt[4]{a^2}$$

El sistema toma la forma:

$$\sqrt[4]{\frac{a}{x}} + \sqrt[4]{\frac{b}{y}} = \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{b^2} \qquad (I)$$

$$\sqrt[4]{\frac{a}{y}} + \sqrt[4]{\frac{b}{x}} = 2\sqrt[4]{ab} \qquad (II)$$

Aplicando método de reducción:

(I) por $\sqrt[4]{b^2}$:

$$\sqrt[4]{\frac{ab}{x}} + \sqrt[4]{\frac{b^2}{y}} = \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{b^3} \qquad (I)_1$$

(II) por $\sqrt[4]{a}$:

$$\sqrt[4]{\frac{ab}{y}} + \sqrt[4]{\frac{a^2}{y}} = 2\sqrt[4]{a^2b} \qquad (II)_1$$

restando miembro a miembro:

$$\sqrt[4]{\frac{b^2}{y}} + \sqrt[4]{\frac{a^2}{y}} = \sqrt[4]{b^3} - \sqrt[4]{a^2b} \qquad (I)_1$$

factorizando:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{y}}\left(\sqrt[4]{b^2} - \sqrt[4]{a^2}\right) = \sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{b^2} - \sqrt[4]{a^2}\right)$$

simplificando:

$$\sqrt{\frac{1}{y}} = \sqrt[4]{b}$$

elevando a la 4ta. potencia:

$$\frac{1}{y} = b$$

$$\therefore \qquad y = \frac{1}{b} \qquad (1)$$

Sustituyendo en (I):

$$\sqrt[4]{\frac{a}{x}} + \sqrt[4]{\frac{b}{\frac{y}{b}}} = \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{b^2} \qquad (I)$$

$$\sqrt[4]{\frac{a}{x}} + \sqrt[4]{b^2} = \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{b^2} \qquad (I)$$

$$\sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt[4]{a^2}$$

elevando a la 4ta. potencia:

$$\frac{a}{x} = a^2$$

$$x = \frac{1}{a} \qquad (2)$$

Con (1) y (2):

$$E = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{b}} = a + b$$

Rpta.: $E = a + b$

9.- Resolver:

$$\frac{xy}{ay + bx} = c \qquad (I)$$

$$\frac{xz}{az + cx} = b \qquad (II)$$

$$\frac{yz}{bz + cy} = a \qquad (III)$$

Solución:

En (I):

Invirtiendo ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{ay + bx}{xy} = \frac{1}{c}$$

descomponiendo en quebrados parciales:

$$\frac{ay}{xy} + \frac{bx}{xy} = \frac{1}{c}$$

simplificando:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{1}{c} \qquad (I)_1$$

Análogamente en (II) y (III):

$$\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = \frac{1}{b} \qquad (II)_1$$

$$\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{1}{a} \qquad (III)_1$$

Sumando las ecuaciones $(I)_1$ y $(II)_1$, y restando al resultado la ecuación $(III)_1$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{a}{x} + \frac{c}{z} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

reduciendo:

$$\frac{2a}{x} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{ab + ac - bc}{abc}$$

despejando "x":

$$x = \frac{2a^2bc}{ab + ca - bc}$$

Sustituyendo en $(I)_1$ y $(II)_1$:

$$y = \frac{2ab^2c}{ab + bc - ac}$$

$$z = \frac{2abc^2}{bc + ac - ab}$$

10.- Resolver:

$$x + y + z = 15 \qquad (I)$$

$$x + y + t = 16 \qquad (II)$$

$$x + z + t = 13 \qquad (III)$$

$$y + z + t = 20 \qquad (IV)$$

Solución:

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones:

$$3(x + y + z + t) = 69$$

$$x + y + z + t = 23 \qquad (V)$$

Sustituyendo sucesivamente en (V):

(IV) en (V): $x + 20 = 23$

$\therefore \qquad x = 3$

(III) en (V): $18 + y = 23$

$\therefore \qquad y = 5$

(II) en (V): $16 + z = 23$

$\therefore \qquad z = 7$

(I) en (V): $15 + t = 23$

$\therefore \qquad t = 8$

Rpta.: $x = 3, \ y = 5, \ z = 7, \ t = 8$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Cuatro hermanos tienen 810 soles. Si el dinero del primero es aumentado en 20 soles, el segundo es reducido en 20 soles, se duplica el del tercero y el del cuarto se reduce a la mitad; entonces, todos los hermanos tendrán la misma cantidad. ¿Qué cantidad tenía cada hermano?

Solución:

Sean x, y, z, w, las cantidades iniciales de dinero de cada uno de los hermanos.

Por enunciado:

$$x + y + z + w = 810 \qquad \text{(I)}$$

$$x + 20 = y - 20 = 2z = \frac{w}{2} \qquad \text{(II)}$$

haciendo:

$$x + 20 = y - 20 = 2z = \frac{w}{2} = k$$

se tendrá:

$$\left.\begin{array}{lcl} x + 20 = k & \Rightarrow & x = k - 20 \\ y - 20 = k & \Rightarrow & y = k + 20 \\ 2z = k & \Rightarrow & z = \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{w}{2} = k & \Rightarrow & w = 2k \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Sustituyendo (III) en (I):

$$k - 20 + k + 20 + \frac{k}{2} + 2k = 810$$

$$\frac{9k}{2} = 810$$

$$k = 180$$

reemplazando en (III):

$$x = 180 - 20 = 160$$

$$y = 180 + 20 = 200$$

$$z = \frac{180}{2} = 90$$

$$w = 2(180) = 360$$

2.- Una cierta tarea puede ser hecha por A y B en 70 días; por A y C en 84 días; y por B y C en 140 días. Se desea saber en qué tiempo haría toda la tarea cada uno.

Solución:

Denominando 1 (unidad) a la tarea; x, y, z a los tiempos, en días, que tardan en hacer la tarea A, B y C individualmente. Entonces en 1 día:

A hace $\frac{1}{x}$ de la tarea

B hace $\frac{1}{y}$ de la tarea

C hace $\frac{1}{z}$ de la tarea

Por las condiciones del problema:

A y B hacen la tarea en 70 días, en 1 día hacen 1/70 de la tarea; luego:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70} \qquad (1)$$

A y C hacen la tarea en 84 días, en 1 día hacen 1/84 de la tarea; luego:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{84} \qquad (2)$$

B y C hacen la tarea en 140 días, en 1 día hacen 1/140 de la tarea; luego:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{1} = \frac{1}{140} \qquad (3)$$

Sumando (1) + (2) + (3):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{70} \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (4):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{140} = \frac{1}{60}$$

$$x = 105$$

Sustituyendo (2) en (4):

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{84} = \frac{1}{60}$$

$$y = 210$$

Sustituyendo (1) en (4):

$$\frac{1}{70} + \frac{1}{z} = \frac{1}{60}$$

$$z = 420$$

Rpta.: A: 105 días, B: 210 días, C: 420 días.

3.- Un grupo de segadores debía segar dos prados, uno tenía doble superficie que otro. Durante medio día trabaja todo el personal del grupo en el prado grande; después de la comida, una mitad del grupo quedó en el prado grande, y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos prados a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó todo el día siguiente a un solo segador. ¿Con cuántos segadores contaba el grupo?

Solución:

Sea "x" el número de segadores. Sea "y" la superficie del sector segado por un trabajador en un solo día.

La superficie del prado grande es: "xy". Así durante medio día "x" trabajadores, segaron:

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}$$

Durante la segunda parte del día, trabajó allí la mitad del grupo; es decir x/2, que segó:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$$

Como quiera que al final de la jornada, había segado todo el prado, su área será:

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$$

Expresando la superficie del prado menor mediante "x" e "y". Durante medio día se ocuparon en él, "x/2" trabajadores y segaron una superficie de:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$$

Agregando a ésto el sector que quedó sin segar, que es igual a "y" (superficie segada por un trabajador en, una jornada) hallemos la superficie del prado menor:

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$$

Por condición del problema:

$$\frac{3xy}{4} = 2\left(\frac{xy + 4y}{4}\right)$$

$$3xy = 2y(x + 4)$$

$$3x = 2x + 8$$

$$x = 8$$

Rpta.: En el grupo había 8 hombres.

4.- Jorge le dice a Rosario: "Yo tengo el triple de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tu tienes. Pero, cuando tú tengas las edad que yo tengo, nuestras edades sumarán 105 años". Hallar la edad de Jorge y Rosario.

Solución:

Como el problema habla en tiempos distintos, se tabula los datos así:

	Pasado	Presente	Futuro
Jorge		x	
Rosario		y	

Según los datos, Jorge le dice a Rosario: "Yo tengo tres veces la edad que tú tenías.

	Pasado	Presente	Futuro
Jorge		x	
Rosario	x/3	y	

cuando yo tenía la edad que tú tienes:

	Pasado	Presente	Futuro
Jorge	y	x	
Rosario	x/3	y	

y cuando tú tengas la edad que yo tengo (Sea "r" la edad de Jorge en el futuro):

	Pasado	Presente	Futuro
Jorge	y	x	r
Rosario	x/3	y	x

La suma de las dos edades será de 105 años.

$$r + x = 105$$

$$\therefore \qquad r = 105 - x \qquad \text{(I)}$$

Como la diferencia de edades entre dos personas en cualquier época es constante.

$$\underbrace{y - \frac{x}{3}}_{(\alpha)} = \underbrace{x - y}_{(\beta)} = \underbrace{r - x}_{(\gamma)}$$

haciendo $(\alpha) = (\beta)$:

$$y - \frac{x}{3} = x - y$$

$$2y = x + \frac{x}{3} = \frac{4x}{3}$$

$$\therefore \qquad y = \frac{2x}{3} \qquad \text{(II)}$$

haciendo $(\beta) = (\gamma)$:

$$x - y = r - x$$

$$2x - y = r \qquad \text{(III)}$$

Sustituyendo (I), (II) en (III):

$$2x - \frac{2x}{3} = 105$$

$$2x - \frac{2x}{3} + x = 105$$

$$\therefore \qquad x = 45$$

En (II): $y = \dfrac{2}{3}\ (45) = 30$

Jorge 45 años; Rosario 30 años.

5.- La hierba crece en todo el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días y 30 en 60 días. ¿Cuántas vacas se comerían toda la hierba en 96 días?

Solución:

Sea el crecimiento diario de la hierba, expresado en partes de las reservas de la misma en el prado: "y". En 24 días será: 24y.

Tomando el volumen del pasto como "1", entonces, en 24 días las vacas se comerían: 1+24y.

En una jornada las 70 vacas comerán:

$$\frac{1 + 24y}{24}$$

y una vaca (de las 70) comerá:

$$\frac{1 + 24y}{24 \,.\, 70}$$

En forma análoga: Si 30 vacas acaban con toda la hierba del prado en 60 días, 1 vaca en 1 día comerá:

$$\frac{1 + 60y}{30 \,.\, 60}$$

Pero la cantidad de hierba comida por una vaca en un solo día es igual para los dos rebaños;por eso:

$$\frac{1 + 24y}{24 \,.\, 70} = \frac{1 + 60y}{30 \,.\, 60}$$

simplificando:

$$\frac{1 + 24y}{14} = \frac{1 + 60y}{15}$$

$$15 + 360y = 14 + 840y$$

$$1 = 480y$$

de donde:

$$y = \frac{1}{480}$$

Como "y" es la medida de crecimiento, se determina qué parte de la reserva inicial se come una vaca al día:

$$\frac{1 + 24y}{24 \,.\, 70} = \frac{1 + 24\dfrac{1}{480}}{24 \,.\, 70} = \frac{1 + \dfrac{1}{20}}{24 \,.\, 70} = \frac{21}{20 \,.\, 24 \,.\, 70}$$

$$\frac{1 + 24y}{24 \,.\, 70} = \frac{1}{1\,600}$$

Por último, se establece la ecuación para la solución definitiva del problema. Si el número de vacas es "x", entonces:

$$\frac{1 + 96y}{96 \,.\, x} = \frac{1}{1\,600}$$

$$\frac{1 + 96\dfrac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1\,600}$$

$$\frac{1 + \dfrac{1}{5}}{6x} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{6}{30x} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{5x} = \frac{1}{100}$$

de donde: $x = 20$

Rpta.: 20 vacas se comerían toda la hierba en 96 días.

6.- Un barco se desplaza 5 horas sin interrupción, río abajo, desde la ciudad "A" a la ciudad "B". De vuelta, avanza contra la corriente, durante 7 horas. ¿Cuántas horas necesitará la balsa, para desplazarse de la ciudad "A" a la "B" yendo a la misma velocidad de la corriente?

Solución:

Expresando en "x" el tiempo (en horas) que necesita el barco para recorrer la distancia que separa A de B en agua estancada (es decir sólo en la velocidad del barco) y en "y" el tiempo si se desliza la balsa.

De esta manera, en una hora el barco recorre 1/x de la distancia $\overline{AB}$ y la balsa (al igual que la corriente) 1/y de la distancia.

Por tal razón, el barco marchando impulsado por la corriente, en una hora recorre:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

de la distancia $\overline{AB}$, y hacia arriba (contra la corriente):

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

Por las condiciones del problema, se deduce que hacia abajo el barco en una hora hace 1/5 de la distancia y hacia arriba 1/7.

De aquí el sistema siguiente:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{7} \qquad \text{(II)}$$

Para resolver, sumando miembro a miembro:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{7 + 5}{35} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{12}{35}$$

$$x = \frac{35}{6}$$

sustituyendo en (I):

$$\frac{6}{35} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5} + \frac{6}{35} = \frac{7 - 6}{35} = \frac{1}{35}$$

de donde: $y = 35$

Las balsas se deslizarán desde A hasta B en 35 días.

7.- Un asunto fue sometido a una votación de 600 personas y se perdió. Habiéndose votado de nuevo con las mismas persona sobre el mismo asunto fue ganado el caso por el doble de votos que había perdido y la nueva mayoría fue con respecto a la anterior como 8 es a 7. ¿Cuántas personas cambiaron de opinión?

Solución:

Sea "x" el número de personas que conforman la mayoría en la primera votación, la minoría será: (600 - x); sea "y" el número de personas que cambiaron de opinión, en la segunda votación, luego la mayoría: (600 - x + y) y la minoria (x - y); es decir:

	Mayoria	Minoria
1ra. votación (se perdió)	x	600 - x
2ra. votación (se perdió)	600 - x + y	x - y

En la primera votación se perdió por:

$$x - (600 - x) = 2x - 600$$

En la segunda votación, se ganó por:

$$(600 - x + y) - (x - y) = 600 - 2x + 2y$$

Como se ganó por el doble de votos por el que se perdió, se tendrá:

$$600 - 2x + 2y = 2(2x - 600)$$

$$600 - 2x + 2y = 4x - 1\,200$$

$$1\,800 = 6x - 2y$$

$$3x - y = 900 \qquad \text{(I)}$$

Por la relación de las mayorías, en las primera y segunda votación:

$$\frac{600 - x + y}{x} = \frac{8}{7}$$

$$4\,200 - 7x + 7y = 8x$$

$$15x - 7y = 4\,200 \qquad \text{(II)}$$

Aplicando reducción para resolver el sistema conformado por (I) y (II):

(I) por (-7):

$$-21x + 7y = -6\,300$$

(II) por (1):

$$15x - 7y = 4\,200$$

Sumando miembro a miembro:

$$-6x = -2\,100$$

$$\therefore \qquad x = 350$$

Sustituyendo en (1):

$$3(350) - y = 800$$

$$\therefore \qquad y = 150$$

Rpta.: Cambiaron de opinión 150 personas.

8.- Un zorro perseguido por un galgo, le lleva 50 saltos de ventaja, y da 4 saltos mientras el galgo sólo da 3; pero 2 saltos del galgo equivalen a 3 del zorro. ¿Cuántos saltos dará el galgo para alcanzar al zorro?

Solución:

Supongamos que el zorro dió “x” saltos hasta que el galgo lo alcanzó, y que el galgo dio “y” saltos; se puede plantear que:

“y” (saltos del galgo) - “x” (saltos del zorro) = 50 (saltos del zorro) (A)

Todo el problema consiste en convertir los saltos del galgo en saltos del zorro.

Pero como 2 saltos del galgo equivalen a 3 del zorro, luego:

$$2y = 3x$$

$$x = \frac{2y}{3}$$

Sustituyendo en (A):

$$y - \frac{2y}{3} = 50$$

$$y = 150$$

El galgo da 150 saltos para alcanzar al zorro.

9.- Dos cirios de igual altura se encienden simultáneamente; el primero se consume en 4 horas y el segundo en 3 horas. ¿Cuántas horas después de haber encendido los cirios, la altura del primero es doble que la del segundo?

Solución:

Sea la altura de los cirios igual a “H”.

Supongamos que han transcurrido “x” horas después que se han encendido.

Como el primero se agota en 4 horas, en una hora se agota H/4 y en “x” horas: Hx/4 de su altura.

En forma análoga, para el segundo: como se agota en 3 horas, en una hora se agota H/3 y en “x” horas, Hx/3 de su altura.

Del primero queda:

$$H - \frac{Hx}{4}$$

Del segundo queda:

$$H - \frac{Hx}{3}$$

Por condición del problema:

$$H - \frac{Hx}{4} = 2\left(H - \frac{Hx}{3}\right)$$

simplificando H:

$$\frac{4 - x}{4} = 2\left(\frac{3 - x}{3}\right)$$

$$12 - 3x = 24 - 8x$$

$$x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \quad \text{horas}$$

Convirtiendo $\frac{2}{5}$ horas a minutos

$$\left(\frac{2}{5}\right)(60) = 24 \text{ minutos}$$

Rpta.: Deben transcurrir 2 horas 24 minutos.

10.- Un mecánico recibió S/. 1 800 por el trabajo de una obra. Su ayudante, que trabajó 4 días menos recibió, S/. 800. Si el ayudante hubiera trabajado los días que trabajó el mecánico y éste los que trabajó el ayudante, hubieran recibido la misma cantidad. Determinar el jornal de cada uno.

Solución:

Sean "x" e "y" los jornales del mecánico y del ayudante, respectivamente, entonces:

Los días que trabajó el mecánico son:

$$\frac{1\,800}{x}$$

Los días que trabajó el ayudante:

$$\frac{800}{x}$$

Luego, se tendrá:

$$\frac{1\,800}{x} - \frac{800}{y} = 4$$

$$1\,800y - 800x = 4xy \qquad (1)$$

también, por condición:

$$\frac{1\,800}{x}\,y = \frac{800}{y} = x$$

$$1\,800y^2 = 800x^2$$

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2$$

$$\therefore \qquad y = \frac{2}{3}x \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$1\,800\left(\frac{2}{3}x\right) - 800x = 4x\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$3\,600x - 2\,400x = 8x^2$$

$$1\,200x = 8x^2$$

$$x = 150$$

Sustituyendo en (2):

$$y = \frac{2}{3}(150) = 100$$

Rpta.: Jornal de mecánico = 150

Jornal de ayudante = 100

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver y dar el valor de "y":

$$\frac{x}{4a} - \frac{y}{9b} = \frac{1}{6} \qquad (1)$$

$$\frac{x}{6a} - \frac{y}{5b} = \frac{14}{15} \qquad (2)$$

a) 2a b) 3a c) 3b

d) 2b e) 6a

2. Resolver y dar el valor de "y"?

$$\sqrt{x + a} - \sqrt{y - a} = \frac{5}{2}\sqrt{a} \qquad (1)$$

$$\sqrt{x + a} - \sqrt{y + a} = \frac{3}{2}\sqrt{a} \qquad (2)$$

a) $\frac{8a}{17}$ b) $\frac{17a}{8}$ c) $\frac{8a}{15}$

d) $\frac{15a}{8}$ e) $\frac{6}{7}a$

3. Determinar y dar el valor de "z":

$$ax + y + z = 1 \qquad (1)$$

$$x + ay + z = a \qquad (2)$$

$$x + y + az = a^2 \qquad (3)$$

a) a + 1 b) a - 1 c) a

d) -(a + 2) e) a + 3

4. Resolver y dar el valor de "xyz":

$$\frac{\sqrt[n]{a - x^n} + \sqrt[n]{b - y^n}}{x + y} = \frac{\sqrt[n]{c - z^n} + \sqrt[n]{b - y^n}}{y + z}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{a - x^n} + \sqrt[n]{c - x^n}}{x + z} = 1$$

a) $\sqrt[n]{\frac{abc}{4}}$ b) $\sqrt[n]{\frac{abc}{8}}$ c) $\sqrt[n]{\frac{abc}{2}}$

d) $\sqrt[n]{abc}$ e) $\sqrt[n]{\frac{abc}{16}}$

5. Resolver y dar el valor de "z":

$$\frac{ax - ay}{a - b} + \frac{z}{c} = 1 + a \qquad (1)$$

$$\frac{by - bz}{b - c} + \frac{x}{a} = 1 + b \qquad (2)$$

$$\frac{cx - cz}{a - c} + \frac{y}{b} = 1 + c \qquad (3)$$

a) a b) b c) c

d) 1 e) a + b

6. Resolver y dar el valor de "y":

$$(a + b)x + (a - b)y = 2ab \qquad (I)$$

$$(a + c)x + (a - c)y = 2ac \qquad (II)$$

a) a b) -a c) b

d) -b e) c

7. Resolver y dar el valor de "x":

$$a^3x + a^2y + az + 1 = 0 \qquad (I)$$

$$b^3x + b^2y + bz + 1 = 0 \qquad (II)$$

$$c^3x + c^2y + cz + 1 = 0 \qquad (III)$$

a) abc b) -abc c) $\frac{1}{abc}$

d) $-\frac{1}{abc}$ e) a

8. Resolver y dar el valor de "y":

$$\sqrt{x + y} + \sqrt{2x + 4y} = \sqrt{2} + 4 \qquad (I)$$

$$\sqrt{x + 2y} - \sqrt{2x + 2y} = 2\sqrt{2} - 2 \qquad (II)$$

a) 4 b) 2 c) 5 d) 3 e) 1

9. Resolver y dar el valor de "z":

$$x + 2y + z + 3u = 24 \qquad \text{(I)}$$
$$2x - 3y + z - u = 3 \qquad \text{(II)}$$
$$3x - 2y - 3x + u = 6 \qquad \text{(III)}$$
$$5x - 5y + 2z - u = 17 \qquad \text{(IV)}$$

a) 4 b) 2 c) 5

d) 3 e) 1

10. Calcular el valor de "x" después de resolver:

$$(x + y) - (a + b) = (a + b)(x - a)(y - b) \qquad \text{(I)}$$
$$(x + z) - (a + c) = (a + c)(x - a)(z - c) \qquad \text{(II)}$$
$$(z + y) - (b + c) = (b + c)(z - c)(y - b) \qquad \text{(III)}$$

a) $b + \frac{1}{a}$ b) $b + \frac{1}{b}$ c) $c + \frac{1}{c}$

d) $a + \frac{1}{b}$ e) $b + \frac{1}{c}$

11. Calcular "t" después de resolver:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{12}$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{t} = \frac{31}{30}$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{19}{30}$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{47}{60}$$

a) 2 b) 3 c) 4

d) 5 e) 6

12. Resolver y dar el valor de "y":

$$y + z + t - x = a \qquad \text{(I)}$$
$$z + t + x - y = b \qquad \text{(II)}$$
$$t + x + y - z = c \qquad \text{(III)}$$
$$x + y + z - t = d \qquad \text{(IV)}$$

a) $\frac{b + c + d - a}{4}$ b) $\frac{a + c + d - b}{4}$

c) $\frac{a + b + d - c}{4}$ d) $\frac{a + b + c - d}{4}$

e) $\frac{a + b + c + d}{4}$

13. Resolver y dar el valor de "y":

$$4\sqrt{x} - \sqrt[4]{8 - y} = 16 \qquad \text{(I)}$$
$$y + \left(\sqrt{y} + 1\right)^4 = 8 \qquad \text{(II)}$$

a) 3 b) 9 c) 13

d) 248 e) -248

14. Resolver y dar el valor de "z":

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{z}{2}$$
$$\frac{z}{y} + \frac{y}{z} = \frac{41x}{40}$$
$$\frac{z}{x} + \frac{x}{z} = \frac{29y}{40}$$

a) 2 b) 3 c) 5

d) 8 e) 4

15. Una escalera tiene un tramo $\overline{MN}$ que no es automático y $\overline{NR}$ que es automático. Un hombre al subir desde M hasta R se demora 10 seg. y regresa a M en 30 s. Si toda la escalera fuera automática subiría en 6 s.

En este caso, ¿cuánto se demoraría en bajar? (El hombre en todo instante camina).

a) 31s b) 43s c) 40s

d) 39s e) 41s

16. Hace dos años tenía 6 veces tu edad. Dentro de 5 años tendré veinticinco veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tendrás dentro de 11 años. ¿Qué edad tengo?

a) 20 años b) 17 años c) 30 años

d) 18 años e) 19 años

17. Un galgo persigue a una liebre que le lleva 77 saltos, se sabe que 12 saltos del galgo equivalen a 17 de la liebre, y que en el tiempo en que el galgo da un número de saltos igual a los que ha dado la liebre desde que el galgo comenzó la persecución, la liebre había dado 116 saltos más. Se pide el número de saltos que da la liebre hasta que es alcanzada por el galgo.

a) 600 b) 500 c) 658

d) 558 e) 588

18. A y B parten al mismo tiempo de dos poblaciones distintas caminado el uno hacia el otro. Si B camina 1 km más aprisa que A, entonces se encuentran al cabo de 6 horas; si B camina con la misma velocidad que A, entonces se encuentran al cabo de 7 horas. Calcular la distancia entre las 2 poblaciones.

a) 40 km b) 42 km c) 45 km

d) 48 km e) 44 km

19. Dos compañeros, al tener una sola bicicleta, partieron en el mismo instante del punto A hacia el punto B; el primero de ellos se fue en bicicleta y el segundo a pie. A cierta distancia de A el primero dejó la bicicleta en el camino y llegó caminando a B. El segundo, al llegar donde estaba la bicicleta, siguió en ésta. Ambos amigos llegaron juntos a B. En el camino de regreso del punto B al punto A procedieron de igual forma, pero el primer compañero recorrió en bicicleta un kilómetro más que la vez primera. Por esto el segundo amigo llegó al punto A 21 minutos más tarde que el primero. Determinar la velocidad de marcha del primero si en bicicleta van a una velocidad de 20 km/h y caminando, la velocidad del primero en 3 minutos por Km es mayor que la del segundo.

a) 5 km/h b) 4 km/h c) 3 km/h

d) 2 km/h e) 7 km/h

20. Tres obreros trabajando juntos pueden concluir una obra en 10 días; si trabajan solo los dos primeros la acabarán en 15 días, pero si laboran los dos últimos culminan en 20 días. ¿Qué tiempo tardan el primero y tercero juntos?

a) 12 días b) 11 días c) 10 días

d) 13 días e) 16 días

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) B	3) D	4) B	5) C
6) B	7) D	8) B	9) D	10) C
11) D	12) B	13) B	14) C	15) C
16) A	17) E	18) B	19) A	20) A

DETERMINANTES

DEFINICIÓN.-

Determinante es el desarrollo de una "matriz cuadrada". Se le representa simbólicamente encerrando la matriz entre dos barras verticales. El "orden" del determinante está expresado por el número de "filas" o "columnas" que tiene la matriz.

La "matriz es cuadrada" cuando el número de filas es igual al número de columnas.

SIGNOS DE UN ELEMENTO

Se obtiene sumando los números ordinales que indican la fila y columna del elemento.

(1) Si la suma es par el elemento tiene signo (+).

(2) Si es impar tiene signo (-).

Ejemplo:

Sea el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

El elemento c_2 se encuentra en 3ra. (3) fila y 2da. (2) columna, luego:

$$S = 3 + 2 = 5 \quad \text{(número impar)}$$

luego, el elemento c_2 tiene signo negativo (-).

El elemento a_3 se encuentra en la 1ra. (1) fila y 3ra. (3) columna, luego:

$$S = 1 + 3 = 4 \quad \text{(número par)}$$

luego el elemento a_3 tiene signo positivo (+).

DETERMINANTE DE SEGUNDO ORDEN

Es el desarrollo de una matriz cuadrada que tiene 2 filas y 2 columnas. Se le representa así:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

donde "Δ" es el valor del determinante.

Los elementos son a_1, a_2, b_1, b_2 ,

Columnas.- Son el grupo de elementos en línea vertical: (a_1, b_1) y (a_2, b_2).

Filas.- Son el grupo de elementos en línea horizontal: (a_1, a_2) y (b_1, b_2).

Diagonal Principal.- Está formada por los elementos que van desde el primer elemento de la primera fila al último de la segunda fila. Así:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

diagonal principal

Diagonal Secundaria.- Está formada por los elementos que van del primer elemento de la última fila al último de la primera fila. Así:

diagonal secundaria

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

VALOR DEL DETERMINANTE DE SEGUNDO ORDEN

Es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

(-)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_1 - b_1a_2$$

(+)

Ejemplo.

Hallar:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$\Delta = (-5)(4) - (6)(-7)$

$\Delta = -20 + 42$

$\Delta = 22$

DETERMINANTE DE TERCER ORDEN

Es el desarrollo de una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas.

Para determinar su valor se utiliza la "Regla de Sarrus" o el método de "Menores Complementarios", que es más general.

REGLA DE SARRUS

1º Se repite las filas primera y segunda a continuación de la tercera (formando 2 filas adicionales).

2º Se toma con signo positivo la diagonal principal (hacia abajo) y las dos paralelas a ella; y con signo negativo, la diagonal secundaria (hacia arriba) y las dos paralelas a la misma.

3º Se efectúan los productos de los elementos de las diagonales y sus paralelas considerando para cada producto el signo señalado en el paso anterior.

Así:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3$$
$$- c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

Ejemplo.

Hallar:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right| \begin{array}{c} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{array}$$

$$\Delta = (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (4)(8)(3)$$
$$- (3)(5)(7) - (6)(8)(1) - (2)(4)(9)$$

$$\Delta = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72$$

$$\Delta = 0$$

FORMA PRÁCTICA DE LA REGLA DE SARRUS

Cuando se quiere evitar escribir las dos primeras filas a continuación de la tercera, se efectúa los productos de la siguiente manera: como se señala gráficamente.

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\right|$$

(+)

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\right|$$

(-)

Desarrollar:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\right|$$

$$D = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - c_1b_2a_3$$
$$- b_1a_2c_3 - c_2b_3a_1$$

Ejemplo numérico

Desarrollar:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{array}\right|$$

$$\Delta = (3)(16)(1) + (2)(9)(1) + (1)(4)(4)$$
$$- (4)(3)(1) - (2)(1)(16) - (4)(9)(1)$$

$$\Delta = 48 + 18 + 16 - 12 - 32 - 36$$

$$\Delta = 1$$

MENOR COMPLEMENTARIO DE UN DETERMINANTE

El menor complementario de un elemento en un determinante, es otro determinante de menor orden, que resulta después de suprimir en el determinante, los elementos que pertenecen a la fila y columna de dicho elemento.

Ejemplo.- Dado el determinante:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\right|$$

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

es el menor complementario de b_2.

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR MENORES COMPLEMENTARIOS

El valor de un determinante es igual a la suma algebraica de los elementos de una línea cualquiera (fila o columna), multiplicado cada uno de ellos por sus respectivos menores complementarios, colocando a cada producto el signo del elemento.

Desarrollar:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

desarrollando por los elementos de la 1ra. fila:

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\Delta = a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3 + a_2c_1b_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

$$\Delta = a_1b_2c_3 + a_2c_1b_3 + a_3b_1c_2 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

Ejemplo.

Desarrollar por menos complementarios:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$$

Solución:

Tomando la primera fila:

$$\Delta = (1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 16 & 25 \end{vmatrix} - (4)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 25 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (1)(100 - 80) - (4)(75 - 45) + (2)(48 - 36)$$

$$\Delta = 20 - 120 + 24 = -76$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1º Si en un determinante se cambian las filas por columnas y las columnas por filas, el valor del determinante no se altera.

Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

2º Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

intercambiando las dos filas:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = b_1a_2 - a_1b_2$$

$$\Delta = -(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\Delta = -\Delta_1$$

3º Si un determinante tiene 2 filas o 2 columnas iguales, el determinante es igual a cero.

Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_1b_2b_3 + b_1b_2a_3 + a_2b_3b_1 - b_1b_2a_3 - b_1a_2b_3 - b_2b_3a_1$$

reduciendo: $\Delta = 0$

4º Si en un determinante se multiplica o divide todos los elementos de una fila o columna por un mismo número, el determinante quedará multiplicado o dividido por este número.

Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - b_1a_2c_3$$

Multiplicando todos los elementos de la primera columna por "m"

$$\Delta = \begin{vmatrix} ma_1 & a_2 & a_3 \\ mb_1 & b_2 & b_3 \\ mc_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ma_1b_2c_3 + mb_1c_2a_3 + a_2b_3mc_1 - mc_1b_2a_3 - c_2b_3ma_1 - mb_1a_2c_3$$

$$\Delta = m\,[a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - b_2c_1a_3 - c_2b_3a_1 - b_1a_2c_3]$$

$$\Delta_1 = m\,\Delta$$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE

Si un determinante tiene en todos los elementos de una fila o columna un factor común, éste se puede sacar como factor común del determinante.

5º Si todos los elementos de la fila son nulos, el determinante es nulo.

6º Si un determinante tiene dos filas cuyos elementos correspondientes son proporcionales, el determinante es nulo.

7º Si en un determinante a los elementos de una fila o columna se les aumenta o se les resta los de la otra fila o columna paralela multiplicados por un mismo número, el valor del determinante no varía.

Ejemplo:

Sea el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Multiplicando la primera fila por "m" y sumándole el resultado a la segunda fila, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+ma_1 & b_2+ma_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_1(b_2 + ma_2) - a_2(b_1 + ma_1)$$

$$\Delta_1 = a_1b_2 + ma_1a_2 - a_2b_1 - ma_2a_1$$

$$\Delta_1 = a_1b_2 + a_2b_1$$

$$\therefore \quad \Delta = \Delta_1$$

EJERCICIO RESUELTOS

1.- Hallar el valor de:

$$E = \sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}}$$

Solución:

Desarrollando el determinante:

$$E = \sqrt{a^6 + 8a^3b^3 + b^6 - 2a^3b^3 - 2a^3b^3 - 2a^3b^3}$$

$$E = \sqrt{a^6 + 2a^3b^3 + b^6} = \sqrt{(a^3 + b^3)^2} = a^3 + b^3$$

2.- Hallar el valor de:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & a & a^n \\ a^p & a^{p+1} & a^{p+n} \end{vmatrix}$$

Solución:

Sacando a^p de la 3ra fila:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & a & a^n \\ 1 & a & a^n \end{vmatrix}$$

por tener el determinante la 2da. y 3ra. fila iguales el valor del determinante es cero.

$$\Delta = a^p(0) = 0$$

3.- Calcular "x" en:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 2 & x & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Solución:

Desarrollando el determinate:

$$4x - 6 + 8 + x + 16 + 12 = 5$$

$$5x = 5 + 6 - 8 - 16 - 12$$

de donde:

$$x = -5$$

4.- Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \\ a-b & b-c & c-a \end{vmatrix}$$

Solución:

Aplicando las propiedades establecidas, sumemos a la primera fila, la segunda fila (la única fila que se altera es aquella fila a la cual se suma, permaneciendo las otras iguales).

$$E = \begin{vmatrix} b-a & c-b & a-c \\ c-a & a-b & b-c \\ a-b & b-c & c-a \end{vmatrix}$$

factorizando el signo en cada uno de los elementos de la primera fila:

$$E = \begin{vmatrix} -(a-b) & -(b-c) & -(c-a) \\ c-a & a-b & b-c \\ a-b & b-c & c-a \end{vmatrix}$$

factorizando (-1) en el determinante, por la propiedad (4):

$$E = (-1)\begin{vmatrix} a\text{-}b & b\text{-}c & c\text{-}a \\ c\text{-}a & a\text{-}b & b\text{-}c \\ a\text{-}b & b\text{-}c & c\text{-}a \end{vmatrix}$$

El valor del determinante es cero por tener la primera y tercera fila iguales.

$\therefore \qquad E = (-1)(0) = 0$

5.- Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Solución:

Aplicando el desarrollo por menores complementarios con respecto a la primera fila. Tomando cada elemento con su respectivo signo:

$$E = (1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$+ (3)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} - (4)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

desarrollando los determinantes de tercer orden:

$E = (1)(105 + 120 + 120 - 125 - 108 - 112)$

$- (2)(70 + 90 + 96 - 100 - 72 - 84)$

$+ (3)(56 + 75 + 72 - 80 - 63 - 60)$

$- 4\,(48 + 60 + 60 - 64 - 54 - 50)$

$E = (1)(0) - 2(0) + 3(0) - 4(0) = 0$

$E = 0$

6.- Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (n-2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Desarrollando por menores complementarios con respecto a la primera fila.

$$E = \begin{vmatrix} (n-1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0$$

ya que los otros términos salen cero por que sus coeficientes son ceros.

En forma análoga:

$$E = (n)(n-1)\begin{vmatrix} (n-2) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-3) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ \dots & \dots & . & . & \dots & 0 \\ \dots & \dots & . & . & \dots & 0 \\ \dots & \dots & . & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0$$

ya que los otros términos valen cero.

En forma análoga:

$$E = (n)(n-1)(n-2)(n-3)\dots(3)(2)(1)$$

pero, el producto es $\lfloor n$;

luego: $E = \lfloor n$

7.- Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix}$$

Solución:

Se puede escribir:

$$E = \begin{vmatrix} (x-1) & (x+1)(x-1) & (x-1)(x^2+x+1) \\ 2(x-2) & (x+2)(x-2) & (x-2)(x^2+2x+4) \\ 3(x-3) & (x+3)(x-3) & (x-3)(x^2+3x+9) \end{vmatrix}$$

Sacando los factores (x-1), (x-2) y (x-3) del determinante:

$$E = (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & (x+1) & x^2+x+1 \\ 2 & (x+2) & x^2+2x+4 \\ 3 & (x+3) & x^2+3x+9 \end{vmatrix}$$

restando a los elementos de la segunda columna los elementos de la primera columna:

$$E = (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2+x+1 \\ 2 & x & x^2+2x+4 \\ 3 & x & x^2+3x+9 \end{vmatrix}$$

Sacando factor "x" fuera del determinante:

$$E = (x-1)(x-2)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & x^2+x+1 \\ 2 & 1 & x^2+2x+4 \\ 3 & 1 & x^2+3x+9 \end{vmatrix}$$

Aplicando menores complementarios con respecto a la 2da. columna:

$$E = x(x-1)(x-2)(x-3)\left[-(1)\begin{vmatrix} 2 & x^2+2x+4 \\ 3 & x^2+3x+9 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & x^2+x+1 \\ 3 & x^2+3x+9 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & x^2+x+1 \\ 2 & x^2+2x+4 \end{vmatrix}\right]$$

desarrollando los determinantes de 2do. orden:

$$E = x(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$.\,[-(2x^2+6x+18-3x^2-6x-12)$$
$$+(x^2+3x+9-3x^2-3x+3)$$
$$-(x^2+2x+4-2x^2-2x-2)\,]$$

reduciendo:

$$E = x(x-1)(x-2)(x-3)[x^2-6-2x^2+6+x^2-2]$$

$$E = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(-2)$$

$$E = -2x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

8.- Calcular:

$$E = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a \\ a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix}}$$

Solución:

Desarrollando cada determinante:

$$E = \frac{acb + abc - a^3 - b^3 - c^3 + abc}{bc - a^2 + ac - b^2 + ab - c^2}$$

$$E = \frac{-(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)}{-(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}$$

$$E = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}$$

pero, el numerador, por identidad algebráica es:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

Sustituyendo en la expresión:

$$E = \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}$$

$$E = a + b + c$$

9.- Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

Solución:

Desarrollando el determinante por el Método de Sarrus:

$$\Delta = bc^2 + ab^2 + a^2c - a^2b - b^2c - ac^2$$

factorizando por el método de agrupación:

$$\Delta = (bc^2 - b^2c) - (ac^2 - ab^2) + (a^2c - a^2b)$$

$$\Delta = bc(c - b) - a(c + b)(c - b) + a^2(c - b)$$

$$\Delta = (c - b)(bc - ac - ab + a^2)$$

$$\Delta = (c - b)\,[(bc - ab) - (ac - a2)]$$

$$\Delta = (c - b)\,[b(c - a) - a(c - a)]$$

$$\Delta = (c - b)(c - a)(b - a)$$

A este determinante se le denomina "**Determinante de "Vandermonde"**.

10.- Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 16 & 25 & 49 \end{vmatrix}$$

Solución:

Escribiendo el determinante así:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 4^2 & 5^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

representa un determinante de Vandermonde:

$$\therefore \quad E = (7 - 5)(7 - 4)(5 - 4) = 2 . 3 . 1$$

$$E = 6$$

11.- Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ y^2 & (y+1)^2 & (y+2)^2 & (y+3)^2 \\ z^2 & (z+1)^2 & (z+2)^2 & (z+3)^2 \\ t^2 & (t+1)^2 & (t+2)^2 & (t+3)^2 \end{vmatrix}$$

Solución:

Desarrollando las potencias indicadas:

$$E = \begin{vmatrix} x^2 & x^2+2x+1 & x^2+4x+4 & x^2+6x+9 \\ y^2 & y^2+2y+1 & y^2+4y+4 & y^2+6y+9 \\ z^2 & z^2+2z+1 & z^2+4z+4 & z^2+6z+9 \\ t^2 & t^2+2t+1 & t^2+4t+4 & t^2+6t+9 \end{vmatrix}$$

Efectuando las siguientes sustracciones:

a) 4ta. columna - 3ra. columna

b) 3ra. columna - 2da. columna

c) 2da. columna - 1ra. columna

luego:

$$E = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 \\ y^2 & 2y+1 & 2y+3 & 2y+5 \\ z^2 & 2z+1 & 2z+3 & 2z+5 \\ t^2 & 2t+1 & 2t+3 & 2t+5 \end{vmatrix}$$

Acontinuación, las siguientes sustracciones:

a) 4ta. columna - 3ra. columna

b) 3ra. columna - 2da. columna

$$E = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 & 2 \\ y^2 & 2y+1 & 2 & 2 \\ z^2 & 2z+1 & 2 & 2 \\ t^2 & 2t+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

por tener el determinante la 3ra. y 4ta. columnas iguales, su valor es igual a cero:

$$E = 0$$

MÉTODO DE LOS DETERMINANTES PARA HALLAR LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Este método permite emplear los determinantes para la resolución de sistemas de ecuaciones mediante la "Regla de Cramer".

REGLA DE CRAMER

En todo sistema de ecuaciones (determinado), el valor de cada incógnita es una fracción, cuyo denominador es el determinante del sistema, siendo el numerador este mismo determinante en el que se ha reemplazado la columna de los coeficientes de la incógnita por los términos independientes.

EXPLICACIÓN

En el sistema:

$$a_1x + a_2y = a_3 \qquad \text{(I)}$$

$$b_1x + b_2y = b_3 \qquad \text{(II)}$$

se define:

$$\Delta s = \begin{matrix}\text{determinante} \\ \text{del sistema}\end{matrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{matrix}\text{determinante} \\ \text{de x}\end{matrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{matrix}\text{determinante} \\ \text{de la incognita y}\end{matrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_3 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES

Dado el sistema:

$$a_1x + a_2y = a_3 \qquad \text{(I)}$$

$$b_1x + b_2y = b_3 \qquad \text{(II)}$$

Por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \quad ; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

1) Si $\Delta x \neq 0$, $\Delta s \neq 0$, es compatible determinado, tiene una sola solución.

2) Si $\Delta x = 0$, $\Delta s = 0$, el sistema es indeterminado, tiene muchas soluciones.

3) Si $\Delta x = 0$, $\Delta s \neq 0$, el sistema es incompatible, no tiene solución.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver el sistema:

$$x + y + z = 0 \qquad (1)$$

$$ax + by + cz = 0 \qquad (2)$$

$$bcx + acy + abz = 1 \qquad (3)$$

Solución:

Cálculo de cada determinante:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$$

$$\Delta s = ab^2 + a^2c + bc^2 - b^2c - ac^2 - a^2b$$

factorizando por agrupación:

$$\Delta s = b^2(a - c) + ac(a - c) - b(a + c)(a - c)$$

$$\Delta s = (a - c)(b^2 + ac - ab - bc)$$

$$\Delta s = (a - c)[b(b - a) - c(b - a)]$$

$$\Delta s = (a - c)(b - a)(b - c)$$

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & c \\ 1 & ac & ab \end{vmatrix} = c - b$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & c \\ bc & 1 & ab \end{vmatrix} = a - c$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \\ bc & ac & 1 \end{vmatrix} = b - a$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{(c - b)}{(a-c)(b-a)(b-c)} = \frac{-(b - c)}{(a-c)(b-a)(b-c)}$$

$$= -\frac{1}{(a-c)(b-a)}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{a - c}{(a-c)(b-a)(b-c)} = \frac{1}{(b-a)(b-c)}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{b - a}{(a-c)(b-a)(b-c)} = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

2.- Resolver el sistema:

$$x + y + z = 1$$

$$ax + by + cz = d$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = d^2$$

Solución:

Al construir los determinantes se nota que son determinantes de Vandermonde.

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta s = (c - b)(c - a)(b - a)$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$\Delta s = (c - b)(c - d)(b - d)$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & d & c \\ a^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$\Delta y = (c - d)(c - a)(d - a)$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

$\Delta z = (d - b)(d - a)(b - a)$

Por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{(c-b)(c-d)(b-d)}{(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{(c-d)(c-a)(d-a)}{(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{(c-d)(d-a)}{(c-b)(b-a)}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{(d-b)(d-a)(b-a)}{(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{(d-b)(d-a)}{(c-b)(c-a)}$$

3.- Hallar el valor de "k" si el sistema:

$$(1 + 2k)x + 5y = 7 \qquad (1)$$

$$(2 + k)x + 4y = 8 \qquad (2)$$

no tiene solución.

Solución:

Para que el sistema no tenga solución:

$\Delta s = 0$

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 + 2k & 5 \\ 2 + k & 4 \end{vmatrix}$$

El desarrollo del determinante se igual a cero:

$$4(1+2k) - 5(2+k) = 0$$

$$4 + 8k - 10 - 5k = 0$$

$$3k = 6$$

$$\therefore \quad k = 2$$

4.- Determinar "a" y "b" para que el sistema sea indeterminado:

$$3x + 5y = 1 \qquad (1)$$

$$ax - by = 4 \qquad (2)$$

Solución:

Si el sistema es indeterminado, entonces:

$$\Delta s = 0, \quad \Delta x = 0, \quad \Delta y = 0$$

por lo tanto:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ a & -b \end{vmatrix} = 0$$

$-3b - 5a = 0$

$-3b = 5a$

$$b = -\frac{5}{3}a \qquad (\alpha)$$

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -b \end{vmatrix} = 0$$

$-b - 20 = 0$

$b = -20$

Sustituyendo en (α):

$$-20 = -\frac{5}{3}a$$

$a = 12$

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ a & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$12 - a = 0$

$\therefore \quad a = 12$

Rpta.: $a = 12, b = -20$

5.- Resolver el sistema:

$$(a + 2b)x - (a - 2b)y = 6a \qquad (1)$$

$$(a + 3c)x - (a - 3c)y = 4ab \qquad (2)$$

Solución:

Hallando los determinantes:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} a + 2b & -(a - 2b) \\ a + 3c & -(a - 3c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta s = -(a + 2b)(a - 3c) + (a - 2b)(a + 3c)$$

$$\Delta s = -a^2 - (2b - 3c)a + 6bc + a^2 + (-2b + 3c)a - 6bc$$

$$\Delta s = a(-2b + 3c - 2b + 3c) = a(6c - 4b)$$

$$\Delta s = 2a(3c - 2b)$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6ac & -(a - 2b) \\ 4ab & -(a - 3c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = -6ac(a - 3c) + 4ab(a - 2b)$$

$$\Delta x = 2a\,[-3ac + 9c^2 + 2ab - 4b^2]$$

$$\Delta x = 2a\,[a(2b - 3c) + (2b + 3c)(2b - 3c)]$$

$$\Delta x = 2a(2b - 3c)(a - 2b - 3c)$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a + 2b & 6ac \\ a + 3c & 4ab \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = 4ab(a + 2b) - 6ac(a + 3c)$$

$$\Delta y = 2a(2ab + 4b^2 - 3ac - 9c^2)$$

$$\Delta y = 2a[a(2b - 3c) + (2b + 3c)(2b - 3c)]$$

$$\Delta y = 2a(2b - 3c)(a + 2b + 3c)$$

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{2a(2b - 3c)(a - 2b - 3c)}{2a(3c - 2b)}$$

cambiando de signos en el numerador:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{2a(3c - 2b)(3c + 2b - a)}{2a(3c - 2b)}$$

$$x = 3c + 2b - a$$

También:

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{2a(2b - 3c)(a + 2b + 3c)}{2a(3c - 2b)}$$

cambiando de signos en el numerador:

$$y = -(a + 2b + 3c)$$

Rpta.: $x = 3c + 2b - a, \quad y = -(3c + 2b + a)$

6.- Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} + \ldots$$

considerar "n" sumandos.

Solución:

Calculando cada sumando:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix}$$

$$I = (3 - 2)(3 - 1)(2 - 1) = (1)(2)(1) = 2$$

$$II = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

$$II = (4 - 3)(4 - 2)(3 - 2) = (1)(2)(1) = 2$$

$$III = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

$$III = (5 - 4)(5 - 3)(4 - 3) = (1)(2)(1) = 2$$

Sustituyendo:

$$E = \underbrace{(2) + (2) + (2) + \ldots + (2)}_{\text{"n" sumandos}} = 2n$$

$E = 2n$

7.- Resolver el sistema:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{a} = \frac{x}{c} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b}$$
$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Solución:

Haciendo:

$$\frac{1}{a} = m \ ; \ \frac{1}{b} = n \ ; \ \frac{1}{c} = r$$

podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$mx + ny + rz = m + n + r \qquad (1)$$

$$nx + ry + mz = m + n + r \qquad (2)$$

$$rx + my + nz = m + n + r \qquad (3)$$

Calculando los determinantes:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} m & n & r \\ n & r & m \\ r & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+n+r & n & r \\ m+n+r & r & m \\ m+n+r & m & n \end{vmatrix}$$

$$= (m+n+r)\begin{vmatrix} 1 & n & r \\ 1 & r & m \\ 1 & m & n \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} m+n+r & n & r \\ m+n+r & r & m \\ m+n+r & m & n \end{vmatrix} = (m+n+r)\begin{vmatrix} 1 & n & r \\ 1 & r & m \\ 1 & m & n \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} m & m+n+r & r \\ n & m+n+r & m \\ r & m+n+r & n \end{vmatrix} = (m+n+r)\begin{vmatrix} m & 1 & r \\ n & 1 & m \\ r & 1 & n \end{vmatrix}$$

realizando cambios mediante las propiedades:

$$= -(m+n+r)\begin{vmatrix} 1 & m & r \\ 1 & n & m \\ 1 & r & n \end{vmatrix} = (m+n+r)\begin{vmatrix} 1 & r & m \\ 1 & m & n \\ 1 & n & r \end{vmatrix}$$

$$= (m+n+r)\begin{vmatrix} 1 & n & r \\ 1 & r & m \\ 1 & m & n \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} m & r & m+n+r \\ n & r & m+n+r \\ r & m & m+n+r \end{vmatrix} = (m+n+r)\begin{vmatrix} m & n & 1 \\ n & r & 1 \\ r & m & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(m+n+r)\begin{vmatrix} 1 & n & m \\ 1 & r & n \\ 1 & m & r \end{vmatrix} = (m+n+r)\begin{vmatrix} 1 & m & n \\ 1 & n & r \\ 1 & r & m \end{vmatrix}$$

$$= (m+n+r)\begin{vmatrix} 1 & n & r \\ 1 & r & m \\ 1 & m & n \end{vmatrix}$$

Se concluye:

$$\Delta x = \Delta s \quad ; \quad \Delta y = \Delta s \quad ; \quad \Delta z = \Delta s$$

Luego:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\Delta s}{\Delta s} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\Delta s}{\Delta s} = 1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\Delta s}{\Delta s} = 1$$

8.- ¿Para qué valores de "k" el sistema de ecuaciones lineales:

$$3x + ky = 5 + k \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 8 \qquad (2)$$

tiene solución única?

Solución:

Para que el sistema tenga solución única: $\Delta s \neq 0$; ésto es:

$$\begin{vmatrix} 3 & k \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$15 - 2k \neq 0$$

$$15 \neq 2k$$

$$k \neq 7 . 5$$

(k puede ser cualquier valor diferente de 7 . 5)

9.- Calcular el valor de "x" al resolver el sistema:

$$cx + az = b \qquad (1)$$

$$ay + bx = c \qquad (2)$$

$$bz + cy = a \qquad (3)$$

Solución:

Ordenando y completando las ecuaciones:

$$cx + Oy + az - b \qquad (1)$$

$$bx + ay + Oz = c \qquad (2)$$

$$Ox + cy + bz = a \qquad (3)$$

Hallando los determinantes Δs y Δx:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} c & 0 & a \\ b & a & 0 \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b & 0 & a \\ c & a & 0 \\ a & c & b \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = ab^2 + ac^2 - a^3 = a(b^2 + c^2 - a^2)$$

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

a) 4 b) 9 c) 6

d) 49 e) 81

2. Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} 1+\sqrt[3]{12} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt[3]{12} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\sqrt[3]{18} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\sqrt[3]{18} \end{vmatrix}$$

a) 1 b) 12 c) 36

d) 29 e) 19

3. Calcular:

$$E = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 13 & -14 & 1 \\ 5 & 7 & 12 & -7 & 2 \\ -15 & 4 & 11 & 21 & 3 \\ 25 & -2 & 10 & -35 & 4 \\ -15 & 10 & 9 & 21 & 5 \end{vmatrix}$$

a) 1 b) 11 c) 12

d) 0 e) 6

4. Simplificar:

$$E = \frac{\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}}{(a+b+c)^3}$$

a) abc b) 2abc c) 3abc

d) 4abc e) 6abc

5. Calcular:

$$E = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{a+c} & \dfrac{1}{a+b} \\ \dfrac{1}{b+c} & -\dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{a+b} \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{a+c} & -\dfrac{1}{c} \end{vmatrix}$$

a) a b) b c) c

d) a + b + c e) 0

6. Calcular:

$$E = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & b+c & -2c \end{vmatrix}$$

a) $2(b + c)(a + c)(a + b)$

a) $4(b + c)(a + c)(a + b)$

c) $(a + b)(a + c)(b + c)$

d) $a^3 + b^3 + c^3$

e) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

7. Calcular:

$$E = \begin{vmatrix} a^3 & 3a^3 & 3a & 1 \\ a^3 & a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ a & 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

a) $(a + 1)^6$ b) $(a - 3)^6$

c) $(a - 1)^6$ d) $(a - 2)^6$

e) $(a + 2)^6$

8. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 4x & 6x + 2 & 8x + 1 \\ 6x + 2 & 9x + 3 & 12x \\ 8x + 1 & 12x & 16x + 2 \end{vmatrix} = 0$$

a) $\dfrac{-11}{97}$ b) $\dfrac{97}{11}$ c) $-\dfrac{97}{11}$

d) -97 E) $+\dfrac{11}{97}$

9. Si:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & -2ac & a^2 \\ b^2 & a^2 & -2ab \end{vmatrix}$$

y:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Calcular: $E = \dfrac{\Delta_1}{abc\ \Delta_2}$

a) 1 b) -1 c) 2

d) -2 e) 3

10. Calcular:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

a) 1 b) -1 c) 2

d) -2 e) 0

11. Calcular:

$$E = \begin{vmatrix} x - y & y(x + y) \\ -2 & (x + y) \end{vmatrix}$$

a) x - y b) x c) y

d) (x + y) e) 2x

12. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & C_1^n & C_2^n & \dots & C_{r-1}^n \\ 1 & C_1^{n+1} & C_2^{n+1} & \dots & C_{r-1}^{n+1} \\ 1 & C_1^{n+2} & C_2^{n+2} & \dots & C_{r-1}^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_1^{n+r-1} & C_2^{n+r-1} & \dots & C_{r-1}^{n+r-1} \end{vmatrix}$$

a) n b) r c) 1

d) n - r e) n + r

13. Calcular:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & 11 & 20 & 38 \\ 6 & 3 & 0 & 9 \\ 11 & -2 & 36 & 3 \\ 19 & 6 & 17 & 22 \end{vmatrix}$$

a) 5 b) 7 c) 12

d) 9 e) 10

14. Calcular "c" en el sistema para que "x" exceda en 4 unidades a "y"

$$7x - 4y = c \qquad (1)$$

$$3x + 2y = c \qquad (2)$$

a) 40 b) 52 c) 30

d) 32 e) 20

15. Calcular qué valor debe tomar el coeficiente "a" para que el sistema sea incompatible.

$$ax + y + z + u = 2 \qquad (1)$$

$$x + y + z + u = -1 \qquad (2)$$

$$x + y - az = -3 \qquad (3)$$

$$(2a + 1)x + y + z = -5 \qquad (4)$$

a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) -1

d) $\frac{1}{4}$ e) -2

16. Calcular:

$$E = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$$

después de resolver el sistema:

$$x = by + cz$$

$$y = ax + cz$$

$$z = ax + by$$

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 6

17. Calcular "m" si el sistema es indeterminado:

$$(m - 1)x + (m + 1)y = 2(m^2 - 1) \qquad (1)$$

$$(m^2 - 1)x + (m^2 + 1)y = 2(m^3 - 1) \qquad (2)$$

a) 2 b) -2 C) 1

d) -1 e) 3

18. Calcular el valor de "m" si el sistema:

$$x + my = 1 \qquad (1)$$

$$mx - 3my = 2m + 3 \qquad (2)$$

no tiene soluciones.

a) 3 b) -3 c) 1

d) -1 e) 2

19. Calcular "y" después de resolver el sistema:

$$ax + by + cz = d \qquad (1)$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \qquad (2)$$

$$a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \qquad (3)$$

a) $\frac{d(d - b)(d - c)}{a(a - b)(a - c)}$ b) $\frac{d(d - a)(d - b)}{c(c - a)(c - b)}$

c) $\frac{d(d - a)(d - c)}{b(b - a)(b - c)}$ b) $\frac{d(d - a)(d - b)}{a(c - a)(a - b)}$

e) $\frac{d(d - a)(d - b)}{b(c - a)(c - b)}$

20. Calcular "x" al resolve el sistema:

$$x + y + z = 0 \qquad (1)$$

$$(b + c)x + (a + c)y + (a + b)z = 0 \qquad (2)$$

$$bcx + acy + abz = 1 \qquad (3)$$

a) $\dfrac{1}{(a - b)(a - c)}$ b) $\dfrac{1}{(b - a)(b - c)}$

c) $\dfrac{1}{(a - c)(b - c)}$ d) $\dfrac{a}{(b - a)(b - c)}$

e) $\dfrac{b}{(b - a)(b - c)}$

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) C	3) D	4) B	5) E
6) B	7) C	8) A	9) D	10) E
11) D	12) C	13) D	14) B	15) C
16) B	17) C	18) B	19) C	20) A

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado o cuadrática con una incógnita, es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta forma se llama completa cuando a, b, c son diferentes de cero. Cuando b ó c, ó ambos son cero se denomina incompleta.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Se resuelve mediante dos métodos:

a) Factorizando mediante el aspa simple

b) Aplicando la fórmula general

Ejemplo.- Resolver la ecuación:

$$\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 13} = 2$$

Solución:

a) Efectuando e igualando a cero:

$$4x^2 - 3x + 5 = 2x^2 - 4x + 26$$

$$2x^2 + x - 21 = 0$$

factorizando:

$$(2x + 7)(x - 3) = 0$$

igualando cada factor a cero:

$$2x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3 . 5$$

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

b) Cuando la factorización no es inmediata, se aplica la fórmula.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA GENERAL

Sea la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Multiplicando ambos miembros por 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = - 0$$

Pasando (4ac) al segundo miembro:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumando a ambos b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer miembro es el desarrollo de un binomio al cuadrado:

$$(2ax + b)^2 = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

finalmente se tiene la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de lo cual se obtiene dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo.- Resolver la ecuación:

$$4x^2 - 5x = 19$$

Solución:

Igualando a cero:

$$4x^2 - 5x - 19 = 0$$

donde:

$$a = 4; \quad b = -5; \quad c = -19$$

usando la fórmula:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(-19)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 304}}{8}$$

con las soluciones:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{329}}{8}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{329}}{8}$$

DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Las raíces de la ecuación de segundo grado dependen de la cantidad subradical Δ o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Debido a esta función, a la cantidad subradical se le denomina discriminante o invariante.

Los casos que se presentan son:

a) Si $\Delta > 0$; o sea:

$$b^2 - 4ac > 0$$

las dos raíces son reales y desiguales.

b) Si $\Delta = 0$; o sea:

$$b^2 - 4ac = 0$$

las dos raíces son iguales y reales.

c) Si $\Delta < 0$; o sea:

$$b^2 - 4ac < 0$$

las dos raíces son complejas y conjugadas.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Dada la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sus raíces son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1º SUMA DE RAÍCES:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2º PRODUCTO DE RAÍCES:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CONOCIENDO SUS RAÍCES

Si "x_1" y "x_2" son las raíces de la ecuación que quiere formarse, de acuerdo a las dos propiedades anteriores, la ecuación se formará así:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver la ecuación:

$$\frac{(3 - x)^3 + (4 + x)^3}{(3 - x)^2 + (4 + x)^2} = 7$$

Solución:

Efectuando las operaciones en el numerador y denominador:

$$\frac{27 - 27x + 9x^2 - x^3 + 64 + 48x + 12x^2 + x^3}{9 - 6x + x^2 + 16 + 8x + x^2} = 7$$

reduciendo términos semejantes:

$$\frac{91 + 21x + 21x^2}{25 + 2x + 2x^2} = 7$$

$$91 + 21x + 21x^2 = 175 + 14x + 14x^2$$

$$7x^2 + 7x - 84 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

igualando a cero cada factor:

$$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4$$

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

2.- Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x + a + b + c}$$

Solución:

Transponiendo términos:

$$\frac{1}{a + b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x + a + b + c} - \frac{1}{x}$$

efectuando operaciones en cada miembro:

$$\frac{c + a + b}{c(a + b)} = \frac{x - x - a - b - c}{x(x + a + b + c)}$$

$$\frac{(a + b + c)}{c(a + b)} = \frac{-(a + b + c)}{x(x + a + b + c)}$$

$$\frac{1}{c(a + b)} = \frac{1}{x(x + a + b + c)}$$

$$x(x + a + b + c) = -c(a + b)$$

$$x^2 + (a + b + c)x + c(a + b) = 0$$

factorizando por el método del aspa:

$$(x + a + b)(x + c) = 0$$

igualando a cero cada factor:

$$x + a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -a - b$$

$$x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -c$$

3.- Resolver la ecuación:

$$\frac{a + 2x + \sqrt{a^2 - 4x^2}}{a + 2x - \sqrt{a^2 - 4x^2}} = \frac{5x}{a}$$

Solución:

Aplicando la siguiente propiedad de proporciones:

Si:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$$

se obtiene:

$$\frac{2(a + 2x)}{2\sqrt{a^2 - 4x^2}} = \frac{5x + a}{5x - a}$$

que se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{\sqrt{(a + 2x)^2}}{\sqrt{a + 2x}\,\sqrt{a - 2x}} = \frac{5x + a}{5x - a}$$

$$\frac{\sqrt{a + 2x}}{\sqrt{a - 2x}} = \frac{5x + a}{5x - a}$$

elevando al cuadrado:

$$\frac{a + 2x}{a - 2x} = \frac{(5x + a)^2}{(5x - a)^2}$$

aplicando nuevamente la propiedad de proporciones:

$$\frac{2a}{4x} = \frac{(5x + a)^2 + (5x - a)^2}{(5x + a)^2 + (5x - a)^2}$$

aplicando legendre:

$$\frac{a}{2x} = \frac{2(25x^2 + a^2)}{4(5x)\ (a)}$$

$$a = \frac{(25x^2 + a^2)}{5a}$$

$$5a^2 = 25x^2 + a^2 \quad ; \quad 25x^2 = 4a^2$$

$$\therefore \quad x = \pm\frac{2a}{5}$$

4.- Resolver la ecuación:

$$\sqrt{x^2 - 7ax + 10a^2} - \sqrt{x^2 + ax - 6a^2} = x - 2a$$

Solución:

Factorizando los subradicales por el método del aspa simple:

$$\sqrt{(x - 5a)(x - 2a)} - \sqrt{(x - 2a)(x + 3a)} = x - 2a$$

pasando x - 2 al primer miembro:

$$\sqrt{(x - 5a)(x - 2a)} - \sqrt{(x - 2a)(x + 3a)} - (x - 2a) = 0$$

Factorizando: $\sqrt{x - 2a}$:

$$\sqrt{x - 2a}\left[\sqrt{x - 5a} - \sqrt{x + 3a} - \sqrt{x - 2a}\right] = 0$$

Igualando el primer factor a cero:

$$\sqrt{x - 2a} = 0$$

$\therefore \quad x_1 = 2a$ (resultado que sí satisface)

Igualando el segundo factor a cero:

$$\sqrt{x - 5a} - \sqrt{x + 3a} = \sqrt{x - 2a}$$

elevando al cuadrado:

$$x - 5a - 2\sqrt{(x - 5a)(x + 3a)} + x + 3a = x - 2a$$

despejando "x":

$$x = 2\sqrt{(x - 5a)(x + 3a)}$$

elevando al cuadrado y efectuando:

$$x^2 = 4(x^2 - 2ax - 15a^2)$$

$$x^2 = 4x^2 - 8ax - 60a^2$$

$$3x^2 - 8ax - 60a^2 = 0$$

factorizando por método del aspa simple:

$$(3x + 10a)(x - 6a) = 0$$

igualando a cero cada factor:

$$3x + 10a = 0$$

$\therefore \quad x_2 = -\dfrac{10a}{3}$ (solución extraña)

$$x - 6a = 0$$

$\therefore \quad x_3 = 6a$ (Solución extraña)

5.- Resolver:

$$\frac{x(x - 2a)}{\sqrt{bc}} + \frac{a - x}{\sqrt{c}} - \frac{a - x}{\sqrt{b}} = 1 - \frac{a^2}{\sqrt{bc}}$$

Solución:

Eliminando denominadores:

$$x^2 - 2ax + a\sqrt{b} - \sqrt{b}\,x - a\sqrt{c} + \sqrt{c}\,x = \sqrt{bc} - a^2$$

ordenando:

$$x^2 + \left(\sqrt{c} - 2a - \sqrt{b}\right)x + \left(a\sqrt{b} - a\sqrt{c} - \sqrt{bc} + \sqrt{a^2}\right) = 0$$

factorizando el segundo paréntesis aparte:

$$a\sqrt{b} - a\sqrt{c} - \sqrt{bc} + a^2$$

$$= \sqrt{b}\left(a - \sqrt{c}\right) + a\left(a - \sqrt{c}\right)$$

$$= \left(a - \sqrt{c}\right)\left(a + \sqrt{b}\right)$$

luego, la ecuación es:

$$x^2 + \left(\sqrt{c} - 2a - \sqrt{b}\right)x + \left(a - \sqrt{c}\right).\left(a + \sqrt{b}\right) = 0$$

factorizando por el aspa simple:

$$\left[x - \left(a - \sqrt{c}\right)\right]\left[x - \left(a + \sqrt{b}\right)\right] = 0$$

igualando a cero cada factor:

$$x - \left(a - \sqrt{c}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = a - \sqrt{c}$$

$$x - \left(a + \sqrt{b}\right) = 0 \Rightarrow x_2 = a + \sqrt{b}$$

6.- Resolver:

$$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x + 2} - \sqrt{2x + 5} = \sqrt{3x}$$

Solución:

Transponiendo:

$$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x + 2} = \sqrt{3x} + \sqrt{2x + 5}$$

elevando al cuadrado:

$$2x + 3 + 2\sqrt{(2x + 3)(3x + 2)} + 3x + 2$$

$$= 3x + 2\sqrt{3x(2x + 5)} + 2x + 5$$

reduciendo:

$$\sqrt{(2x + 3)(3x + 2)} = \sqrt{3x(2x + 5)}$$

elevando al cuadrado y efectuando:

$$6x^2 + 4x + 9x + 6 = 6x^2 + 15x$$

$$x = 3$$

7.- Resolver:

$$a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$$

si : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$

Solución:

De la condición:

$$\frac{a + b}{ab} = \frac{2}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2ab}{a + b}$$

sustituyendo en la ecuación:

$$a\left(b - \frac{2ab}{a + b}\right)x^2 + b\left(\frac{2ab}{a + b} - a\right)x + \frac{2ab}{a + b}(a - b) = 0$$

$$a\left(\frac{ab + b^2 - 2ab}{a + b}\right)x^2 + b\left(\frac{2ab - a^2 - ab}{a + b}\right)x + \frac{2ab}{a + b}(a - b) = 0$$

$$a(b^2 - ab)x^2 + b(ab - a^2)x + 2ab(a - b) = 0$$

$$ab(b - a)x^2 + ab(b - a)x + 2ab(a - b) = 0$$

$$ab(b - a)x^2 + ab(b - a)x - 2ab(b - a) = 0$$

Dividiendo entre ab(b - a):

$$x^2 + x - 2 = 0$$

factorizando:

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = 1 \,,\; x_2 = -2$$

8.- Resolver:

$$\sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x} = 2$$

Solución:

Elevando al cubo:

$$72 - x - 3\sqrt[3]{72 - x}\sqrt[3]{16 - x}\left(\sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x}\right) - (16 - x) = 8$$

sustituyendo:

$$\sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x} = 2$$

resulta:

$$72 - x - 3\sqrt[3]{(72 - x)(16 - x)}\,(2) - 16 + x = 8$$

$$48 = 6\sqrt[3]{(72 - x)(16 - x)}$$

simplificando:

$$8 = \sqrt[3]{(72 - x)(16 - x)}$$

elevando al cubo:

$$512 = 1\,152 - 88x + x^2$$

$$x^2 - 88x + 640 = 0$$

por el método del aspa:

$$(x - 80)(x - 8) = 0$$

que resulta en:

$$x_1 = 80 \;;\; x_2 = 8$$

9.- Resolver:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots \infty}}} \text{ radicales}$$

Solución:

Elevando al cuadrado:

$$x = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots (\infty - 1) \text{radicales}}}}$$

pero se observa que:

$$1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots (\infty - 1) \text{radicales}}}} = x$$

sustituyendo:

$$x^2 = 1 + x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

aplicando la fórmula:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

luego las raíces son:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(solución satisfactoria)}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(es negativa, no es solución válida)}$$

10.- Resolver:

$$\frac{1}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}} + \frac{1}{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}} = \frac{3}{4}$$

Solución:

Racionalizando los denominadores:

$$\frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}{(5+x) - (5-x)} + \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{(5+x) - (5-x)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}{2x} + \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{2x} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{5+x}}{2x} = \frac{3}{4}$$

$$4\sqrt{5+x} = 3x$$

elevando al cuadrado

$$16(5+x) = 9x^2$$

efectuando y ordenando:

$$9x^2 - 16x - 80 = 0$$

factorizando:

$$(9x+20)(x-4) = 0$$

de donde se tiene las siguientes raíces:

$$x_1 = 4 \quad \text{(Sí satisface)}$$

$$x_2 = -\frac{20}{9} \quad \text{(No es solución)}$$

11.- Hallar el valor de "k" si las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 2(k+2)x + 9k = 0$$

son iguales.

Solución:

Para que una ecuación de segundo grado tenga sus raíces iguales, es necesario que su discriminante sea igual a cero, es decir:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

luego, igualando el discriminante de la ecuación dada a cero:

$$[2(k+2)]^2 - 4(1)(9k) = 0$$

$$4(k^2 + 4k + 4) - 36k = 0$$

operando y ordenando:

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

$$(k-4)(k-1) = 0$$

Rpta.: $k_1 = 4$; $k_2 = 1$

12.- ¿Qué valor debe tener "m" para que las raíces de la ecuación:

$$mx^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$$

difieran en 2 unidades?

Solución:

Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{m+3}{m} \quad (1) \\ x_1x_2 &= \frac{2m+1}{m} \quad (2) \end{aligned}\right\} \text{Por propiedad}$$

$$x_1 - x_2 = 2 \quad \text{(3) Por condición:}$$

De (1) y (3) se obtiene:

$$x_1 = \frac{\frac{m+3}{m} + 2}{2} = \frac{m+3+2m}{2m} = \frac{3+3m}{2m}$$

$$x_2 = \frac{\frac{m+3}{m} - 2}{2} = \frac{m+3+2m}{2m} = \frac{3-3m}{2m}$$

Sustituyendo estos valores en (2):

$$\left(\frac{3+3m}{2m}\right)\left(\frac{3-m}{2m}\right) = \left(\frac{2m+1}{m}\right)$$

$$\frac{9 - 3m + 9m - 3m^2}{4m} = 2m + 1$$

$$9 - 3m^2 + 6m = 8m^2 + 4m$$

$$11m^2 - 2m - 9 = 0$$

factorizando por el método del aspa simple:

$$(11m + 9)(m - 1) = 0$$

Rpta.: $m_1 = 1 \quad ; \quad m_2 = -\frac{9}{11}$

13.- Si "z_1" y "z_2" son raíces de la ecuación:

$$z^2 - 2z\sqrt{p^2 - 2q} + p^2 - 2q = 0$$

además "x_1" y "x_2" son las raíces de:

$x^2 + px + q = 0$, hallar el valor de:

$$E = \frac{(z_1)^2 + (z_2)^2}{(x_1)^2 + (x_2)^2}$$

Solución:

De la primera ecuación, por propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado:

$$z_1 + z_2 = 2\sqrt{p^2 - 2q} \qquad (\alpha)$$

$$z_1 z_2 = p^2 - 2q \qquad (\beta)$$

de la segunda ecuación:

$$x_1 + x_2 = -p \qquad (\gamma)$$

$$x_1 x_2 = q \qquad (\phi)$$

el numerador de la expresión pedida es:

$$(z_1^2) + (z_2^2) = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 \qquad (1)$$

remplazando(α) y (β)

$$(z_1^2) + (z_2^2) = \left(2\sqrt{p^2 - 2q}\right)^2 - 2(p^2 - 2q)$$

$$= 4(p^2 - 2q) - 2(p^2 - 2q)$$

$$\therefore \quad (z_1^2) + (z_2^2) = 2(p^2 - 2q)$$

El denominador de la expresión pedida es:

$$(x_1^2) + (x_2^2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \qquad (2)$$

(γ) y (ϕ) en (2):

$$(x_1^2) + (x_2^2) = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$$

Sustituyendo:

$$E = \frac{2(p^2 - 2q)}{p^2 - 2q} = 2$$

Rpta.: $E = 2$

14.- Hallar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - b}}$$

Solución:

Las raíces de la ecuación pedida son:

$$x_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{a - b}} \quad ; \quad x_2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{a - b}}$$

Racionalizando las raíces:

$$x_1 = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - \sqrt{a - b}\right)}{a - (a - b)} = \frac{a - \sqrt{a^2 - ab}}{b}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \sqrt{a - b}\right)}{a - (a - b)} = \frac{a + \sqrt{a^2 - ab}}{b}$$

La suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - ab}}{b} + \frac{a + \sqrt{a^2 - ab}}{b} = \frac{2a}{b}$$

El producto de las raíces:

$$x_1 x_2 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - ab}}{b}\right)\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - ab}}{b}\right)$$

$$= \frac{a^2 - (a^2 - ab)}{b^2} = \frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b}$$

Para hallar la ecuación de segundo grado se utiliza las propiedades de las raíces:

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2 = 0$$

sustituyendo:

$$x^2 - \left(\frac{2a}{b}\right)x + \frac{a}{b} = 0$$

Eliminado denominadores, resulta finalmente:

$$bx^2 - 2ax + a = 0$$

15.- Al resolver un problema que se reduce a una ecuación de segundo grado, un estudiante comete un error en el término independiente de la ecuación y obtiene como raíces 8 y 2. Otro estudiante comete un error en el coeficiente del término de primer grado y obtiene como raíces -9 y -1.

Hallar la ecuación correcta.

Solución:

Con los datos del problema se forma las ecuaciones equivocadas de los dos casos:

Primer caso:

$$x_1 = 8 \;\; ; \;\; x_2 = 2$$

luego:

$$x_1 + x_2 = 10 \; ; \;\; x_1x_2 = 16$$

la ecuación sería:

$$x_2 - 10x + 16 = 0$$

Segundo caso:

$$x_1 = -9 \;\; ; \;\; x_2 = -1$$

$$x_1 + x_2 = -10 \;\; ; \;\; x_1x_2 = 9$$

la ecuación sería:

$$x_2 + 10x + 9 = 0$$

Analizando las ecuaciones equivocadas de los dos casos, se obtiene la ecuación correcta, ya que el primer término de las dos ecuaciones es correcto, el segundo término independiente es el del segundo caso, por lo tanto la ecuación correcta es:

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

16.- En qué tiempo harán A,B,C un trabajo juntos, si A sólo puede hacerlo en seis horas más, B en una hora más y C en el doble del tiempo.

Solución:

Supongamos que los tres juntos demoran en ejecutar el trbajo "x" horas, entonces:

"A"	demora	(x + 6)	horas
"B"	tarda	(x + 1)	horas
"C"	utiliza	2x	horas

En una hora cada uno hace:

"A" : $\dfrac{1}{x+6}$ de la obra

"B" : $\dfrac{1}{x+1}$ de la obra

"C" : $\dfrac{1}{2x}$ de la obra

La suma de lo que hace cada uno en una hora debe ser igual a lo que hacen los tres juntos en una hora:

$$\frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$$

Eliminado denominadores:

$$2x(x + 1) + 2x(x + 6) + (x + 6)(x + 1) = 2\,(x + 6)(x + 1)$$

efectuando:

$$2x^2 + 2x + 2x^2 + 12x + x^2 + 7x + 6 = 2x^2 + 14x + 12$$

transponiendo y reduciendo:

$$3x^2 + 7x - 6 = 0$$

factorizando:

$$(3x - 2)(x + 3) = 0$$

igualando a cero los factores:

$$3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}$$

$$x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -3$$

La solución es $x_1 = \dfrac{2}{3}$, ya que la solución: $x_2 = -3$ no tiene sentido.

Rpta.: Los 3 juntos demoran $\dfrac{2}{3}$ horas.

17.- Un grupo de abejas cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a 8/9 de su enjambre, sólo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?.

Solución:

Sea el número de abejas del enjambre "x".

La raíz cuadrada de la mitad del enjambre:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}$$

Los $\frac{8}{9}$ del enjambre : $\frac{8}{9}x$

El total del enjambre es:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 1 + 1 = x \qquad \text{(I)}$$

con la finalidad de simplificar la ecuación, se introduce:

$$y = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\therefore \qquad x = 2y^2 \qquad (\alpha)$$

Sustituyendo en (I):

$$y + \frac{8}{9}(2y^2) + 2 = 2y^2$$

$$9y + 16y^2 + 18 = 18y^2$$

$$2y^2 - 9y - 18 = 0$$

La ecuación tiene dos raíces:

$$y_1 = 6 \quad , \quad y_2 = -\frac{3}{2}$$

En (α):

$$x_1 = 2(6)^2 = 72$$

$$x_2 = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 4{,}5$$

(No existe media abeja; no es válida)

Rpta.: El enjambre constaba de 72 abejas.

18.- Regocíjanse los monos, divididos en dos bandos: su octava parte al cuadrado se encuentra en el bosque. Otros doce atronando el campo están. ¿Sabes cuántos monos en total hay en el grupo?

Solución:

Sea "x" el número total de la manada.

Su octava parte al cuadrado es $\left(\frac{x}{8}\right)^2$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Eliminado denominadores e igualando a cero:

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

factorizando:

$$(x - 48)(x - 16) = 0$$

Las raíces son:

$$x_1 = 48, \quad x_2 = 16$$

Rpta.: El problema tiene dos soluciones positivas: en la manada puede haber 48 ó 16 monos. Las dos soluciones satisfacen las condiciones del problema.

19.- Una mujer compró un cierto número de naranjas a 18 soles . Al día siguiente, le hubieran dado 60 naranjas más por el mismo dinero, con lo cual hubiera resultado un centavo más barata cada naranja. ¿Cuántas naranjas compró?.

Solución:

Sea "x" el número de naranjas.

El precio de una naranja es $\frac{1\,800}{x}$ centavos.

En el segundo día habría comprado naranjas al precio de: $\frac{1\,800}{x + 60}$ centavos.

El ahorro es 1 centavo, luego se puede escribir la siguiente ecuación:

$$\frac{1\,800}{x} - \frac{1\,800}{x + 60} = 1$$

$$1\,800(x + 60) - 1\,800(x) = x(x + 60)$$

$$1\,800x + 10\,8000 - 1\,800 = x^2 + 60x$$

$$x^2 + 60x - 108000 = 0$$

factorizando:

$$(x + 360)(x - 300) = 0$$

$$x_1 = 300$$

$$x_2 = -360 \quad \text{(No es solución)}$$

Rpta.: La mujer compró 300 naranjas.

20.- En una fábrica se gasta diariamente, para los jornales de 42 obreros, hombres y mujeres, la cantidad de S/. 4 320. Los jornales de los obreros suman tanto como los de las obreras. Calcular el número de éstas, sabiendo que el jornal del hombre excede en 30 soles al de la mujer.

Solución:

Sea "x" el número de obreros, el número de obreras será: (42 - x).

Siendo la suma de los jornales de obreros y obreras iguales, cada uno de ellos será:

$$\frac{4\,320}{2} = 2\,160$$

de donde:

El jornal de cada hombre es: $\frac{2\,160}{x}$

El jornal de cada mujer es: $\frac{2\,160}{42 - x}$

Por condición, el jornal del hombre excede en 30 soles al de la mujer.

Entonces:

$$\frac{2\,160}{x} - \frac{2\,160}{42 - x} = 30$$

$$2\,160(42 - x) - 2\,160x = 30(x)(42 - x)$$

$$72(42 - x) - 72x = x(42 - x)$$

$$3\,024 - 72x - 72x = 42x - x^2$$

$$x^2 - 186x + 3\,024 = 0$$

factorizando:

$$(x - 168)(x - 18) = 0$$

$x_1 = 168$ (absurdo: excede el total)

$x_2 = 18$

$\therefore$ $x = 18$ hombres

$42 - x = 42 - 18 = 24$ mujeres

Rpta.: Hay 24 obreros

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar una raíz, al resolver:

$$\frac{(x - a)^4 + (x - b)^4}{(x - a)^2 + (x - b)^2} = \frac{41}{20}(a - b)^2$$

a) $\frac{a - b}{2}$ b) $\frac{3b + a}{2}$ c) $\frac{3a - b}{2}$

d) $\frac{3a + b}{2}$ e) $\frac{a - 3b}{2}$

2. Dar la suma de las raíces de la ecuación:

$$\sqrt{6x^2 - 15x - 7} + \sqrt{4x^2 - 8x - 11} - \sqrt{2x^2 - 5x + 5} = 2x - 3$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{9}{2}$

3. Dar una raíz al resolver:

$$\sqrt{2x - 1} + \sqrt{3x - 2} = \sqrt{4x - 3} + \sqrt{5x - 4}$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) - 1 d) $\frac{1}{3}$ e) 1

4. Al resolver se obtiene como producto de las raíces de la ecuación:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 1}{2x^3 - 3x^2 - x - 1} = \frac{3x^3 - x^2 + 5x - 13}{3x^3 - x^2 - 5x + 13}$$

a) 40 b) $\frac{40}{7}$ c) $\frac{7}{40}$ d) $\frac{1}{40}$ e) $\frac{43}{7}$

5. Calcular:

$$E = \sqrt{\frac{p}{q}} + \frac{\sqrt{q}}{p} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$$

si las raíces de la ecuación.

$ax^2 + b\left(b - 2\sqrt{a}\right)x + b^2 = 0$ están en la relación de p/q

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 0

6. Si las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$\left(1 - q + \frac{p^2}{2}\right)x^2 + p(1 + q)x + q(q - 1) + \frac{p^2}{2} = 0$$

son iguales. Calcular $E = p^2/q$.

a) 1 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 2

7. Si una de las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ es el cuadrado de la otra, calcular el valor de:

$$E = p^2 - q(3p - 1) + q^2$$

a) p b) q c) 0 d) 1 e) -1

8. Calcular "a" de manera que las 2 ecuaciones:

$$(5a - 2)x^2 - (a - 1)x + 2 = 0$$

$$(2b + 1)x^2 - 5x + 3 = 0$$

tengan las mismas raíces.

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{13}{3}$ e) $\frac{11}{3}$

9. En la ecuación $ax^2 -(a - 5)x + 1 = 0$, el producto de las raíces es igual a la diferencia de las mismas. Hallar la mayor raíz.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{5}$

10. Dar la ecuación de segundo grado cuyas raíces sean iguales a cada una de las raíces de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

aumentada en la inversa de la otra raíz, de esa misma ecuación.

a) $ax^2 +(c + a)x +(c + a) = 0$

b) $acx^2 + b(c - a)x +(c + a)^2 = 0$

c) $acx^2 + b(c + a)x +(c + a) = 0$

d) $acx^2 +bx +(c + a)^2 = 0$

e) $acx^2 +(a + b)x +(c + a)^2 = 0$

11. Para qué valor de "m" las raíces de la ecuación:

$$\frac{x^2 + 3x}{5x + 12} = \frac{m - 1}{m + 1}$$

serán iguales en magnitud, pero de signos contrarios.

a) 2 b) 3 c) 1 d) 4 e) 5

12. El resolver, una raíz será:

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

a) $\frac{ab}{a + b}$ b) $\frac{ab}{a - b}$ c) a - b

d) b - a e) a + b

13. Determinar "m" en la ecuación:

$x^2 -(3m - 2)x +(m^2 - 1) = 0$ de modo que una raíz sea triple de la otra.

a) 1 b) $\frac{11}{14}$ c) -1 d) $-\frac{11}{14}$ e) $\frac{14}{11}$

14. Calcular el valor de:

$$E = \left(1 + \sqrt{2}\right)^7 + \left(1 - \sqrt{2}\right)^7$$

a) 6 b) 14 c) 82 d) 478 e) 198

15. Calcular una de las raíces de las ecuaciones:

$$x^2 + px + q = 0\ , \quad x^2 + p'x + q' = 0$$

si ellas tienen una raíz común.

a) $\frac{pq - p'q'}{q - q}$ b) $\frac{pq' - p'q}{q' - q}$ c) $\frac{pq' - p'q}{q - q'}$

d) $\frac{q' - q}{p' - q}$ e) $\frac{q' - q}{pq' - p'q}$

16. Dadas las ecuaciones:

$$x^2 + pq + q' = 0$$

$$x^2 + p'x + q'' = 0$$

$$x^2 + p''x + q = 0$$

Hallar:

$$E = \frac{p + p' + p''}{q + q' + q''}$$

sabiendo que p y q son raíces de la primera, p' y q' son raíces de la segunda y p" y q" son raíces de la tercera.

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$ e) -1

17. Se han sacado 9 litros de un barril lleno de vino, después se han llenado con agua y de esta mezcla se han sacado otros nueve litros, y el barril es nuevamente llenado con agua. Si la cantidad de vino que queda en el barril es a la cantidad de agua que se le ha añadido como 16 es a 9. ¿Qué capacidad tiene el barril?

a) 42 b) 49 c) 45 d) 46 e) 48

18. Dos ciclistas parten al mismo tiempo de dos puntos A y B distantes 320 km ; uno de A en dirección a B y otro de B con dirección a A. El primero recorrió 8 km más por hora que el segundo y el número de horas que demoraron en encontrarse está representado por la mitad del número de km que el segundo recorrió en una hora, ¿cuál es la distancia recorrida por el primer ciclista?

a) 180 km b) 160 km c) 190 km

d) 182 km e) 192 km

19. Un grupo de hombres formados en cuadro de manera que el marco lo constituirán tres filas de hombres. Se observó que añadiendo 25 hombres se podía forrar un cuadro lleno, en el cual el número de hombres de cada lado excedería en 22 a la raíz cuadrada del número de hombres que había en el lado mayor del primitivo. Se pide hallar el número de hombres del lado mayor del primitivo.

a) 81 b) 144 c) 64 d) 25 e) 49

20. Dos campesinas llevaron al mercado 100 naranjas en total, una de ellas tenía una cantidad mayor de naranjas que la otra, no obstante ambas obtuvieron de la venta iguales sumas de dinero. Una vez vendidas todas, una de ellas, dijo a la otra: Si yo hubiera llevado la misma cantidad de naranjas que tú, habría recibido 15 soles. La segunda contestó: Si yo hubiera llevado las tuyas habría obtenido 6 2/3 nuevos soles. ¿Cuántas naranjas llevó la primera campesina?

a) 42 b) 49 c) 45 d) 46 e) 48

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) D	3) E	4) B	5) C
6) B	7) C	8) D	9) A	10) B
11) D	12) E	13) E	14) D	15) C
16) B	17) C	18) E	19) A	20) C

ECUACIONES REDUCTIBLES A CUADRATICAS

ECUACIONES BICUADRADAS

Son aquellas ecuaciones de cuarto grado de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Una ecuación bicuadrada se resuelve:

a) Factorizando e igualando a cero, ó

b) Haciendo $x^2 = y$, lo que transforma a la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo grado de la forma:

$$ay^2 + by + c = 0$$

cuyas raíces son:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pero: $x^2 = y$; luego $x = \pm\sqrt{y}$

Sustituyendo el valor de y:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Se observa que las raíces son dos a dos iguales pero de signos contrarios.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA

1º SUMA DE RAÍCES.- La suma de las raíces de una ecuación bicuadrada es siempre igual a cero.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

2º PRODÚCTO DE RAÍCES.- El producto de las raíces de una ecuación bicuadrada, es igual al término independiente, con su propio signo, dividido por el coeficiente de "x^4" es decir:

$$x_1 \, . \, x_2 \, . \, x_3 \, . \, x_4 = \frac{c}{4}$$

3º La suma de los productos binarios de las raíces es igual al coeficiente de "x^2" entre el coeficiente de x^4, es decir:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{b}{a}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA

Para formar una ecuación bicuadrada se utiliza la expresión:

$$x^4 + (x_1x_2 + x_3x_4)x^2 + (x_1x_2x_3x_4) = 0$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver

$$\left(x + 1 + \frac{8}{x}\right)\left(x - 1 + \frac{8}{x}\right) = 35$$

Solución:

Escribiendo de la siguiente manera:

$$\left[\left(x + \frac{8}{x}\right) + 1\right]\left[\left(x + \frac{8}{x}\right) - 1\right] = 35$$

efectuando operaciones:

$$\left(x + \frac{8}{x}\right)^2 - 1 = 35$$

$$x^2 + 16 + \frac{64}{x^2} - 1 = 35$$

de donde:

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

factorizando:

$$\therefore \quad (x^2 - 16)(x^2 - 4) = 0$$

Rpta.: $x_1 = \pm 4$

$x_2 = \pm 2$

2.- Resolver la ecuación bicuadrada:

$$c^4x^4 + c^2(a^2 - b^2)x^2 - a^2b^2 = 0$$

Solución:

Aplicando la fórmula de ecuación de segundo grado:

$$x^2 = \frac{-c^2(a^2 - b^2) \pm \sqrt{[c^2(a^2 - b^2)]^2 + 4c^4a^2b^2}}{2c^4}$$

$$x^2 = \frac{-c^2(a^2 - b^2) \pm \sqrt{c^4(a^2 - b^2)^2 + 4c^4a^2b^2}}{2c^4}$$

$$x^2 = \frac{-c^2(a^2 - b^2) \pm c^2\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}}{2c^4}$$

$$x^2 = \frac{c^2[-(a^2 - b^2) \pm \sqrt{a^2 + 2a^2b^2 + b^4}]}{2c^4}$$

$$x^2 = \frac{[-(a^2 - b^2) \pm (a^2 + b^2)]}{2c^2}$$

de aquí, se obtiene las cuatro raíces que son:

$$x_1 = +\frac{b}{c} \quad ; \quad x_3 = \frac{a}{c}i$$

$$x_2 = +\frac{b}{c} \quad ; \quad x_4 = \frac{a}{c}i$$

3.- Determinar "p" en la ecuación $x^2 - px + 14 = 0$ para que la diferencia de los cuadrados de las raíces sea igual a 21.

Solución:

Siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación de segundo grado se puede plantear.

Por dato: $\quad x_1^2 - x_2^2 = 21 \qquad (1)$

Por propiedades $\begin{cases} x_1 + x_2 = +p & (2) \\ x_1x_2 = 14 & (3) \end{cases}$

De (1): $\quad (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 21 \qquad (4)$

dividiendo (4) por (2):

$$x_1 - x_2 = \frac{21}{p} \qquad (5)$$

de las ecuaciones (2) y (5):

$$x_1 = \frac{p + \frac{21}{p}}{2}$$

$$x_2 = \frac{p - \frac{21}{p}}{2}$$

sustituyendo en (3):

$$\left(\frac{p + \frac{21}{p}}{2}\right)\left(\frac{p + \frac{21}{p}}{2}\right) = 14$$

$$p^2 - \frac{441}{p^2} = 56$$

$$p^4 - 56p^2 - 441 = 0$$

factorizando:

$$(p^2 - 63)(p^2 + 7) = 0$$

Rpta.: $\quad p_1 = \pm\sqrt{63}$

$\qquad\quad p_2 = \pm\sqrt{7}\,i$

4.- En la ecuación bicuadrada, determinar "m" con la condición que las raíces de:

$$x^4 - (3m + 4)x^2 + (m + 1)^2 = 0$$

estén en progresión aritmética

Solución:

Sean las 4 raíces en progresión aritmética:

$x_1 = a - 3r \qquad x_2 = a - r$

$x_3 = a + r \qquad x_4 = a + 3r$

Por la propiedad de la suma de raíces:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a - 3r + a - r + a + r + a + 3r = 0$

de donde se obtiene: $a = 0$

por lo tanto, las raíces son: $-3r$, $-r$, r, $3r$. Conocidas las raíces la ecuación es:

$$(x + 3r)(x + r)(x - r)(x - 3r) \equiv x^4 - (3m + 4)x^2 + (m + 1)^2$$

efectuando, se obtiene:

$$x^4 - 10r^2x^2 + 9r^4 \equiv x^4 - (3m + 4)x^2 + (m + 1)^2$$

identificando coeficientes:

$$10r^2 = 3m + 4 \qquad (\alpha)$$

$$9r^4 = (m + 1)^2 \qquad (\beta)$$

Extrayendo raíz cuadrada en (β)

$$3r^2 = (m + 1)$$

$$r^2 = \frac{m + 1}{3}$$

sustituyendo este valor en (α):

$$10\left(\frac{m+1}{3}\right) = 3m + 4$$

$$10m + 10 = 9m + 12$$

$\therefore \quad m = 2$

5.- Resolver:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

Solución:

Efectuando:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{10}{9}$$

Eliminando denominadores:

$$9x^2 (x+1)^2 + 9x^2 (x-1)^2 = 10(x-1)^2 (x+1)^2$$

$$9x^2 \left[(x+1)^2 + (x-1)^2\right] = 10\left[(x-1)(x+1)\right]^2$$

aplicando Legendre en el primer corchete, y efectuando:

$$9x^2 \left[2(x^2+1)\right] = 10(x^2-1)^2$$

$$18x^2(x^2+1) = 10(x^4 - 2x^2 + 1)$$

$$18x^4 + 18x^2 = 10x^4 - 20x^2 + 10$$

$$8x^4 + 38x^2 - 10 = 0$$

dividiendo entre 2:

$$4x^4 + 19x^2 - 5 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 4x^2 & & -1 \\ x^2 & & +5 \end{array}$$

$$(4x^2 - 1)(x^2 + 5) = 0$$

Igualando cada factor a cero:

$$4^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \pm\sqrt{5}\, i$$

6.- Resolver:

$$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 8x^4 + 30x^2 - 6$$

Solución:

Efectuando las potencias:

$$(x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) - (x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1) = 8x^4 + 30x^2 - 6$$

reduciendo términos semejantes:

$$10x^4 + 20x^2 + 2 = 8x^4 + 30x^2 - 6$$

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$$

simplificando y factorizando:

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

cada factor se iguala a cero

$$x^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \pm 2$$

$$x^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \pm 1$$

ECUACIONES RECÍPROCAS

Son aquellas que tienen los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos iguales en valor y en signo. Su forma general es:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$$

Reciben este nombre porque no varían cuando se sustituye "x" por su recíproco "1/x".

La resolución de este tipo de ecuaciones se muestra a través de los ejercicios.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver

$$2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$$

Solución:

Para resolver una ecuación recíproca se procede así:

Se divide todo por x^2:

$$2x^2 - x - 6 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

Agrupando adecuadamente:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0 \qquad \text{(A)}$$

Haciendo:

$$x + \frac{1}{x} = y \qquad \text{(B)}$$

por lo que:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Sustituyendo estos parámetros en (A):

$$2y^2 - y - 10 = 0$$

de donde:

$$y_1 = -2 \;\; ; \;\; y_2 = 5/2$$

Sustituyendo estos valores en (B):

1) $x + \frac{1}{x} = -2$

$\therefore \quad x_1 = -1 \; ; \; x_2 = -1$

2) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

$\therefore \quad x_3 = 2 \; ; \; x_4 = \frac{1}{2}$

2.- Resolver la ecuación:

$$3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$$

Solución:

Agrupemos convenientemente:

$$3(x^3 - 1) - 13x(x - 1) = 0$$

factorizando:

$$3(x - 1)(x^2 + x + 1) - 13x(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(3x^2 + 3x + 3 - 13x) = 0$$

$$(x - 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0$$

Igualando a cero cada factor:

$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

$3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$

$x_3 = + \frac{1}{3}$

3.- Resolver la ecuación:

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Solución:

Agrupando así:

$$(x^5 + 1) - 4x\,(x^3 + 1) + 3x^2(x + 1) = 0$$

factorizando:

$$(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 4x(x + 1)(x^2 - x + 1) + 3x^2(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3x^2) = 0$$

$$(x + 1)(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1) = 0$$

igualando a cero cada factor:

(1) $x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \qquad$ (I)

(2) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ (ec. recíproca)

dividiendo por "x^2":

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

agrupando:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

haciendo:

$$x + \frac{1}{x} = y \quad ; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

sustituyendo estos cambios en la ecuación:

$$y^2 - 2 - 5y + 8 = 0$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6)}}{2}$$

$\therefore \quad y_1 = 3 \; ; \; y_2 = 2$

Sustituyendo los valores de y:

A) $x + \frac{1}{x} = 3$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 3$$

$$x^2 + 1 = 3x$$

igualando a cero

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

resolviendo:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

B) Ademas: $x + \frac{1}{x} = 2$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 2$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

igualando a cero:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

resolviendo:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$

$\therefore \quad x_3 = 1 = x_4$

4.- Resolver:

$$x^7 + 8x^6 + 17x^5 + 9x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$$

Solución:

Este es un proceso especial de recíprocas y sólo se aplica a las expresiones de grado **impar** y admite la raíz x = -1.

Aplicando Ruffini para obtener el otro factor:

	1	+8	+17	+9	+9	+17	+8	+1	
	↓								
-1		-1	-7	-10	+1	-10	-7	-1	
	1	+7	+10	-1	+10	+7	+1		0

La ecuación factorizada será:

$$(x^6 + 7x^5 + 10x^4 - x^3 + 10x^2 + 7x + 1)(x - 1) = 0$$

Igualando cada factor a cero:

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{(primera solución)}$$

$$x^6 + 7x^5 + 10x^4 - x^3 + 10x^2 + 7x + 1 = 0$$

que es una ecuación recíproca de grado par, que dividiendo entre x^3:

$$x^3 + 7x^2 + 10x - 1 + \frac{10}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$$

agrupando los términos de igual coeficiente:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 7\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

haciendo:

$$x + \frac{1}{x} = y \qquad (1)$$

elevando (1) al cuadrado:

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \qquad (2)$$

elevando (1) al cubo:

$$x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = y^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{1}\right) = y^3 \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) en (3):

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y \qquad (4)$$

Sustituyendo (1), (2) y (4) en la ecuación:

$$(y^3 - 3y) + 7(y^2 - 2) + 10y - 1 = 0$$

$$y^3 - 3y + 7y^2 - 14 + 10y - 1 = 0$$

$$y^3 + 7y^2 + 7y - 15 = 0$$

aplicando evaluación para factorizar:
Para y = 1.

$$V.N. = (1)^3 + 7(1)^2 + 7(1) - 15 = 0$$

dividiendo por Ruffini:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & +7 & +7 & -15 \\
 & \downarrow & & & \\
1 & & +1 & +8 & +15 \\
\hline
 & 1 & +8 & +15 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Luego, el polinomio factorizado es:

$$(y - 1)(y^2 + 8y + 15) = 0$$

$$(y - 1)(y + 3)(y + 5) = 0$$

igualando cada factor a cero:

$$y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad (a)$$

$$y + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -3 \quad (b)$$

$$y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -5 \quad (c)$$

Sustituyendo "y" por $x + \frac{1}{x}$

(a) $x + \frac{1}{x} = 1 \;;\; x^2 - x + 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \;;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

(2ª y 3ª solución)

(b) $x + \frac{1}{x} = -3 \;;\; x^2 + 3x + 1 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \;;\; x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(4ª y 5ª solución)

(c) $x + \frac{1}{x} = -5 \;;\; x^2 + 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} \;;\; x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

(6ª y 7ª solución)

ECUACIONES BINOMIAS Y TRINOMIAS

A) Se denomina ecuaciones binomias a aquellas ecuaciones enteras que solamente tienen dos términos. Son de la forma:

$$Ax^n + b = 0$$

Para resolver se factoriza y se iguala cada factor a cero o se utiliza la fórmula de Moivré.

B) Ecuación trinomia es aquella ecuación entera que tiene solamente 3 términos; de los cuales, dos tienen incógnitas y en ellos los exponentes de la incógnita son el uno duplo del otro, son de la forma:

$$ax^2n + bxn + c = 0$$

Para resolver, se factoriza y se iguala a cero cada factor o se hace el cambio de variable $x^n = y$, con lo cual la ecuación toma la forma de una ecuación de segundo grado y de ésta, se obtiene dos ecuaciones binomias.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver: $x^3 - 27 = 0$

Solución:

Factorizando el primer miembro:

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$$

igualando a cero cada factor:

a) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

b) $x^2 + 3x + 9 = 0 \;;\; x = \dfrac{1 \pm \sqrt{27}\, i}{2}$

Rpta.:

$$x_1 = 3 \;;\; x = \frac{-3 + 3\sqrt{3}\, i}{2}$$

$$x_3 = \frac{-3 - 3\sqrt{3}\, i}{2}$$

2.- Resolver: $x^4 + 625 = 0$

Solución:

Factorizando; para lo cual se suma y resta $50x^2$:

$$(x^4 + 50x^2 + 625) - 50x^2 = 0$$

$$(x^2 + 25)^2 - \left(\sqrt{50}\, x\right)^2 = 0$$

$$\left(x^2 + 25 + \sqrt{50}\, x\right)\left(x^2 + 25 - \sqrt{50}\, x\right) = 0$$

igualando a cero cada factor:

$$x^2 + \sqrt{50}\,x + 25 = 0$$

$$x^2 - \sqrt{50}\,x + 25 = 0$$

resolviendo se obtiene cuatro raíces:

$$\text{Rpta.:}\begin{cases} x_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}(1+i) \;;\; x_3 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}(1-i) \\[2ex] x_2 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}(-1+i) \;;\; x_4 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}(-1-i) \end{cases}$$

3.- Resolver: $x^5 - 243 = 0$

Solución:

Despejando el valor de "x"

$$x^5 = 243 \;;\; x = 3\sqrt[5]{1}$$

las raíces serán las raíces quintas de la unidad multiplicadas por 3, aplicando MOIVRE:

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1+0i} = \sqrt{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0}$$

$$= \cos\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right)$$

Para K = 0:

$$\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

Para K = 1:

$$\cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Para K = 2:

$$\cos\frac{4\pi}{5} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Para K = 3:

$$\cos\frac{6\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Para K = 4:

$$\cos\frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\text{Rpta.:}\begin{cases} x_1 = 3 \\[1ex] x_2 = 3\left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right\} \\[2ex] x_3 = 3\left\{-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right\} \\[2ex] x_4 = 3\left\{-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4} - i\,\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right\} \\[2ex] x_5 = 3\left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} - i\,\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right\} \end{cases}$$

4.- Resolver: $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

Solución:

Haciendo $x^4 = y$ se obtiene:

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

de donde:

$$(y - 16)(y + 1) = 0$$

Se tendrá:

$$(x^4 - 16)(x^4 + 1) = 0$$

igualando cada factor a cero:

a) $x^4 - 16 = 0$

$$(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i) = 0$$

de donde:

$x_1 = -2$ $\qquad$ $x_2 = 2$

$x_3 = 2i$ $\qquad$ $x_4 = -2i$

b) $x^4 + 1 = 0$

$$x^4 = -1$$

$$x = \sqrt[4]{-1}$$

aplicando MOIVRE:

$$x = \sqrt[4]{\cos 180° + i \text{ sen } 180°}$$

$$= \cos\left(\frac{180° + 2k\pi}{4}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{180° + 2k\pi}{4}\right)$$

Para k = 0:

$$x_5 = \cos 45° + i \text{ sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

Para k = 1:

$$x_6 = \cos 135° + i \text{ sen } 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$$

Para k = 2:

$$x_7 = \cos 225° + i \text{ sen } 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

Para k = 3:

$$x_8 = \cos 315° + i \text{ sen } 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

Rpta.: $$\begin{cases} x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2i, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_4 = -2i \\ x_5 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \quad x_6 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \\ x_7 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \quad x_8 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \end{cases}$$

ECUACIONES QUE SE RESUELVEN MEDIANTE ARTIFICIOS

Mediante el empleo de incógnitas auxiliares se llega a una ecuación de una forma conocida.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver la ecuación:

$$(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5$$

Solución:

Multipliquemos ambos miembros por 24 y acomodando este factor a los factores segundo, tercero y cuarto de manera que aparezca 12 en cada uno de ellos:

$$(12x - 1)[2(6x - 1)][3(4x - 1)][4(3x - 1)] = 5 \,.\, 24$$

$$(12x - 1)(12x - 2)(12x - 3)(12 - 4) = 120$$

haciendo:

$$12x = y \qquad (I)$$

entonces:

$$(y - 1)(y - 2)(y - 3)(y - 4) = 120$$

La única alternativa que queda es efectuar el producto; éste se debe realizar de tal modo que se generen términos comunes en los productos obtenidos. Ordenando en forma conveniente:

$$(y - 1)(y - 4)(y - 2)(y - 3) = 120$$

$$(y^2 - 5y + 4)(y^2 - 5y + 6) = 120$$

haciendo:

$$y^2 - 5y = z \qquad (II)$$

$$(z + 4)(z + 6) = 120$$

$$z^2 + 10z + 24 = 120$$

$$z^2 + 10z - 96 = 0$$

$$(z + 16)(z - 6) = 0$$

A) $z - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 6$

B) $z + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -16$

Sustituyendo valores en (II):

Para z = 6:

$$y^2 - 5y = 6$$

$$y^2 - 5y - 6 = 0$$

$$(y - 6)(y + 1) = 0$$

de donde se obtiene:

$$y_1 = 6, \; y_2 = -1$$

Sustituyendo en (I)

$y = 6$:

$12x = 6$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

$y = -1$:

$12x = -1$

$$\therefore \quad x_2 = -\frac{1}{12}$$

Para $z = -16$:

$$y^2 - 5y = -16$$

$$y^2 - 5y + 16 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(16)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{39}\, i}{2}$$

Sustituyendo en (I) valores hallados de y:

(A) $12x = \dfrac{5 + \sqrt{39}\, i}{2} \Rightarrow x_3 = \dfrac{5 + \sqrt{39}\, i}{24}$

(B) $12x = \dfrac{5 - \sqrt{39}\, i}{2} \Rightarrow x_4 = \dfrac{5 - \sqrt{39}\, i}{24}$

$$\text{Rpta.:} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad x_3 = \dfrac{5 + \sqrt{39}\, i}{24} \\[2ex] x_2 = \dfrac{1}{12} \quad ; \quad x_4 = \dfrac{5 - \sqrt{39}\, i}{24} \end{cases}$$

2.- Resolver:

$$3x^2 - 7 + 3\sqrt{3x^2 - 16x + 21} = 16x$$

Solución:

Transponiendo términos e igualando a cero:

$$3x^2 - 16x - 7 + 3\sqrt{3x^2 - 16x + 21} = 0$$

Se observa que $3x^2 - 16x$ es una cantidad que se repite y para conseguir la cantidad subradical se debe sumar 21; sumando y restando 21:

$$(3x^2 - 16x + 21) - 7 - 21 + 3\sqrt{3x^2 - 16x + 21} = 0 \quad \text{(I)}$$

haciendo:

$$\sqrt{3x^2 - 16x + 21} = y$$

$$3x^2 - 16x + 21 = y^2 \qquad \text{(II)}$$

considerar $y > 0$; sustituyendo en (I):

$$y^2 + 3y - 28 = 0$$

$$(y + 7)(y - 4) = 0$$

a) $y + 7 = 0 \Rightarrow y = -7$

(Solución que no satisface porque el radical tiene signo positivo).

b) $y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$

pero por (II):

$$3x^2 - 16x + 21 = 16$$

$$3x^2 - 16x + 5 = 0$$

$$(3x - 1)(x - 5) = 0$$

de donde: $x_1 = \dfrac{1}{3}$; $x_2 = 5$

3.- Resolver:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 - 2x + 14}} = 2$$

Solución:

Notar que cada término irracional es el inverso del otro; por lo que se hace:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} = y \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} = \frac{1}{y}$$

siendo $y > 0$

Sustituyendo en la ecuación:

$$y + \frac{1}{2} = 2$$

$$y^2 + 1 = 2y$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(y - 1)^2 = 0$$

$$y = 1$$

Sustituyendo en (1):

$$\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2}} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2x + 14}{x^2 + 4x + 2} = 1$$

$$x^2 - 2x + 14 = x^2 + 4x + 2$$

luego:

$$6x = 12 \;\; ; \;\; x = 2$$

4.- Resolver:

$$\sqrt[5]{(2 + x)^2} + 2\sqrt[5]{(2 - x)^2} = 3\sqrt[5]{4 - x^2}$$

Solución:

Dividiendo toda la ecuación entre $\sqrt[5]{4 - x^2}$:

$$\frac{\sqrt[5]{(2 + x)^2}}{\sqrt[5]{4 - x^2}} + \frac{2\sqrt[5]{(2 - x)^2}}{\sqrt[5]{4 - x^2}} = \frac{3\sqrt[5]{4 - x^2}}{\sqrt[5]{4 - x^2}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{(2 + x)^2}{(2 + x)(2 - x)}} + 2\sqrt[5]{\frac{(2 - x)^2}{(2 + x)(2 - x)}} = 3$$

$$\sqrt[5]{\frac{2 + x}{2 - x}} + 2\sqrt[5]{\frac{2 - x}{2 + x}} = 3$$

haciendo:

$$\sqrt[5]{\frac{2 + x}{2 - x}} = y \;\; ; \;\; \sqrt[5]{\frac{2 - x}{2 + x}} = \frac{1}{y}$$

se tendrá:

$$y + \frac{2}{y} = 3$$

$$y^2 + 2 = 3y$$

$$y^2 - 2y + 2 = 0$$

$$(y - 2)(y - 1) = 0$$

de donde:

$$y = 2 \;\; ; \;\; y = 1$$

a) Para y = 2:

$$\sqrt[5]{\frac{2 + x}{2 - x}} = 2$$

$$\frac{2 + x}{2 - x} = 32$$

$$2 + x = 64 - 32x$$

$$33x = 62$$

$$x_1 = \frac{62}{33}$$

b) Para y = 1:

$$\sqrt[5]{\frac{2 + x}{2 - x}} = 1$$

$$\frac{2 + x}{2 - x} = 1$$

$$2 + x = 2 - x$$

$$2x = 0$$

$$x_1 = 0$$

Rpta.: $x_1 = \frac{63}{33}$; $x_2 = 0$

5.- Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} + \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 9$$

Solución:

Haciendo:

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} = A$$

$$3x^2 - 4x + 34 = A^2 \qquad (1)$$

También haciendo:

$$\sqrt{3x^3 - 4x - 11} = B$$

$$3x^3 - 4x - 11 = B^3 \qquad (2)$$

restando las ecuaciones (1) - (2):

$$A^2 - B^2 = 45 \qquad (3)$$

además según la ecuación propuesta:

$$A + B = 9 \qquad (4)$$

Dividiendo la ecuación (3) por la ecuación (4), se tiene:

$$A - B = 5 \qquad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5) se obtiene:

$$A = \frac{9 + 5}{2} = 7$$

$$B = \frac{9 - 5}{2} = 7$$

En (1): $3x^2 - 4x + 34 = 7^2$

$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$(3x + 5)(x - 3) = 0$$

de donde:

$$x_1 = -\frac{5}{3} \ ; \ x_2 = 3$$

En (2): $3x^2 - 4x - 11 = 2^2$

$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

que es igual a la ecuación anterior, luego las soluciones son las mismas.

Rpta.: $x_1 = -\frac{5}{3} \quad ; \quad x_2 = 3$

6.- Resolver:

$$x\left(\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2}\right) = bc$$

Solución:

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$x^2\left(b^2 - x^2 + c^2 - x^2 + 2\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{c^2 - x^2}\right) = b^2c^2$$

efectuando:

$$(b^2 + c^2)x^2 - x^4 - x^4 + 2x^2\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{c^2 - x^2} = b^2c^2$$

transponiendo términos:

$$-x^4 + 2x^2\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{c^2 - x^2} = b^2c^2 - (b^2 + c^2)x^2 + x^4$$

factorizando el segundo miembro de la ecuación:

$$-x^4 + 2x^2\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{c^2 - x^2} = (b^2 - x^2)(c^2 - x^2)$$

Igualando a cero:

$$-x^4 + 2x^2\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{c^2 - x^2} - (b^2 - x^2)(c^2 - x^2) = 0$$

efectuando cambio de signos:

$$x^4 - 2x^2\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{c^2 - x^2} + (b^2 - x^2)(c^2 - x^2) = 0$$

el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto, igual a:

$$\left(x^2 - \sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{c^2 - x^2}\right)^2 = 0$$

sacando la raíz cuadrada:

$$x^2 - \sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{c^2 - x^2} = 0$$

$$x^2 = \sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{c^2 - x^2}$$

elevando al cuadrado:

$$x^4 = b^2c^2 - (b^2 + c^2)x^2 + x^4$$

$$x^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} \qquad x = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

7.- Resolver:

$$\frac{\sqrt[n]{a + x}}{a} + \frac{\sqrt[n]{a + x}}{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}$$

Solución:

Sacando el factor común en el primer miembro:

$$\sqrt[n]{a + x}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}$$

$$\sqrt[n]{a + x}\left(\frac{a + x}{ax}\right) = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}$$

Elevando a la potencia "n" a sus miembros:

$$(a + x)\left(\frac{a + x}{ax}\right)^2 = \frac{x}{b^n}$$

$$\frac{(a + x)^{n+1}}{a^nx^n} = \frac{x}{b^n}$$

$$\frac{(a + x)^{n+1}}{x^{n+1}} = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a+x}{x}\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{a}{x}+1\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$$

aplicando raíz (n + 1) a ambos:

$$\frac{a}{x} + 1 = \sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}$$

$$\frac{a}{x} = \sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} - 1$$

Rpta.: $$x = \frac{a}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} - 1}$$

8.- Resolver:

$$4\left[(x^2-16)^{3/4} + 8\right] = x^2 + 16(x^2-16)^{1/4}$$

Solución:

Haciendo:

$$(x^2-16)^{1/4} = y$$

$$(x^2-16)^{3/4} = y^3$$

$$x^2 - 16 = y^4$$

de donde:

$$x^2 = y^4 + 16 \qquad \text{(I)}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación propuesta:

$$4\,(y^3 + 8) = y^4 + 16 + 16y$$

$$4y^3 + 32 = y^4 + 16 + 16y$$

$$y^4 - 4y^3 + 16y - 16 = 0$$

factorizando por agrupación:

$$(y^2+4)(y^2-4) - 4y(y^2-4) = 0$$

$$(y^2-4)(y^2+4-4y) = 0$$

igualando cada factor a cero:

a) $y^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

sustituyendo en (I):

$$x^2 = 2^4 + 16 = 32$$

$$x = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$$

b) $y^2 + 4 - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad (y-2)^2 = 0$

$$y = 2$$

sustituyendo en (I):

$$x = \pm 4\sqrt{2} \text{ (la misma solución)}$$

9.- Resolver:

$$\frac{1+x - \sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}} = a^3\left(\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}\right)$$

Solución:

Multiplicando por 2 numerador y denominador del primer miembro y agrupando convenientemente:

$$\frac{2+2x - 2\sqrt{2x+x^2}}{2+2x+2\sqrt{2x+x^2}} = a^3\left(\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}\right)$$

que se puede escribir como:

$$\frac{(2+x) - 2\sqrt{(2+x)x} + x}{(2+x) + 2\sqrt{(2+x)x} + x} = a^3\left(\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}\right)$$

Numerador y denominador de la primera fracción son trinomios cuadrados perfectos que se pueden escribir así:

$$\left[\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right]^2 = a^3\left(\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}\right)$$

transponiendo:

$$\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^3 = a^3$$

sacando raíz cúbica a ambos:

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}} = \frac{a}{1}$$

por propiedad de proporciones:

$$\frac{2\sqrt{2+x}}{-2\sqrt{x}} = \frac{a+1}{a-1}$$

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$\frac{2+x}{x} = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$$

$$\frac{2}{x} + 1 = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$$

$$\frac{2}{x} = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 - 1$$

$$\frac{2}{x} = \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2}{(a-1)^2}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{4a}{(a-1)^2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{(a-1)^2}{2a}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar el valor de "m" si las raíces de la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - (m+4)x^2 + 4m = 0$$

están en progresión aritmética.

a) 15 b) 17 c) 36 d) 26 e) 41

2. Resolver la ecuación:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = b^2 + \frac{1}{b^2}$$

a) b^2 b) $\frac{1}{b}$ c) $\frac{1}{b^2}$ d) $-b^2$ e) $-\frac{1}{b^2}$

3. Calcular una raíz de la ecuación:

$$\sqrt[5]{20 - 20x + x^2} + \sqrt[5]{13 + 20x - x^2} = 3$$

a) -19 b) 2 c) -2 d) 19 e) 3

4. Resolver y dar una raíz de:

$$\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{3-2x^2}}$$

a) $\sqrt{\frac{10}{13}}$ b) $\sqrt{\frac{13}{10}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

5. Resolver la ecuación:

$$x^4 - 5x^2 - 6x - 5 = 0$$

a) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1+\sqrt{2}\,i}{4}$

d) $\frac{1-\sqrt{2}\,i}{2}$ e) 1

6. Resolver la ecuación:

$$\sqrt[n]{x} + 6\sqrt[m]{x} = 5\sqrt[2mn]{x^{m+n}}$$

a) $\sqrt[m-n]{6^{2mn}}$ b) $\sqrt[m+n]{2^{mn}}$ c) $\sqrt[m+n]{3^{mn}}$

d) $\sqrt[m-n]{6^{mn}}$ e) $\sqrt[m-n]{2^{2mn}}$

7. Resolver la ecuación:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2+x^2} + \sqrt[3]{a^2-x^2}}{\sqrt[3]{a^2+x^2} + \sqrt[3]{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{b^2}$$

a) $\sqrt{\frac{3a^4+b^4}{a^4+3b^4}}$ b) $\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{a^4-3b^4}}$ c) $a\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{a^4-3b^4}}$

d) $b\sqrt{\frac{3a^4+b^4}{a^4+3b^4}}$ e) $b\sqrt{\frac{a^4+3b^4}{3a^4+b^4}}$

8. Resolver la ecuación:

$$(x-a)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}-(x-c)^{\frac{1}{2}}(x-d)^{\frac{1}{2}}=(a-c)^{\frac{1}{2}}(b-d)^{\frac{1}{2}}$$

a) $\dfrac{ad+bc}{a+b+c+d}$ b) $\dfrac{ad-bc}{a+b+c+d}$ c) $\dfrac{ad-bc}{a-b-c+d}$

d) $\dfrac{ad+bc}{a-b-c+d}$ e) $\dfrac{ad+bc}{a-b+c-d}$

9. Resolver la ecuación:

$$1+x^4=7(1+x)^4$$

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ b) $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ c) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

d) $\dfrac{5+\sqrt{11}\,i}{2}$ e) $\dfrac{5-\sqrt{11}\,i}{2}$

10. Hallar una de las raíces de la ecuación:

$$3x^2(x^2+8)+16(x^3-1)=0$$

a) $-\dfrac{2}{3}$ b) 1 c) -1 d) 2 e) -2

11. Hallar una de las raíces de la ecuación:

$$x^5-4x^4-10x^3+40x^2+9x-36=0$$

a) 5 b) - 5 c) 2 d) -2 e) 4

12. Resolver: $\dfrac{1(x+1)(x-3)}{5(x+2)(x-4)}+\dfrac{1(x+3)(x-5)}{9(x+4)(x-6)}$

$$-\frac{2(x+5)(x-7)}{13(x+6)(x-8)}=\frac{92}{585}$$

a) $1+\sqrt{9}$ b) $1-\sqrt{9}$ c) $1+\sqrt{19}$

d) $1+\sqrt{19}\,i$ e) $1-\sqrt{19}\,i$

13. Resolver: $\sqrt[4]{x+27}+\sqrt[4]{55-x}=4$

a) 26 b) -54 c) -26 d) 14 e) -14

14. Resolver:

$$12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12=0$$

a) -1 b) -2/3 c) -3/2 d) 1/2 e) 2

15. Una de las raíces de la ecuación:

$$\sqrt[7]{x}+\sqrt[5]{x}=3\sqrt[35]{x^6}$$

tiene la forma: $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Calcular "n".

a) 7 b) 5 c) 35 d) 2 e) 3

16. Resolver la ecuación:

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x+343}=7$$

a) 343 b) 7 c) -343 d) -7 e) 0

17. Resolver la ecuación:

$$\sqrt[4]{\sqrt{5}+x}-\sqrt[6]{5-x^2}=\sqrt[3]{\sqrt{5}-x}$$

a) $\dfrac{15}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e) $\sqrt{\dfrac{10}{3}}$

18. Resolver la ecuación:

$$x^4-x^2+\sqrt{x^4-1}=\frac{2x^2\sqrt{x^4-1}+2(x^2+1)}{4}$$

a) $\dfrac{15}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

19. Resolver la ecuación:

$$\sqrt[5]{18+x}+\sqrt[5]{15-x}=3$$

a) 14 b) 18 c) -14 d) 17 e) 19

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) B	3) D	4) B	5) D
6) E	7) D	8) C	9) B	10) E
11) E	12) C	13) C	14) E	15) C
16) E	17) B	18) D	19) A	

SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver el sistema:

$$x + y = 12 \qquad (1)$$

$$xy = 35 \qquad (2)$$

Solución:

Dada la suma y el producto de dos números, se puede formar una ecuación de segundo grado de acuerdo a la propiedad de las raíces de una ecuación de segundo grado; entonces, sean "x" e "y" las raíces de la ecuación:

$$t^2 - 12t + 35 = 0$$

factorizando:

$$(t - 7)(t - 5) = 0$$

$$\therefore \qquad t_1 = 7 \quad y \quad t_2 = 5$$

siendo 7 y 5 las raíces se tendrá:

$$x = 7 \ , \ y = 5$$

o:

$$x = 5 \ , \ y = 7$$

2.- Resolver el sistema:

$$x + y = 10 \qquad (I)$$

$$x^2 + y^2 = 58 \qquad (II)$$

Solución:

Como se conoce la suma, se busca el producto para formar ecuación de segundo grado.

Elevando el cuadrado la ecuación (I):

$$x^2 + 2xy + y^2 = 100 \qquad (III)$$

Sustituyendo (II) en (III):

$$2xy + 58 = 100$$

$$xy = 21 \qquad (IV)$$

De (I) y (IV):

$$x = 7 \ , \ y = 3$$

o:

$$x = 3 \ , \ y = 7$$

3.- Resolver el sistema:

$$x^3 + y^3 = 35 \qquad (I)$$

$$x + y = 5 \qquad (II)$$

Solución:

En (I), factorizando la suma de cubos:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 35$$

que se puede escribir como:

$$(x + y)\left[(x + y)^2 - 3xy\right] = 35 \qquad (III)$$

Sustituyendo (II) en (III):

$$(5)(25 - 3xy) = 35 \ ; \ xy = 6 \qquad (IV)$$

De (II) y (IV) se obtiene:

$$x = 2 \ , \ y = 3$$

o:

$$x = 3 \ , \ y = 2$$

4.- Resolver el sistema:

$$x + y - \sqrt{xy} = 19 \qquad (I)$$

$$x^2 + y^2 + xy = 931 \qquad (II)$$

Solución:

En la ecuación (II) sumando y restando xy:

$$(x^2 + 2xy + y^2) - xy = 931$$

$$(x + y)^2 - \left(\sqrt{xy}\right)^2 = 931$$

$$\left(x + \sqrt{xy} + y\right)\left(x - \sqrt{xy} + y\right) = 931 \quad (III)$$

Dividiendo (III) entre (I)

$$x + \sqrt{xy} + y = 49 \qquad (IV)$$

Sumando (I) y (IV):

$$2(x + y) = 68$$

$$x + y = 34 \qquad (V)$$

Restando (IV) menos (I):

$$2\sqrt{xy} = 30$$

$$xy = 225 \qquad (VI)$$

De (V) y (VI) se obtiene:

$$x = 25 \quad , \quad y = 9$$

o:

$$x = 9 \quad , \quad y = 25$$

5.- Resolver:

$$(x - y)(x^2 - y^2) = 288$$

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 400$$

Solución:

Efectuando operaciones en ambas ecuaciones:

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 288 \qquad (I)$$

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 400 \qquad (II)$$

Sumando (I) más (II):

$$2\,(x^3 + y^3) = 688$$

$$x^3 + y^3 = 344$$

$$(x + y)\,[(x + y)^2 - 3xy] = 344$$

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) = 344 \qquad (III)$$

Restando (II) menos (I):

$$2xy(x + y) = 112$$

$$xy(x + y) = 56$$

Multiplicando por 3:

$$3xy(x + y) = 168 \qquad (IV)$$

Sumando (III) y (IV):

$$(x + y)^3 = 512$$

$$x + y = 8 \qquad (V)$$

Sustituyendo (V) en (IV):

$$xy = 7 \qquad (VI)$$

De (V) y (VI) se obtiene:

$$x = 1 \quad , \quad y = 7$$

o:

$$x = 7 \quad , \quad y = 1$$

6.- Resolver el sistema:

$$x + y + z = 13 \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 65 \qquad (2)$$

$$xy = 10 \qquad (3)$$

Solución:

De la ecuación (3):

$$2xy = 20$$

Sumando (2) y (3):

$$(x^2 + 2xy + y^2) + z^2 = 85$$

haciendo $x + y = u$:

$$u^2 + z^2 = 85 \qquad (4)$$

igualmente, haciendo $x + y = u$ en (1):

$$u + z = 13 \qquad (5)$$

de las ecuaciones (4) y (5):

$$u = 7 \quad , \quad z = 6$$

o:

$$u = 6 \quad , \quad z = 7$$

Para: $u = 7$, $z = 6$:

$$x + y = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \, , \; y = 5$$

$$xy = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \, , \; y = 2$$

Para: $u = 6$, $z = 7$:

$$x + y = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \pm i$$

$$xy = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \pm i$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \text{ ó } 2 \\ y = 2 \text{ ó } 5 \\ z = 6 \end{array} \right. \qquad \text{o} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \pm i \\ y = 3 \pm i \\ z = 7 \end{array} \right.$$

7.- Resolver el sistema:

$$(x + y)(x + z) = 30 \qquad (1)$$

$$(y + z)(y + x) = 15 \qquad (2)$$

$$(z + x)(z + y) = 18 \qquad (3)$$

Solución:

Multiplicando miembro a miembro (1), (2) y (3) se tiene:

$$(x + y)^2 (x + z)^2 (y + z)^2 = 30 . 15 . 18 = 15^2 . 6^2$$

Extrayendo raíz cuadrada:

$$(x + y)(x + z)(y + z) = \pm 15 . 6 \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (4):

$$18(x + y) = \pm 15 . 6$$

$$x + y = \pm 5 \qquad (I)$$

Sustituyendo (2) en (4):

$$15(x + z) = \pm 15 . 6$$

$$x + z = \pm 6 \qquad (II)$$

Sustituyendo (1) en (4):

$$30(y + z) = \pm 15 . 6$$

$$y + z = \pm 3 \qquad (III)$$

De (I), (II) y (III) se obtiene:

Rpta.: $\begin{cases} x_1 = 4 \quad , \quad y_1 = 1 \quad , \quad z_1 = 2 \\ x_2 = -4 \quad , \quad y_2 = -1 \quad , \quad z_2 = -2 \end{cases}$

8.- Resolver el sistema:

$$y^2 + yz + z^2 = 49 \qquad (1)$$

$$z^2 + zx + x^2 = 19 \qquad (2)$$

$$x^2 + xy + y^2 = 39 \qquad (3)$$

Solución:

Restando (1) - (2):

$$y^2 - x^2 + yz - zx = 30$$

$$(y + x) (y - x) + z(y - x) = 30$$

$$(y - x)(y + x + z) = 30 \qquad (4)$$

Restando (1) - (3):

$$z^2 - x^2 + yz - xy = 10$$

$$(z - x)(z + x) + y(z - x) = 10$$

$$(z - x)(z + x + y) = 10 \qquad (5)$$

Dividiendo (4) por (5):

$$\frac{y - x}{z - x} = 3$$

$$y - x = 3z - 3x$$

$$y = 3z - 2x \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (3):

$$x^2 + x(2z - 2x) + (3z - 2x)^2 = 39$$

$$x^2 + 3xz - 2x^2 + 9z^2 - 12xz + 4x^2 = 39$$

$$3x^2 - 9xz = 9z^2 = 39$$

$$x^2 - 3xz + 3z^2 = 13 \qquad (7)$$

Como (7) y (2) son homogéneas, se puede hacer el siguiente artificio: x = mz, y remplazar:

En (2): $\quad z^2 + mz^2 + m^2z^2 = 19 \qquad (\alpha)$

En (7): $\quad m^2z^2 - 3mz^2 + 3z^2 = 13 \qquad (\beta)$

Dividiendo (α) por (β):

$$\frac{1 + m + m^2}{m^2 - 3m + 3} = \frac{19}{13}$$

$$19m^2 - 57 m + 57 = 13 = 13m + 13m^2$$

$$6m^2 - 70m + 44 = 0$$

$$3m^2 - 35m + 22 = 0$$

$$(3m - 2)(m - 11) = 0$$

$$\therefore \; m = \frac{2}{3} \quad , \quad m = 11$$

a) Si $m = \frac{2}{3}$:

$$x = \frac{2}{3} z \qquad (\gamma)$$

sustituyendo el valor de m en (α):

$$z^2 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{9}z^2 = 19$$

$$19z^2 = 171$$

$\therefore\ z = \pm\ 3$

Sustituyendo en (γ):

$$x = \pm 2$$

Sustituyendo en (6):

$$y = \pm 5$$

b) Si m = 11:

$$x = 11z$$

y se obtiene:

$$x = \pm\frac{11}{\sqrt{7}}\ ,\quad y = \mp\frac{19}{\sqrt{7}}\ ,\quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$$

Rpta.: $\begin{cases} x_1 = \pm 2\ ;\ y_1 = \pm 5\ ;\ z_1 = \pm 3 \\ x_2 = \pm\dfrac{11}{\sqrt{7}}\ ,\ y_2 = \mp\dfrac{19}{\sqrt{7}}\ ,\ z_2 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{7}} \end{cases}$

9.- Resolver el sistema:

$$x + y + z = 19 \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 133 \qquad (2)$$

$$y^2 = xz \qquad (3)$$

Solución:

Sustituyendo (3) en (2):

$$x^2 + xz + z^2 = 133 \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$x + \sqrt{xz} + z = 19 \qquad (5)$$

En (4), sumando y restando xz dá:

$$(x + z)^2 - xz = 133$$

$$(x + z)^2 - \left(\sqrt{xz}\right)^2 = 133$$

$$\left(x + \sqrt{xz} + z\right)\left(x - \sqrt{xz} + z\right) = 133 \qquad (6)$$

Dividiendo (6) por (5):

$$x - \sqrt{xz} + z = 7 \qquad (7)$$

Sumando (5) y (7):

$$2(x + z) = 26$$

$$x + z = 13 \qquad (8)$$

restando (5) y (7):

$$2\sqrt{xz} = 12$$

$$\sqrt{xz} = 6$$

$$xz = 36 \qquad (9)$$

Resolviendo (8) y (9):

$$z = 9\ ,\ x = 4$$

$$z = 4\ ,\ x = 9$$

Si: $z = 9\ ,\ x = 4 \Rightarrow y = 6$

Si: $x = 9\ ,\ z = 4 \Rightarrow y = 6$

10.- Resolver el sistema:

$$z\,(x + y) = 234 \qquad (1)$$

$$y\,(z + x) = 220 \qquad (2)$$

$$x\,(y + z) = 168 \qquad (3)$$

Solución:

Efectuando operaciones:

$$zx + zy = 234 \qquad (1)$$

$$yz + xy = 220 \qquad (2)$$

$$xy + xz = 168 \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3):

$$2(xy + xz + yz) = 622$$

$$xy + xz + yz = 311 \qquad (4)$$

Sustituyendo (1) en (4):

$$xy = 77 \qquad (\alpha)$$

Sustituyendo (2) en (4):

$$xz = 91 \qquad (\beta)$$

Sustituyendo (3) en (4):

$$yz = 143 \qquad (\gamma)$$

Multiplicando (α), (β) y (γ):

$$x^2y^2z^2 = (7 \,.\, 11)(7 \,.\, 13)(13 \,.\, 11) = 11^2 \,.\, 7^2 \,.\, 13^2$$

Extrayendo raíz cuadrada:

$$xyz = \pm 11 \,.\, 7 \,.\, 13 \qquad (\phi)$$

Sustituyendo (α) en (φ):

$$z = \pm 13$$

Sustituyendo (β) en (φ):

$$y = \pm 11$$

Sustituyendo (γ) en (φ):

$$x = \pm \; 7$$

SISTEMAS DIVERSOS

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver el sistema:

$$\sqrt[3]{5x + 14} + \sqrt[3]{5y - 12} = 6 \qquad (I)$$

$$x + y = 14 \qquad (II)$$

Solución:

Multiplicando a la ecuación (II) por 5:

$$5x + 5y = 70$$

Sumando 14 a ambos miembros de la ecuación:

$$(5x + 14) + 5y = 70 + 14$$

Restando 12 a ambos miembros de la ecuación:

$$(5x + 14) + (5y - 12) = 72 \qquad (III)$$

haciendo:

$$\sqrt[3]{5x + 14} = a$$

$$5x + 14 = a^3 \qquad (A)$$

y:

$$\sqrt[3]{5y - 12} = b$$

$$5y - 12 = b^3 \qquad (B)$$

Se obtiene de (I) y (III):

$$a + b = 6 \qquad (I)_a$$

$$a^3 + b^3 = 72 \qquad (II)_a$$

De $(II)_a$:

$$(a + b)\,[(a + b)^2 - 3ab] = 72 \qquad (III)_a$$

Sustituyendo $(I)_a$ en $(III)_a$

$$(6)(36 - 3ab) = 72$$

$$ab = 8 \qquad (IV)$$

Resolviendo $(I)_a$ y (IV) se tendrá:

$$a = 2 \;,\; b = 2$$

o:

$$a = 2 \;,\; b = 4$$

Sustituyendo en (A) y (B) :

para $a = 4$: $64 = 5x + 14 \Rightarrow x = 10$

$b = 2$: $8 = 5y - 12 \Rightarrow y = 4$

para $a = 2$: $8 = 5x + 14 \Rightarrow x = -6/5$

$b = 4$: $64 = 5y - 12 \Rightarrow y = 76/5$

2.- Resolver el sistema:

$$x + y + z = 2 \qquad (I)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \qquad (II)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 8 \qquad (III)$$

Solución:

Elevando al cuadrado la ecuación (I):

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 4 \qquad (IV)$$

Sustituyendo (II) en (IV):

$$xy + xz + yz = -1 \qquad (V)$$

Elevando al cubo la ecuación (I):

$$x^2 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz = 8$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3x(xy+xz+yz) + 3y(xy+xz+yz) + 3z^2(x + y) = 8$$

Sustituyendo (V) y (III) en esta ecuación, se obtiene:

$$3x(-1) + 3y(-1) + 3z^2(x + y) = 0$$

$$(3z^2 - 3)(x + y) = 0 \qquad \text{(VI)}$$

De (I):

$$x + y = 2 - z \qquad \text{(VII)}$$

sustituyendo en (VI):

$$(3z^2 - 3)(2 - z) = 0$$

igualando a cero cada factor:

$$3z^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm 1$$

$$2 - z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2$$

Sustituyendo sucesivamente en (VII) y (II):

para z = 1:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

para z = -1:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

para z = 2

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Rpta.: $\begin{cases} x_1 = 2 \;,\; y_1 = -1 \;,\; z_1 = 1 \\ x_2 = 2 \;,\; y_2 = 1 \;,\; z_2 = -1 \\ x_3 = 1 \;,\; y_3 = -1 \;,\; z_3 = 2 \end{cases}$

3.- Resolver el sistema:

$$2(x + y) = 5xy \qquad \text{(I)}$$

$$8(x^3 + y^3) = 65 \qquad \text{(II)}$$

Solución:

De (II):

$$8(x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = 65$$

Sustituyendo (I) en esta ecuación, se obtiene:

$$8\left(\frac{5xy}{2}\right)\left[\left(\frac{5xy}{2}\right) - 3xy\right]^2 = 65$$

haciendo xy = a:

$$4(5a)\left[\left(\frac{25a^2}{4}\right) - 3a\right] = 65$$

$$125a^3 - 60a - 65 = 0$$

dividiendo por "5" toda la ecuación:

$$25a^3 - 12a - 13 = 0$$

$$(a - 1)(25a^2 + 25a + 13) = 0$$

igualando cada factor a cero:

$$a - 1 = 0 \;,\; a = 1$$

$25a^2 + 25a + 13 = 0$, no tiene raíces reales.

Para a = 1:

$$xy = 1 \qquad (\alpha)$$

En (I):

$$x + y = \frac{5}{2} \qquad (\beta)$$

Resolviendo (α) y (β):

Rpta.: $\begin{cases} x_1 = 2 \;,\; y_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \;,\; y_2 = 2 \end{cases}$

4.- Resolver el sistema:

$$x^2 + xy + xz - x = 2 \qquad \text{(I)}$$

$$y^2 + xy + yz - y = 4 \qquad \text{(II)}$$

$$z^2 + zx + yz - z = 6 \qquad \text{(III)}$$

Solución:

Sumando las tres ecuaciones:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) - (x + y + z) = 12$$

o:

$$(x + y + z)^2 - (x + y + z) = 12$$

haciendo $(x + y + z) = t$

$$t^2 - t = 12$$

$$t^2 - t - 12 = 0$$

cuyas raíces son:

$$t_1 = 4 \quad , \quad t_2 = -3$$

De (I):

$$x(x + y + z) - x = 2$$

sustituyendo el paréntesis:

$$xt - x = 2$$

$$x = \frac{2}{t - 1} \qquad (1)$$

De (II):

$$y(x + y + z) - y = 4$$

$$yt - y = 4$$

$$y = \frac{4}{t - 1} \qquad (2)$$

De (III):

$$z(z + x + y) - z = 6$$

$$zt - z = 6$$

$$z = \frac{6}{t - 1} \qquad (3)$$

Sustituyendo los valores de "t" en (1), (2) y (3):

$$\text{Rpta.:} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \quad , \quad y_1 = -1 \quad , \quad z_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2} \quad , \quad y_1 = \frac{4}{3} \quad , \quad z_1 = 2 \end{cases}$$

5.- Resolver el sistema:

$$x + y + z = 9 \qquad (I)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \qquad (II)$$

$$xy + zx + yz = 27 \qquad (III)$$

Solución:

En (II) efectuando operaciones:

$$xy + xz + yz = xyz \qquad (II)$$

Sustituyendo (III) en (II):

$$27 = xyz \qquad (IV)$$

Multiplicando la ecuación (III) por z:

$$xyz + xz^2 + yz^2 = 27z$$

pero $xyz = 27$, luego:

$$27 + z^2(x + y) = 27z$$

De (I):

$$x + y = 9 - z$$

sustituyendo:

$$27 + z^2(9 - z) = 27z$$

$$27 + 9z^2 - z^3 - 27z = 0$$

$$27 - 27z + 9z^2 - z^3 = 0$$

$$(3 - z)^3 = 0$$

$$z = 3$$

Sustituyendo en (IV):

$$xy = 9 \qquad (\alpha)$$

Sustituyendo en (I):

$$x + y = 6 \qquad (\beta)$$

resolviendo (α) y (β):

$$x = 3 \quad , \quad y = 3$$

Rpta.: $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son ecuaciones donde la incógnita se halla como exponente. No son ecuaciones algebraicas sino "Ecuaciones trascendentes", pero reducibles a algebraicas. Para resolver debe recordarse que "si las bases de igualdades exponenciales son iguales, los exponentes deben serlo".

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver la ecuación exponencial:

$$x^x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Solución:

Transformando sucesivamente el segundo miembro:

$$x^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{8}} = \left[\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{8}}$$

finalmente:

$$x^x = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{16}}$$

luego, por comparación:

$$x = \frac{1}{16}$$

2.- Resolver:

$$2^{2x+2} - 6^x - 2 \,.\, 3^{2x+2} = 0$$

Solución:

La ecuación se puede escribir

$$(2x)^2 \,.\, 2^2 - [(2)(3)]^x - 2 \,.\, (3^x)^2 \,.\, 3^2 = 0$$

$$4 \,.(2^x)^2 - (2^x)(3^x) - 18(3^x)^2 = 0$$

haciendo $(2^x \,. = a)$ y $(3^x = b)$:

$$4a^2 - ab - 18b^2 = 0$$

factorizando:

$$(4a - 9b)(a + 2b) = 0$$

igualando a cero cada factor:

(a) $4a - 9b = 0$

$4a = 9b$

$$\frac{a}{b} = \frac{9}{4} \qquad (\alpha)$$

(b) $a + 2b = 0$

$a = -2b$ (resultado absurdo)

Reponiendo los valores de a y b en (α)

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x = -2$$

3.- Resolver el sistema:

$$x + y = 2^x \qquad \text{(I)}$$

$$3^x(x + y) = 216 \qquad \text{(II)}$$

Solución:

Sustituyendo (I) en (II):

$$3^x \,.\, 2^x = 216$$

$$[(3)(2)]^x = 216$$

$$6^x = 216$$

$$6^x = 6^3$$

$$x = 3$$

sustituyendo en (I):

$$3 + y = 2^3$$

$$y = 5$$

Rpta.: $x = 3$; $y = 5$

4.- Resolver:

$$\sqrt[4]{6\,561} \,.\, 12^{\sqrt{x}} = 6^x$$

Solución:

Transformando $6\,561 = 3^8$

Luego, sustituyendo:

$$\sqrt[4]{3^8} \,.\, 12^{\sqrt{x}} = 6^x$$

que se puede escribir:

$$3^2 \,.\, (3 \,.\, 2^2)^{\sqrt{x}} = [(2)(3)]^x$$

$$3^2 \,.\, 3^{\sqrt{x}} \,.\, 2^{2\sqrt{x}} = 2^x \,.3^x$$

$$3^{2+\sqrt{x}-x} = 2^{x-2\sqrt{x}}$$

para que la igualdad se cumpla, el único caso es que sean igual a 1, ambos y para ser igual a 1 los exponentes deben ser cero, así:

a) $2 + \sqrt{x} - x = 0$

cuyas raíces son:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -1 \text{ (absurdo)}$$

b) $x - 2\sqrt{x} = 0$

cuyas raíces son:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0$$

Rpta.: $x = 4$

5.- Resolver:

$$\left(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} \stackrel{2}{=} \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$$

Solución:

Transformando el primer miembro:

$$\left(4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$$

$$\left(9\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$$

$$\left(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$$

$$\left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$$

$$3^1 = 3^{x^2-x-1}$$

igualando exponentes:

$$x^2 - x - 1 = 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

de donde:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver el sistema:

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \qquad \text{(I)}$$

$$2x^2 - xy - y^2 = 5 \qquad \text{(II)}$$

a) $x = -\frac{1}{\sqrt{7}}$, $y = \frac{4}{\sqrt{7}}$ b) $x = \frac{1}{\sqrt{7}}$, $y = \frac{4}{\sqrt{7}}$

c) $x = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{7}}$ d) $x = -\frac{1}{\sqrt{7}}$, $y = \frac{4}{\sqrt{7}}$

e) $x = -\frac{4}{\sqrt{7}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{7}}$

2. Resolver el sistema y dar el valor de "x" :

$$5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19 \qquad \text{(I)}$$

$$3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y} \qquad \text{(II)}$$

a) 2 b) 4 c) 1 d) -1 e) -4

3. Resolver el sistema y dar el valor de "z":

$$x + y + z = 14 \qquad \text{(I)}$$

$$y^2 + z^2 - x^2 = 46 \qquad \text{(II)}$$

$$yz = 9 \qquad \text{(III)}$$

a) 4 b) 9 c) 1 d) 2 e) 3

4. Resolver el sistema y dar un valor de "y"

$$y + \frac{2\sqrt{x^2 - 12y + 1}}{3} = \frac{x^2 + 17}{12} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{x}{8y} + \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{x}{3y} + \frac{1}{4}} - \frac{y}{2x} \qquad \text{(II)}$$

a) 4 b) -3 c) $-\frac{5}{6}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

5. Resolver el sistema y dar un valor de "x":

$$x + y + \sqrt{(x + 2)(y + 3)} = 34 \qquad \text{(I)}$$

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (x + 2)(y + 3) = 741 \qquad \text{(II)}$$

a) -1 b) -3 c) 3 d) 4 e) 2

6. Resolver y dar los valores de "x":

$$x + \sqrt{xy} + y = 65 \qquad (1)$$

$$x^2 + xy + y^2 = 2\,275 \qquad (2)$$

a) $x = \pm 4$ b) $x = \pm 6$ c) $x = \pm 2$

d) $x = \pm 5$ e) $x = \pm 7$

7. Resolver el sistema y dar un valor de "y":

$$x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52 \qquad (1)$$

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{17}{4}$$

a) 5 b) 15 c) -5 d) -15 e) 12

8. Resolver el sistema y dar un valor de "x":

$$\sqrt{x^2 + 12y} + \sqrt{y^2 + 12x} = 133 \qquad (1)$$

$$x + y = 23 \qquad (2)$$

a) 8 b) 10 c) 4 d) 7 e) 6

9. Resolver y hallar el valor de "z":

$$x^2 - yz = -5 \qquad (1)$$

$$y^2 - zx = 7 \qquad (2)$$

$$z^2 - xy = 1 \qquad (3)$$

a) 2 b) -2 c) 3 d) -3 e) 1

10. Resolver y dar un valor de "y":

$$x^2y + xy + x = 27 \qquad (1)$$

$$xy^2 + xy + y = 5 \qquad (2)$$

a) 6 b) -6 c) 3 d) -3 e) $\frac{1}{2}$

11. Resolver el sistema y calcular x:

$$2x + y = 2z \qquad (1)$$

$$9z - 7x = 6y \qquad (2)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 216 \qquad (3)$$

a) 4 b) 5 c) 3 d) i e) 2i

12. Resolver el sistema y calcular "x":

$$(x^2 - y^2)(x - y) = 16xy \qquad (I)$$

$$(x^4 - y^4)(x^2 - y^2) = 640x^2y^2 \qquad (II)$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

13. Calcular "x" al resolver el sistema

$$xy + ab = 2ax \qquad (1)$$

$$x^2y^2 + a^2b^2 = 2b^2y^2 \qquad (2)$$

a) 4 b) $\frac{b}{2a}$ c) $\frac{2a}{b}$ d) $\frac{1}{a}$ e) b

14. Resolver el sistema y calcular "x":

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 20 \qquad (1)$$

$$\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = 65 \qquad (2)$$

a) 25 b) 16 c) 64 d) 4 e) 9

15. Resolver el sistema y calcular "x":

$$x^5 - y^5 = 992 \qquad (1)$$

$$x - y = 2 \qquad (2)$$

a) 1 b) -1 c) -2 d) 5 e) 6

16. Resolver la ecuación:

$$8^x - 3(4^x) - 3(2^{x+1}) + 8 = 0$$

a) -2 b) 0 c) -1 d) 1 e) 4

17. Resolver y dar el valor de "x":

$$\sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \qquad (1)$$

$$(x+y)\,2^{y-x} = 3 \qquad (2)$$

a) 1 b) 3 c) 7 d) 5 e) 2

18. Resolver y dar el valor de "a":

$$a^a = b^b \qquad (1)$$

$$a^b = 2a \qquad (2)$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 2 d) $\frac{\sqrt{1}}{2}$ e) $\frac{1}{16}$

19. Resolver :

$$x^{x^n+x^m} + mn = mx^{x^n} + nx^{x^m}$$

a) $\sqrt[n]{m}$ b) $\sqrt[m]{n}$ c) n^n d) n^m e) $\sqrt[n]{n}$

20. Resolver y dar el valor de "z":

$$5^{2^y} + 2^3(1 + 3^{x-1}) = 689 \qquad (1)$$

$$5^{1+2y} - 3z = 3\,044 \qquad (2)$$

$$2^{3^x} + 3^{2+z} = 737 \qquad (3)$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) B	3) C	4) E	5) C
6) D	7) E	8) B	9) E	10) E
11) C	12) C	13) E	14) B	15) C
16) B	17) C	18) B	19) E	20) D

DESIGUALDADES E INECUACIONES

DESIGUALDADES

DESIGUALDAD

Es la relación que establece que dos cantidades tienen diferente valor.

Los signos que se utilizan para designar desigualdades son:

$>$ se lee: "mayor que"

$<$ se lee: "menor que"

$\geqslant$ se lee: "mayor o igual que"

$\leqslant$ se lee: "menor o igual que"

Toda cantidad positiva "a" se considera mayor que cero ($a > 0$) y toda cantidad negativa "b" es menor que cero ($b < 0$).

DEFINICIONES IMPORTANTES

1) Una cantidad "a" es mayor que otra cantidad "b", si la diferencia ($a - b$) es positiva, es decir:

$$a > b \quad \text{si} \quad a - b > 0$$

2) Una cantidad "a" es menor que otra cantidad "b", si la diferencia ($a - b$) es negativa, es decir:

$$a < b \quad \text{si} \quad a - b < 0$$

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

1º Si a ambos miembros de una desigualdad se suma o se resta una misma cantidad, el sentido de la desigualdad no se altera.

Sea: $a > b$

se cumple que : $a \pm m > b \pm m$

2º Si los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por una misma cantidad positiva, el sentido de la desigualdad no varía.

Sea: $a > b$

se cumple que: $am > bm$

o: $$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$$

$$m > 0$$

3º Si los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por una misma cantidad negativa el sentido de la desigualdad se invierte.

Sea: $a > b$

se cumple: $am < bm$

o: $$\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$$

$$m < 0$$

4º Si se suma miembro a miembro dos o varias desigualdades del mismo sentido, el resultado es una desigualdad del mismo sentido.

Sea: $a > b, \ c > d$

entonces:

$$a + c > b + d$$

5º Si se multiplica o divide miembro a miembro dos o varias desigualdades del mismo sentido, cuyos miembros son positivos, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

Sea: $a > b$, y $c > d$.

Multiplicando:

$$ac > bd$$

Dividiendo:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

$$a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$$

6º Si a ambos miembros de una desigualdad se eleva a una misma potencia impar, el sentido de la desigualdad no varía.

Sea: $a > b$

se tiene: $a^{2m+1} > b^{2m+1}$

7º Si a ambos miembros de una desigualdad se eleva a una misma potencia par, siendo los dos miembros negativos, se obtiene una desigualdad de signo contrario.

Sea: $a > b$

entonces : $a^{2n} < b^{2n}$

$$a < 0, \quad b < 0$$

8º Si a ambos miembros de una desigualdad se le extrae una misma raíz de índice impar se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

Sea: $a > b$

entonces:

$$\sqrt[2m+1]{a} > \sqrt[2m+1]{b}$$

EJERCICIOS SOBRE DESIGUALDADES

1.- Demostrar que $\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$

Solución:

$$\text{Si } a \neq b$$

luego:

$$(a - b)^2 > 0$$

(si a = b, no se cumple)

efectuando:

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

Sumando a ambos miembros 4ab:

$$a^2 - 2ab + 4ab + b^2 > 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$$

$$(a + b)^2 > 4ab$$

si son positivos ambos:

$$a + b > 2\sqrt{ab}$$

de donde:

$$\therefore \quad \frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$$

2.- Demostrar que:

$$a^3 + b^3 + c^3 > 3abc;\ a, b, c \text{ son positivos.}$$

Solución:

Si a, b, c, son positivos, entonces:

$$a + b + c > 0 \qquad (1)$$

también:

$$(a - b)^2 > 0$$

luego:

$$a^2 + b^2 - 2ab > 0 \qquad (2)$$

además:

$$(a - c)^2 > 0$$

luego:

$$a^2 + c^2 - 2ac > 0 \qquad (3)$$

y:

$$(b - c)^2 > 0$$

luego:

$$b^2 + c^2 - 2ab > 0 \qquad (4)$$

Sumando (2), (3) y (4):

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) > 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc > 0 \qquad (5)$$

Multiplicando (1) y (5):

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) > 0$$

El primer miembro es una identidad algebraica, luego:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc > 0$$

$$\therefore \qquad a^3 + b^3 + c^3 > 3abc$$

3.- Demostrar que: $ax + by < 1$

Si: $a^2 + b^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 1$

Donde a, b, x, y, son diferentes y positivos.

Solución:

De la condición del problema se escribe:

$$(a - x)^2 > 0$$

$$\therefore \qquad a^2 + x^2 > 2ax \qquad (1)$$

$$(y - b)^2 > 0$$

$$\therefore \qquad y^2 + b^2 > 2yb \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$a^2 + b^2 + x^2 + y^2 > 2(ax + by)$$

Sustituyendo las condiciones en esta desigualdad:

$$1 + 1 > 2(ax + by)$$

$$\therefore \qquad ax + by < 1$$

4.- Demostrar que:

$$(b + c)(a + c)(a + b) > 8abc$$

(a,b,c, son positivos)

Solución:

Siendo a, b, c, números positivos, se tiene:

$$a^2 + b^2 > 2ab \qquad (1)$$

$$c^2 + b^2 > 2bc \qquad (2)$$

$$a^2 + c^2 > 2ac \qquad (3)$$

Multiplicando (1) por c, (2) por a y (3) por b:

$$a^2c + b^2c > 2abc \qquad (4)$$

$$c^2a + b^2a > 2abc \qquad (5)$$

$$a^2b + c^2b > 2abc \qquad (6)$$

Sumando miembro a miembro (4), (5) y (6):

$$a^2c + b^2c + c^2a + b^2a + a^2b + c^2b > 6abc$$

Sumando a ambos miembros 2abc:

$$(a^2c + 2abc + b^2c) + (c^2a + c^2b) + (a^2b + ba^2) > 8abc$$

factorizando:

$$c(a + b)^2 + c^2(a + b) + ab(a + b) > 8abc$$

$$(a + b)(ac + bc + c^2 + ab) > 8abc$$

factorizando en el segundo paréntesis:

$$(a + b)\,[c(a + c) + b(a + c)] > 8abc$$

$$\therefore \qquad (a + b)(a + c)(b + c) > 8abc$$

CLASES DE DESIGUALDADES

1.- DESIGUALDADES ABSOLUTAS.- Son aquellas que se verifican para cualquier valor o sistemas de valores, dado a sus letras.

Ejemplo:

$$(x - 5)^2 + 7 > 0$$

2.- DESIGUALDAD RELATIVA O INECUACIÓN.- Son aquellas que se verifican para determinados valores o sistemas de valores, asignados a sus letras.

Ejemplo:

$$3x - 7 > 14$$

sólo se satisface para $x > 7$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

Son aquellas que pueden reducirse a la forma:

$$ax \pm b > 0$$

o:

$$ax \pm b < 0$$

SOLUCIÓN A UNA INECUACIÓN

Es todo valor de la incógnita, o conjunto de valores de las incógnitas, que verifican la desigualdad.

Para expresar convenientemente las soluciones que se obtengan al resolver inecuaciones es necesario definir:

INTERVALO ABIERTO.- Es el conjunto de elementos "x", limitados en sus extremos por los elementos "a" y "b"; donde a < b, para los cuales se cumple que a < x < b. El intervalo abierto se denota por (a, b).

Ejemplo:

Sea el intervalo (2, 5), según la definición se debe tomar todos los números reales comprendidos entre 2 y 5, a excepción de éstos.

INTERVALO CERRADO.- Es el conjunto de elementos "x", limitados en sus extremos por los elementos "a" y "b", donde a < b, para los cuales se cumple que $\leqslant$ a x $\leqslant$ b. El intervalo cerrado se representa por [a,b].

Ejemplo:

Sea el intervalo [2,7], según la definición, los elementos que forman este intervalo, son todos los números comprendidos entre 2 y 7, incluyendo éstos.

VALOR ABSOLUTO.- El valor absoluto de un número real "x", representado por $|x|$, se define por la siguiente regla:

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x > 0$$

$$|x| = -x \quad \text{si} \quad x < 0$$

Ejemplo:

i) $|7| = 7$

ii) $|-2| = -(-2) = 2$

iii) $\left|-\frac{7}{5}\right| = -\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver:

$$\frac{3x}{5} - \frac{7}{10} - \frac{x}{20} > \frac{1}{5} + \frac{7x}{20}$$

Solución:

Multiplicando por 20:

$$12x - 14 - x > 4 + 7x$$

$$4x > 18$$

$$x > \frac{9}{2}$$

En forma de intervalo será:

$x \in (9/2, +\infty)$, que se lee: "x pertenece al intervalo abierto comprendido entre 9/2 e infinito".

2.- Resolver:

$$(6x - 2)\frac{5}{8} - \left(1 - \frac{2x}{3}\right)\frac{7}{3} < 4x + \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{12}\right)\frac{2}{3}$$

Solución:

Realizando transformaciones:

$$(3x - 1)\frac{5}{4} - (3 - 2x)\frac{7}{9} < 4x + (6x - 5)\frac{1}{18}$$

Multiplicando por 36:

$$45(3x - 1) - 28(3 - 2x) < 144x + 2(6x - 5)$$

$$135x - 45 - 84 + 56x < 144x + 12x - 10$$

$$135x + 56x - 144x - 12x < -10 + 84 + 45$$

$$35x < 119$$

$$x < \frac{119}{35}$$

$$x < \frac{17}{5}$$

En forma de intervalo:

$$x \in \left(-\infty, \frac{17}{5}\right)$$

3.- Resolver $2^{3x-5} > 4^{2x-4}$

Solución:

Igualando las bases de las potencias: $2^{3x-5} > 2^{4x-8}$

Si una potencia es mayor que otra, en los exponentes también deben cumplir esta desigualdad, así:

$$3x - 5 > 4x - 8$$

transponiendo y operando:

$$-x > -3$$

multiplicando por (-1):

$$x < 3$$

en forma de intervalo:

$$x \in (-\infty, 3)$$

4.- Resolver:

$$\sqrt[5]{3^{\frac{5x+13}{2}}} > \sqrt[7]{27^{\frac{8x+1}{4}}}$$

Solución:

Transformando, para que tenga la misma base:

$$3^{\frac{5x+13}{10}} > (3^3)^{\frac{8x+1}{28}}$$

$$3^{\frac{5x+13}{10}} > 3^{\frac{24x+3}{28}}$$

también:

$$\frac{5x+13}{10} > \frac{24x+3}{28}$$

multiplicando por 280:

$$28(5x + 13) > (24x + 3)10$$

Operando, simplificando y despejando x:

$$x < 3{,}34$$

en forma de intervalo:

$$x \in (-\infty,\ 3{,}34)$$

INECUACIONES

SISTEMA DE INECUACIONES

1.- SISTEMA DE INECUACIONES CON UNA INCOGNITA

Para resolver un sistema de este tipo:

1º Se halla las soluciones de cada inecuación en forma separada.

2º Se comparan éstas para establecer las soluciones comunes a todas las inecuaciones.

3º Se grafica las soluciones en la recta numérica, para facilitar la solución.

2.- SISTEMAS DE INECUACIONES CON 2 ó MAS INCOGNITAS

Para resolver este tipo de sistema, se trata de eliminar una incógnita, restando inecuaciones de sentido contrario, procediendo de esta manera hasta obtener una inecuación con una sola incógnita.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver:

$$\frac{3x}{4} - 5 > 7 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{2} + 3 > x - 9 \qquad (2)$$

Solución:

Resolviendo la inecuación (1), para lo cual se multiplica por 4:

$$3x - 20 > 28$$

$$3x > 48$$

$$x > 16$$

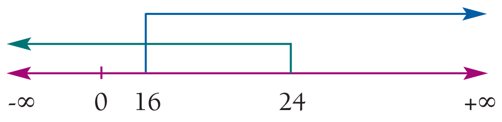
Resolviendo la inecuación (2), para lo cual se multiplica por 2:

$$x + 6 > 2x - 18$$

$$-x > -24$$

$$x < 24$$

Graficando las soluciones:



La solución común es: $16 < x < 24$

escribiendo como intervalo: $x \in (16,24)$

2.- Resolver el sistema:

$$2x - 1 > \frac{x-2}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{3x}{5} - 2 > \frac{x+1}{10} \qquad (2)$$

$$\frac{2x-7}{5} > \frac{3x-1}{4} \qquad (3)$$

Solución:

Resolviendo cada inecuación:

(1) $6x - 3 > x - 2$

$6x - x > 1$

$\therefore \quad x > \frac{1}{5}$

(2) $6x - 20 > x + 1$

$6x - x > 21$

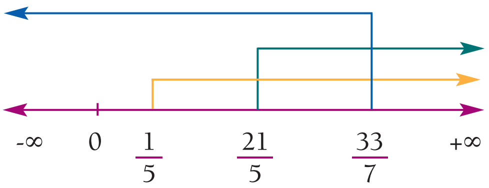
$\therefore \quad x > \frac{21}{5}$

(3) $8x + 28 > 15x - 5$

$8x - 15x > -5 - 28$

$\therefore \quad x < \frac{33}{7}$

Graficando:



La solución es:

$$\frac{21}{5} < x < \frac{33}{7}$$

en forma de intervalo:

$$x \in \left(\frac{21}{5}, \frac{33}{7}\right)$$

3.- Resolver el sistema para valores enteros y positivos:

$$5x - 3y > 2 \qquad (1)$$

$$2x + y < 11 \qquad (2)$$

$$y > 3 \qquad (3)$$

Solución:

Combinando las inecuaciones (1) y (2):

(1) por 2 : $10x - 6y > 4$

(2) por -5: $-10x - 5y > -55$

Sumando miembro a miembro:

$$-11y > -51$$

$$y < \frac{51}{11}$$

Combinando este resultado con la inecuación(3):

$$3 < y < \frac{51}{11}$$

El único valor entero y positivo para "y" comprendido en este intervalo es $y = 4$.

Sustituyendo este valor en (1) y (2):

En (1):

$$5x - 12 > 2$$

$$5x > 14$$

$$x > \frac{14}{5}$$

En (2):

$$2x - 4 < 11$$

$$2x < 7$$

$$x < \frac{7}{2}$$

para "x" se obtiene:

$$\frac{14}{5} < x < \frac{7}{2}$$

El único valor entero y positivo para "x" comprendido en este intervalo es 3:

$$\therefore \quad x = 3, \quad y = 4$$

4.- Resolver para valores enteros y positivos:

$$x + y + z > 8 \qquad (1)$$

$$x - y + z < 4 \qquad (2)$$

$$z - y > 0 \qquad (3)$$

$$z < 5 \qquad (4)$$

Solución:

De (3): $z > y$

Restando (1) - (2) se obtiene:

$$y > 2 \qquad (5)$$

De (3) y (5) se obtiene:

$$2 < y < z \qquad (6)$$

De (4) y (6):

$$2 < y < z < 5 \qquad (7)$$

Luego:

$$2 < y < 5$$

Los valores enteros que puede tomar "y" son":

$$x = 3$$

o:

$$y = 4$$

(1) para $y = 4$, en (7):

$$4 < z < 5$$

No hay valor entero para "z".

(2) para $y = 3$, en (7):

$$3 < z < 5$$

El valor entero para $z = 4$

Sustituyendo estos valores en (1) y (2):

$$x + 3 + 4 > 8 \quad \rightarrow \quad x > 1$$

$$x - 3 + 4 < 4 \quad \rightarrow \quad x < 3$$

de estas 2 últimas ecuaciones:

$$1 < x < 3$$

El valor entero para $x = 2$:

$$\therefore \quad x = 2 \quad , \quad y = 3 \quad , \quad z = 4$$

5.- Un matrimonio dispone de S/.320 para ir al cine con sus hijos. Si comprasen entradas de S/.50 les faltaría dinero y si compraran de S/.40 les sobraría dinero. ¿Cuántos son los hijos?

Solución:

Sea el número de hijos "x".

En el primer caso gastarían:

$$50x + 100$$

por la condición:

$$50x + 100 > 320$$

de donde:

$$x > \frac{22}{5}$$

En el segundo caso gastarían:

$$40x + 80$$

Por la condición: $40x + 80 < 320$

de donde:

$$x < \frac{240}{40}$$

$$x < 6$$

Luego:

$$\frac{22}{5} < x < 6$$

El valor que debe tomarse para "x" es un número entero y positivo, ya que representa el número de hijos, en este caso:

$$x = 5$$

6.- En un gallinero había cierto número de gallinas. Se duplicó el número y se vendió 27, quedando menos de 54. Después se triplicó el número de gallinas que había al principio y se vendió 78, quedando más de 39. ¿Cuántas gallinas habían al principio?

Solución:

Suponiendo que sea "x" el número de gallinas que había al principio.

Por datos del problema se puede escribir:

(1) $2x - 27 < 54$

$2x < 81$

$x < 40,5$

(2) $3x - 78 > 39$

$3x > 117$

$x > 39$

Luego:

$$39 < x < 40,5$$

es decir:

$$x = 40$$

Rpta.: inicialmente había 40 gallinas.

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Reciben este nombres las inecuaciones que, reducidas, toman la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

o:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

Resolver una inecuación de segundo grado es hallar el intervalo en donde se encuentra la incógnita, de manera tal que se verifique la desigualdad. Se estudia tres casos:

1er. Caso: Cuando la inecuación es:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

Se factoriza el trinomio. Suponiendo que se puede factorizar de la siguiente manera:

$$p(x - r_1)(x - r_2) > 0 \qquad (1)$$

siendo $p > 0$, dividiendo entre "p":

$$(x - r_1)(x - r_2) > 0 \qquad (2)$$

Para que se verifique esta desigualdad, es necesario que los dos factores sean o ambos positivos o ambos negativos.

Sea (1) : $x - r_1 > 0 \Rightarrow x > r_1$

$x - r_2 > 0 \Rightarrow x > r_2$

Sea (2): $x - r_1 < 0 \Rightarrow x < r_1$

$x - r_2 < 0 \Rightarrow x < r_2$

Analizando estos dos sistemas se llega a la solución final.

2do. Caso.- Cuando la inecuación es

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad (1)$$

En forma análoga a la anterior se llega a:

$$(x - r_1)(x - r_2) < 0 \qquad (2)$$

Para que se verifique esta desigualdad de los dos factores, uno es positivo y el otro negativo, o viceversa:

Sea (1) : $x - r_1 > 0 \Rightarrow x > r_1$

$x - r_2 < 0 \Rightarrow x < r_2$

Si: $r_1 < r_2$

$\therefore$ $r_1 < x < r_2$

Sea (2): $x - r_1 < 0 \Rightarrow x < r_1$

$x - r_2 > 0 \Rightarrow x > r_2$

Si: $r_1 < r_2$

No hay solución.

3er. Caso.- Cuando la inecuación es $ax^2 + bx + c > 0$ y tiene sus raíces complejas, solamente se verifica para ese sentido, porque se trata de una desigualdad absoluta. Véase el Ejercicio 4.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver : $x^2 - 7x + 12 > 0$

Solución:

Factorizando el trinomio:

$$(x - 4)\ (x - 3) > 0$$

Estudiando los dos casos:

a) $x - 4 > 0 \qquad x > 4$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \therefore\ x > 4$
$\quad x - 3 > 0 \qquad x > 3$

b) $x - 4 < 0 \qquad x < 4$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \therefore\ x < 3$
$\quad x - 3 < 0 \qquad x < 3$

La solución general es:

$$x > 4$$
o:
$$x < 3$$

en forma de intervalo:

$$x \in (-\infty, 3) \quad \cup \quad (4, \infty)$$

3.- Resolver: $x^2 - 9x + 18 < 0$

Solución:

Factorizando el trinomio:

$$(x - 6)\ (x - 3) < 0$$

Analizando los 2 casos:

1) $\left.\begin{array}{lll} x - 6 > 0 & \Rightarrow & x > 6 \\ x - 3 < 0 & \Rightarrow & x < 3 \end{array}\right\}$ No hay solución común

2) $\left.\begin{array}{lll} x - 6 < 0 & \Rightarrow & x < 6 \\ x - 3 > 0 & \Rightarrow & x > 3 \end{array}\right\}$ La solución es $3 < x < 6$

En forma de intervalo: $x \in (3,6)$

3.- Resolver el sistema:

$$x^2 - 12x + 32 > 0 \qquad \text{(I)}$$

$$x^2 - 13x + 22 < 0 \qquad \text{(II)}$$

Solución:

Resolviendo cada inecuación separadamente:

(I) $\qquad (x - 4)(x - 8) > 0$

cuya solución es:

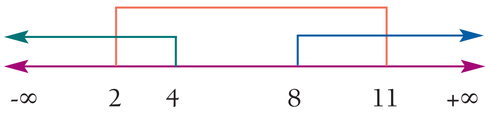
$$x > 8$$
o:
$$x < 4$$

(II) $\qquad (x - 11)(x - 2) < 0$

cuya solución es:

$$2 < x < 11$$

Graficando la solución obtenida:



la solución común es:

$$x \in (2,4) \quad \cup \quad (8,11)$$

4.- Resolver $x^2 + x + 1 > 0$

Solución:

Como no es posible factorizar se plantea:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

donde:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

entonces:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2} \qquad y = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$$

Nótese que las raíces son complejas luego se trata del 3er. caso de inecuaciones.

y se puede escribir:

$$\left[x - \left(\frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}\right)\right] > 0$$

o también:

$$\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right]\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right] > 0$$

efectuando:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2>0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

Se observa que cuando las raíces son complejas, la relación de mayor es cierta y en el caso contrario no se cumple.

INECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas en las que las incógnitas se hallan afectadas por radicales.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Resolver:

$$\sqrt{x-2}-3<0$$

Solución:

Transponiendo:

$$\sqrt{x-2}-3 \qquad \text{(I)}$$

La expresión subradical debe ser positiva, para que exista dentro del campor real, ésto es:

$$x-2>0$$

$$x>2 \qquad \text{(A)}$$

Elevando al cuadrado (I):

$$x-2<9$$

$$x<11 \qquad \text{(B)}$$

La solución es:

$$2<x<11$$

o:

$$x \in (2,11)$$

2.- Resolver:

$$2x-5>\sqrt{x^2-2x+10}$$

Solución:

Se debe cumplir que:

$$x^2-2x+10>0$$

Elevando al cuadrado la inecuación original:

$$4x^2-20x+25 > x^2-2x+10$$

$$3x^2-18x+15>0$$

$$x^2-6x+5>0$$

factorizando:

$$(x-5)(x-1)>0$$

de donde:

$$x>5 \quad \text{o} \quad x<1$$

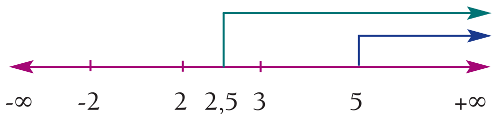
asi:

$$\sqrt{x^2-2x+10}>0$$

$$2x-5>0$$

$$x>2{,}5$$

Notar que $x<1$ no es solución.



La solución común es: $x > 5$ en forma de intervalo:

$$x \in (5,+\infty)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar los valores enteros y positivos que satisfacen la inecuación.

$$\sqrt[3]{3^{\frac{5x+1}{2}}} < \sqrt{9^{\frac{3(x+1)}{5}}}$$

a) 2 b) 3 c) 1 d) 5 e) 6

2. Hallar el número de valores enteros y positivos que verifican:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)\frac{3}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{4}{5} < \frac{x}{2} - (2x - 1)\frac{5}{6}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

3. Hallar el número de valores enteros y positivos que verifican:

$$\sqrt{2}^{\,8x-1} > 4^{x^2 - \frac{33}{4}}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

4. Resolver: $\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} > 1$

a) $x < 2$ b) $x > 3$ c) $x < 3$

d) $x > 2$ e) $x < 1$

5. Resolver: $\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$

a) $x > 7$ b) $x < 7$ c) $x > 4$

d) $x < 4$ e) $x > 2$

6. Resolver: $|\,3x - 5\,| < 3$

a) $x \in < \frac{2}{3}, \frac{8}{3} >$ b) $x \in < \frac{2}{3}, \frac{5}{3} >$

c) $x \in < -\frac{2}{3}, \frac{8}{3} >$ d) $x \in < -\frac{2}{3}, \frac{5}{3} >$

e) $x \in < \frac{2}{3}, \frac{11}{3} >$

7. Resolver: $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^6 - 2x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

a) $x > -1$ b) $x > 1$ c) $x > 0$

d) $x < 2$ e) $x < -2$

8. Resolver: $\frac{x^2}{x-2} < x + 6$

a) $x \in < -\infty, 2 >$ b) $x \in < 3, \infty >$

c) $x \in < -\infty, 2 > \cup < 3, \infty >$ d) $x \in < -\infty, 3 >$

e) $x \in < 2, \infty >$

9. Hallar "a" en $|x - a| < b$ si es equivalente a: $2 < x < 4$.

a) 2 b) 1 c) 3 d) 4 e) 5

10.- Calcular:

$$E = \frac{|5x - 20| - |3x - 20|}{x} \quad \text{si } x \in < -3, -2 >$$

a) 2 b) 1 c) 3 d) -2 e) 5

11. Para qué valores de "a" se verifica la desigualdad:

$$1 < \frac{3a + 10}{a + 7} < 2$$

a) $a \in < \frac{3}{2}, 4 >$ b) $a \in < -\frac{3}{2}, 4 >$

c) $a \in < \frac{1}{2}, 4 >$ d) $a \in < -\frac{1}{2}, 4 >$

e) $a \in < \frac{5}{2}, 4 >$

12. Para qué valores de "m" el sistema de ecuaciones:

$$9x + 7y > m$$

$$3x + 5y < 13$$

tiene soluciones positivas?

a) $m < \frac{91}{5}$ b) $m > \frac{26}{3}$ c) $\frac{26}{3} < m < \frac{91}{5}$

d) $\frac{2}{3} < m < \frac{9}{7}$ e) $\frac{1}{5} < m < \frac{7}{5}$

13.- Resolver para valores enteros y dar el valor de "y":

$$5x - 3y + 2z > 7$$
$$2x + y + z > 14$$
$$3y + x < 15$$
$$y < 3$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

14.- Resolver para valores enteros y positivos y dar el valor de "y":

$$-x + 2y > 2$$
$$x - y > -2$$
$$4x + y < 7$$

a) 1 b) -4 c) 3 d) 5 e) 2

15. Resolver el sistema para valores enteros y positivos y dar el valor de z:

$$2y < x$$
$$4y > 7z$$
$$x < 2x + 4$$

a) 5 b) 2 c) 1 d) 3 e) 4

16. Se sabe que el cuádruplo del número de monedas que hay dentro de un bolso es tal, que disminuído en 5, no puede exceder de 31, y que el quíntuplo del mismo número de monedas aumentado en 8, no es menor que 52. ¿Cuál es dicho número?

a) 7 b) 12 c) 10 d) 9 e) 7

17. Un comerciante adquirió un cierto número de especies de las que vendió 70 y le quedaron más de la mitad. Al día siguiente le devolvieron seis, pero logró vender 36, después de lo cual le quedan menos de 42. ¿Cuántas especies formaban el lote?

a) 140 b) 141 c) 142 d) 143 e) 144

18. Si $x \in < \frac{3}{2}, \frac{5}{2} >$,

determinar el menor número M tal que:

$$\left| \frac{x+4}{x-4} \right| < M$$

a) 13 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{13}{3}$ d) $\frac{11}{3}$ e) $\frac{12}{5}$

19. Para qué valores de "a" se satisface el sistema de desigualdes:

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

a) $x \in < -1,3 >$ b) $x \in < -1,5 >$

c) $x \in < -1,7 >$ d) $x \in < -1,2 >$

e) $x \in < -1,6 >$

20. Resolver: $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 8} > 0$

a) $x \in < 2,5 >$ b) $x \in < 1,8 >$

c) $x \in < -\infty,1 >$ d) $x \in < 8,+\infty >$

e) $x \in < 2,8 >$

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) A	3) C	4) D	5) B
6) A	7) B	8) C	9) B	10) D
11) B	12) C	13) D	14) E	15) C
16) D	17) B	18) C	19) A	20) A

PROGESIONES

A) PROGESIÓN ARITMÉTICA (P.A.) O "PROGRESIÓN POR DIFERENCIA"

Es una sucesión de números, en la cual cada uno de ellos se obtiene sumando al anterior una cantidad constante llamada "razón".

Símbolos:
- t_1 = primer término
- t_n = término de lugar "n" o enésimo término
- r = razón
- n = número de términos
- S_n = suma de "n" primeros términos.

Representación de una Progresión Aritmética:

$$\div\ t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n$$

Por definición: $t_n = t_{n-1} + r$

de donde:

$$r = t_n - t_{n-1}$$

La progresión aritmética es creciente cuando la razón es positiva; y, es decreciente cuando la razón es negativa.

PROPIEDADES:

1º Valor de un término cualquiera:

$$t_n = t_1 + (n - 1)\, r$$

2º En una P.A. la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la asuma de los extremos.

Sea la P.A.: $\div\ t_1 \ldots t_p \ldots t_q \ldots t_n$

siendo t_p y t_q equidistantes de los extremos:

$$t_1 + t_n = t_p + t_q$$

CONSECUENCIAS:

- En una P.A. de un número impar de términos, el término central es igual a la semisuma de los extremos:

$$t_{central} = \frac{t_1 + t_n}{2}$$

- En una P.A. de tres términos, el segundo término es media aritmética entre los otros dos:

Sea la P.A.: $\div\ t_1 \,.\, t_2 \,.\, t_3$

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}$$

3º La suma de los "n" primeros términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los extremos, multiplicada por el número de términos. Es decir:

$$S_n = \frac{1}{2}(t_1 + t_n)n$$

MEDIOS ARITMÉTICOS O DIFERENCIALES

DEFINICIÓN.-

Son los términos de una P.A., comprendidos entre sus extremos:

$$\div\ t_1 \underbrace{\ \ldots\ }_{\text{"m" medios aritméticos}} t_n$$

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS

Es la operación que consiste en formar una P.A. conociendo los extremos y el número de medios a interpolar.

Sean los extremos a y b y "m" el número de medios. La razón de interpolación es:

$$r_i = \frac{b - a}{m + 1}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el t_{50} en la siguiente P.A.:

$$2, 5, 8, 11, \dots$$

Solución:

Datos: $r = 5 - 2 = 3$

$t_1 = 2$

$n = 50$

Aplicando la fórmula:

$$t_n = t_1 + (n - 1)r$$

Se tiene: $t_{50} = t_1 + (50 - 1)r$

$$t_{50} = 2 + (49)(3) = 149$$

Rpta.: $t_{50} = 149$

2.- En una P.A. se conoce:

$$t_3 + t_6 = 57 \qquad (1)$$

$$t_5 + t_{10} = 99 \qquad (2)$$

hallar la razón y el primer término.

Solución:

Por la fórmula:

$$t_n = t_1 + (n - 1)r:$$

$$\left.\begin{array}{l} t_3 = t_1 + 2r \\ t_6 = t_1 + 5r \end{array}\right\}$$

$$t_3 + t_6 = 2t_1 + 7r = 57 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} t_5 = t_1 + 4r \\ t_{10} = t_1 + 9r \end{array}\right\}$$

$$t_{50} + t_{10} = 2t_1 + 13r = 99 \qquad (2)$$

Restando (2) - (1):

$$6r = 42$$

$$\therefore \quad r = 7$$

En (1):

$$2t_1 + 7 \cdot 7 = 57$$

$$2t_1 = 8$$

$$\therefore \quad t_1 = 4$$

Rpta.: $t_1 = 4$, $r = 7$

3.- En una P.A. se conoce que $t_1 = a - 2$; $r = 2 - a$; $S_n = 10 - 5a$. Calcular el valor de n.

Solución:

Con las fórmulas:

$$S_n = (t_1 + t_n)\frac{n}{2} \qquad (1)$$

$$t_n = t_1 + (n - 1)r \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$Sn = [2t_1 + (n - 1)r]\frac{n}{2}$$

sustituyendo valores:

$$10 - 5a = [2(a - 2) + (n - 1)(2 - a)]\frac{n}{2}$$

$$5(2 - a) = [-2(2 - a) + (n - 1)(2 - a)]\frac{n}{2}$$

Dividiendo por (2 - a):

$$5 = (-2 + n - 1)\frac{n}{2}$$

$$10 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 10 = 0$$

factorizando:

$$(n - 5)(n + 2) = 0$$

Rpta.: $n = 5$

$n = -2$ (absurdo)

4.- Hallar la razón de una P.A. si la suma de "n" términos es n(5n - 3)

Solución:

Sea la P.A.:

$$\div\ t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$$

donde: $S_n = n(5n - 3)$, para todo n.

Si n = 1:

$$S_1 = t_1 = (1)(5 - 3) = 2$$

Si n = 2:

$$S_2 = t_1 + t_2 = 2(10 - 3) = 14$$

pero: $t_1 = 2$

$$\therefore \quad t_2 = 12$$

Luego, la razón: $r = t_2 - t_1 = 10$

Rpta.: r = 10

5.- En una P.A. el primer término es 12, el número de términos 9 y la suma es 252. En otra P.A. el $t_1 = 2$, r = 6. Dos términos del mismo lugar de estas progresiones son iguales. ¿Cuál es su valor?

Solución:

Sea "t_x" el término buscado, de lugar "x".

En la primera P.A.:

$$t_x = t_1 + (x - 1)r$$

Cálculo de "r":

$$S_9 = (t_1 + t_9)\frac{9}{2}$$

reemplazando datos:

$$252 = (12 + t_9)\frac{9}{2}$$

de donde:

$$t_9 = 44$$

pero también:

$$t_9 = t_1 + 8r$$

Sustituyendo datos:

$$44 = 12 + 8r$$

$$\therefore \quad r = 4 \qquad (1)$$

En la segunda P.A.:

$$t_x = t_1 + (x - 1)r$$

Sustituyendo valores:

$$t_x = 2 + (x - 1)6 \qquad (2)$$

Por condición del problema, (1) = (2):

$$12 + 4(x - 1) = 2 + 6(x - 1)$$

$$x = 6$$

el término pedido es:

$$t_6 = 2 + (5)(6) = 32$$

6.- En la P.A.:

$$\div\ \ldots 5 \ldots 47 \ldots 159,$$

el número de términos que hay entre 47 y 159 es triple del número de términos que hay entre 5 y 47. Hallar la razón de esta progresión.

Solución:

Considerando la P.A. de razón "r":

Por dato: $\div \ldots 5 \underbrace{\ldots}_{n} 47 \underbrace{\ldots}_{3n} 159$

Del intervalo con extremos 5 y 47:

$$r = \frac{47 - 5}{n + 1} = \frac{42}{n + 1} \qquad (I)$$

Del intervalo con extremos 47 y 159:

$$r = \frac{159 - 47}{3n + 1} = \frac{112}{3n + 1} \qquad (II)$$

Como se trata de la misma P.A. (I) y (II) son iguales, entonces:

$$\frac{42}{n + 1} = \frac{112}{3n + 1}$$

$$n = 5$$

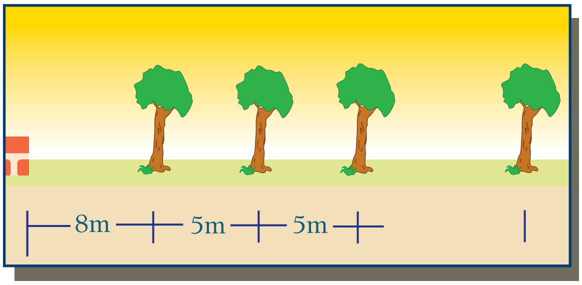
sustituyendo en (I):

$$r = \frac{42}{5 + 1} = 7$$

Rpta.: r = 7

7.- El guardián de un pozo de una hacienda, ha plantado a partir del pozo, cada 5 metros y en la dirección norte, un total de 27 árboles y puede sacar agua del pozo cada vez para el riego de un sólo árbol. ¿cuánto tiene que andar para regar los 27 árboles y regresar al pozo, sabiendo que del pozo al primer árbol hay 8 m. de distancia?

Solución:



1) El espacio que recorre para llevar agua al primer árbol y regresar al pozo es:

$$8 + 8 = 16\text{m.}$$

2) El espacio que recorre para llevar agua al segundo árbol y regresar al pozo es:

$$16 + 10 = 26\text{m.}$$

3) Para el tercer árbol: $26 + 10 = 36$m.

4) …

5) …

La distancia total recorrida es:

$$S = 16 + 26 + 36 + \ldots$$

Como la suma es de 27 sumandos:

$$S_{27} = (2t_1 + 26r)\,\frac{27}{2}$$

$$S_{27} = (2 \,.\, 16 + 26 \,.\, 10)\,\frac{27}{2}$$

$$S_{27} = 3\,942 \text{ m}$$

8.- Si la suma de "p" términos de una P.A. es igual a la suma de "q" términos. Calcular la suma de "p + q" términos.

Solución:

Por la fórmula:

$$S_p = [2t_1 + (p - 1)r]\,\frac{p}{2} \qquad (1)$$

$$S_q = [2t_1 + (p - 1)r]\,\frac{p}{2} \qquad (2)$$

Por condición:

$$[2t_1 + (p - 1)r]\frac{p}{2} = [2t_1 + (q - 1)r]\frac{q}{2}$$

$$2t_1p + (p - 1)pr = 2t_1q + (q - 1)rq$$

$$2t_1\,(p - q) = r(q^2 - q - p^2 + p)$$

$$2t_1\,(p - q) = r\,[(p - q) - (p + q)(p - q)]$$

$$2t_1\,(p - q) = r(p - q)(1 - q - p)$$

$$2t_1 = r(1 - q - p) \qquad (\alpha)$$

CÁLCULO DE S_{p+q}:

$$S_{p+q} = [2t_1 + (p + q - 1)]\left(\frac{p + q}{2}\right) \qquad (\beta)$$

sustituyendo (α) en (β):

$$S_{p+q} = [r(1 - q - p) + r(p + q - 1)\,]\left(\frac{p + q}{2}\right)$$

$$S_{p+q} = (1 - q - p + p + q - 1)\left(\frac{p + q}{2}\right) r$$

$$S_{p+q} = (0)\left(\frac{p + q}{2}\right) r = 0$$

$$\therefore\ S_{p+q} = 0$$

La suma de "p + q" términos es cero.

9.- Se ha interpolado "m" medios aritméticos entre 3 y 57 y "m - 2" entre 5 y 19. Si la razón de la primera es el triple de la segunda.

Hallar el número de términos de cada progresión.

Solución:

Datos:

$$\div\, 3 \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{m} 57; \text{ su razón: } r_1$$

$$\div\, 5 \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{m\,-\,2} 19; \text{ su razón: } r_2$$

Para la primera P.A.:

$$r_1 = \frac{57 - 3}{m + 1} = \frac{54}{m + 1} \qquad (1)$$

Para la segunda P.A.:

$$r_2 = \frac{19 - 5}{(m - 2) + 1} = \frac{14}{m - 1} \qquad (2)$$

Condición: $r_1 = 3r_2$

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$\frac{54}{m + 1} = 3\left(\frac{14}{m - 1}\right)$$

de donde m = 8

La primera P.A. tiene 10 términos.

La segunda P.A. tiene 8 términos.

10.- Cuántos medios "m" aritméticos se pueden interpolar entre 8 y 48 de tal manera que se forme una P.A. cuya suma de términos sea 588.

Solución:

$$\underbrace{8 \ldots \qquad\qquad 48}_{m}$$

Siendo "m" el número de medios interpolados, el número de términos de la P.A. es "m + 2".

$$\therefore \qquad r = \frac{48 - 8}{m + 1} = \frac{40}{m + 1} \qquad (1)$$

$$S_{m+2} = [2t_1 + (m + 1)r]\left(\frac{m + 2}{2}\right) \qquad (2)$$

De (1): $(m + 1)r = 40$

Sustituyendo este valor en (2) y también el valor de la suma:

$$588 = (2 \,.\, 8 + 40)\left(\frac{m + 2}{2}\right)$$

$$56(m + 2) = 1\,176$$

$$m = 19$$

B) PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G.) O "PROGRESIONES POR COCIENTE"

Es una sucesión de números en la cual, el primer término es distinto de cero y cada uno de los términos siguientes se obtienen multiplicando al anterior por una cantidad constante, llamada razón de la P.G.

Símbolos:
- t_1 = primer término
- t_n = término de lugar "n" o término enésimo
- q = razón
- n = número de términos
- S_n = suma de "n" términos
- P_n = producto de "n" términos

REPRESENTACIÓN DE UNA PROGRESIÓN GEOMETRICA

$$\because\; t_1 : t_2 : t_3 : \ldots : t_{n-1} : t_n$$

Por definición: $t_n = t_{n-1}\, q$

$$\therefore \qquad q = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

NOTA.- La razón de una P.G. se halla dividiendo dos términos consecutivos.

Si la **razón es mayor que la unidad** la P.G. **es creciente** y si la **razón es menor que la unidad** la P.G. es **decreciente**.

PROPIEDADES:

1º Un término cualquiera $t_n = t_1\, q^{n-1}$ (1)

2º En una P.G. el producto de dos términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos.

Sea la P.G.:

$$\because\; t_1 : t_2 : \ldots : t_p : \ldots : t_q : \ldots : t_{n-1} : t_n$$

donde t_p y t_q son equidistantes de los extremos:

$$t_p t_q = t_1 t_n$$

CONSECUENCIAS:

- En una P.G. de un número impar de términos, el término central es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

$$t_{central} = \sqrt{t_1 t_n}$$

- En una P.G. de tres términos, el segundo término es media geométrica entre el primero y el tercero.

Sea: $t_1 : t_2 : t_3$

$$t_2 = \sqrt{t_1 t_3}$$

3º En una P.G. limitada, de "n" términos, el producto de sus términos es igual a la raíz cuadrada del producto de sus extremos, elevado al número n de términos de la P.G.

$$P^n = \sqrt{(t_1 t_n)^n}$$

4º La suma de los "n" primeros términos de una P.G. limitada, es:

$$S_n = \frac{q \cdot t_n - t_1}{q - 1} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2), se obtiene otra fórmula:

$$S_n = \frac{t_1 q^{n-1} \cdot q - t_1}{q - 1}$$

$$S_n = t_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

5º El límite de la suma de los términos de una P.G. decreciente ilimitada es igual al primer término dividido entre la diferencia de la unidad y la razón:

$$\lim S = \frac{t_1}{1 - q}$$

para una P.G. decreciente: $0 < q < 1$

cuando $n \to \infty$ (se lee: "n" tiende a infinito")

MEDIOS GEOMÉTRICOS O PROPORCIONALES

DEFINICIÓN

Son los términos de una P.G. comprendidos entre sus extremos:

$$:: \; t_1 \underbrace{\; \ldots \qquad\qquad\qquad}_{\text{"m" medios geométricos}} t_n$$

INTERPOLAR MEDIOS GEOMÉTRICOS ENTRE DOS NÚMEROS DADOS

Es formar una P.G. entre dichos números. Sean los números a y b y el número de medios "m", la progresión geométrica será:

$$a : \underbrace{\; \ldots \qquad\qquad\qquad}_{\text{"m"}} : b$$

La razón de interpolación es: $q_1 = \sqrt[m+1]{\dfrac{b}{a}}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el término de lugar 16 en la P.G.:

$$:: \frac{1}{256} : \frac{1}{128} : \frac{1}{64} : \ldots$$

Solución:

Datos: $t_1 = \dfrac{1}{256} = \dfrac{1}{2^8}$

$n = 16$

$q = 2$

Aplicando la fórmula:

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

Se tiene:

$$t_{16} = \left(\frac{1}{2^8}\right)(2)^{16-1} = \left(\frac{1}{2^8}\right)2^{15} = 2^7$$

$$\therefore \quad t_{16} = 128$$

2.- En una P.G. se conoce que:

$$t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = 1 \;\text{ y }\; t_n = 256$$

hallar la razón y el número de términos.

Solución:

Por fórmula $t_3 = t_1\, q^2$

Sustituyendo datos:

$$1 = \frac{1}{2} q^2 \rightarrow q^2 = 2 \rightarrow q = \sqrt{2}$$

Por la fórmula:

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

sustituyendo:

$$256 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\sqrt{2}\,\right)^{n-1}$$

$$512 = \left(\sqrt{2}\,\right)^{n-1}$$

$$2^9 = (2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$9 = \frac{n-1}{2}$$

$$18 = n - 1$$

$$n = 19$$

$$q = \sqrt{2}$$

$$n = 19$$

3.- En una P.G. el primer término es 7, el último es 448 y la suma 889. Hallar la razón y el número de términos.

Solución:

Por la fórmula:

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

sustituyendo datos:

$$448 = 7q^{n-1}$$

$$64 = \frac{q^n}{q}$$

de donde:

$$q^n = 64q \qquad (1)$$

Por la fórmula: $S_n = t_1 \left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right)$

sustituyendo datos: $889 = 7\left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right)$

$$127 = \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) $127 = \dfrac{64q - 1}{q - 1}$

de donde: $q = 2$ Sustituyendo en (1):

$$2^n = 64 \,.\, 2 = 128 = 2^7$$

$\therefore\; n = 7$

Rpta.: $q = 2$; $n = 7$

4.- Una P.A. y otra P.G. de 3 términos cada una, tienen el mismo primer término 4, y también el segundo término es el mismo, pero desconocido. El tercer término de la P.G. es 25/16 del tercer término de la P.A. Hallar los números.

Solución:

Sean los progresiones:

$$4 \,.\, x \,.\, z \;\text{ (aritmética)} \qquad (I)$$

$$4 : x : y \;\text{ (geométrica)} \qquad (II)$$

En la P.A.:

$$x = \frac{4 + z}{2} \qquad (1)$$

En la P.G.:

$$x = \sqrt{4y} = 2\sqrt{y} \qquad (2)$$

De la condición:

$$y = \frac{25}{16} z \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$x = 2\sqrt{\frac{25}{16}\,z} = 2\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{z} = \frac{5}{2}\sqrt{z}$$

Sustituyendo este valor en (1):

$$\frac{5}{2}\sqrt{z} = \frac{4 + z}{2}$$

Elevando al cuadrado y transponiendo términos:

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

$$(z - 16)(z - 1) = 0$$

Resolviendo: $z = 16$

$z = 1$ (no conviene)

Sustituyendo $z = 16$ en (1): $x = \dfrac{4 + 16}{2}$

$x = 10$

Sustituyendo $x = 10$ en (2): $10 = 2\sqrt{y}$

$y = 25$

Las progresiones son: $\div\ 4 \,.\, 10 \,.\, 16$

$\div\div\ 4 \div 10 \div 25$

5.- La suma de 6 términos de una P.G. es igual a 9 veces la suma de los 3 primeros términos. Hallar la razón.

Solución:

De la condición:

$$S_6 = 9S_3$$

sustituyendo:

$$t_1\left(\frac{q^6 - 1}{q - 1}\right) = 9t_1\left(\frac{q^3 - 1}{q - 1}\right)$$

$$(q^6 - 1) = 9(q^3 - 1)$$

factorizando:

$$(q^3 + 1)(q^3 - 1) = 9(q^3 - 1)$$

$$q^3 + 1 = 9$$

$$q^3 = 8$$

$$q = \sqrt[3]{8}$$

$\therefore \quad q = 2$

6.- Entre 3 y 768; 7 y 112 se ha interpolado el mismo número de medios geométricos. Hallar la razón de cada P.G. formada de manera que la razón de la primera sea doble de segunda.

Solución:

Sean las P.G. formadas:

$3 \underbrace{\ldots\qquad}_{m} 768$; donde q_1 es la razón.

$7 \underbrace{\ldots\qquad}_{m} 112$; donde q_2 es la razón.

En la 1ra. P.G.:

$$q_1 = \sqrt[m+1]{\frac{768}{3}} = \sqrt[m+1]{256} \qquad (1)$$

En la 2da. P.G.:

$$q_2 = \sqrt[m+1]{\frac{112}{7}} = \sqrt[m+1]{16} \qquad (2)$$

Por la condición: $q_1 = 2q_1$

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$\sqrt[m+1]{256} = 2\sqrt[m+1]{16}$$

Elevando a la potencia $(m + 1)$:

$$256 = 2^{m+1} \,.\, 16$$

$$16 = 2^{m+1}$$

$$2^4 = 2^{m+1}$$

$$m + 1 = 4$$

$\therefore \quad m = 3$

Sustituyendo en (1): $q_1 = \sqrt[4]{256} = 4$

Sustituyendo en (2): $q_2 = \sqrt[4]{16} = 2$

Rpta.: Las razones son 4 y 2

7.- El límite de la suma de los infinitos términos de una P.G. decreciente es el doble de la suma de sus "n" primeros términos. Hallar la razón.

Solución:

El límite de la suma de los términos de la P.G.

$$\text{Lim } S = \frac{t_1}{1 - q} \qquad (1)$$

Siendo la suma de los "n" primeros términos:

$$S_n = \frac{t_1 (1 - q^n)}{1 - q} \qquad (2)$$

Por condición del problema: $2S_n = \text{Lim } S$

Sustituyendo (1) y (2) en esta condición del problema:

$$2t_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = \frac{t^1}{1 - q}$$

$$2(1 - q^n) = 1$$

$$1 - q^n = \frac{1}{2}$$

$$-q^n = \frac{1}{2} - 1$$

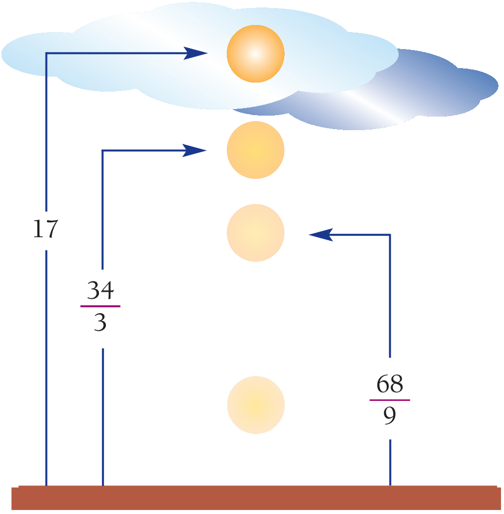
$$q^n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad q = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

8.- Se deja caer una bola desde una altura de 17 m; en cada rebote la bola se eleva los 2/3 de altura desde la cual cayó la última vez. ¿Qué distancia recorre la bola hasta que queda teóricamente en reposo?

Solución:

a) Las distancias que recorre la bola en cada una de sus caídas forman una P.G. indefinida de primer término 17 y razón 2/3, esto es:



$$\because\because \; 17 : \frac{34}{3} : \frac{68}{9} : \ldots$$

$$S_c = \frac{17}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{17 \,.\, 3}{1} = 51$$

b) En forma análoga, las distancias recorridas en cada rebote forman la siguiente Progresión indefinida:

$$\because\because \; \frac{34}{3} : \frac{68}{9} : \frac{136}{27} : \ldots$$

Luego:

$$S_r = \frac{\frac{34}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 34$$

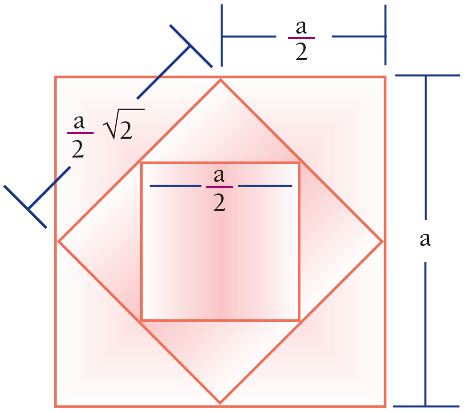
La distancia total recorrida por la bola es:

$$D_T = S_c + S_r = 51 + 34$$

$$D_T = 85 \text{ metros}$$

9.- En un cuadrado de lado “a” se unen los puntos medios de los cuatro lados y se forma otro cuadrado cuyos puntos medios se unen también para formar un nuevo cuadrado y así sucesivamente. Hallar el límite de la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados.

Solución:



Del gráfico:

	lado	área
1er. cuadrado	a	a^2
2do. cuadrado	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a^2}{2}$
3er. cuadrado	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{4}$
4to. cuadrado	$\frac{a}{4}\sqrt{2}$	$\frac{a^2}{8}$

La suma de la sáreas de los cuadrados será:

$$S = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \dots$$

Los infinitos sumandos son los términos de una P.G. decreciente:

$$\text{lím } S = \frac{t_1}{1 - q} = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$$

$$\text{lím } S = 2a^2$$

10.- Hallar el límite de:

$$1 + \frac{2}{3^2} + \frac{26}{3^6} + \frac{242}{3^{10}} + \dots$$

Solución:

Sea “S” la suma pedida:

$$\text{lím } S = 1 + \frac{3}{3^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^6} - \frac{1}{3^6} + \frac{5}{3^{10}} - \frac{1}{3^{10}} + \dots$$

$$\text{lím } S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^{10}} + \dots$$

$$\text{lím } S = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots\right)}_{S_1}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^{10}} + \dots\right)}_{S_2}$$

Cada uno de los paréntesis representa la suma de los infinitos términos de una P.G. decreciente.

Llamando a dichas sumas S_1 y S_2:

$$S_1 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{3}{8}$$

$$S_2 = \frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3^4}} = \frac{3^2}{80} = \frac{9}{80}$$

Sustituyendo S_1 y S_2 en lím S:

$$\text{lím } S = 1 + \frac{3}{8} - \frac{9}{80} = \frac{80 + 30 - 9}{80}$$

$$\text{lím } S = \frac{101}{80}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la P.A. : 3 … 30 … P, el número de términos comprendido entre 3 y 30 es igual a los comprendidos entre 30 y P, si además la suma de todos los términos es 570. Hallar la razón.

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

2. Si se sabe que:

   - : : x - 4 : x : x + 2
   - : : y + 1 : 3y : 9y + 6
   - ÷ ÷ x . y . z ; calcular "z"

   a) 4 b) 2 c) 6 d) 8 e) 10

3. La suma de los tres primeros términos de una P.A. es 42. La suma de los tres últimos términos es 312 y la suma de todos los términos 1062. Hallar el número de términos de dicha progresión.

   a) 20 b)18 c) 16 d) 18 e) 10

4. Si S_1, S_2, S_3, …, son la suma de "n' términos de una P.A. cuyos primeros términos son 1, 2, 3, 4, …, y cuyas razones son 1, 3, 5, 7, … hallar el valor de:

$$E = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + Sp$$

   a) $\frac{n(n+1)}{2}$ b) $\frac{p(p+1)}{2}$ c) $pn(p + 1)$

   d) $\frac{pn(p-1)}{2}$ e) $\frac{pn(p+1)}{2}$

5. Si los términos de lugares p, q, r, de una P.A. son a, b, c respectivamente, calcular:

$$E = (q - r)a + (r - p)b + (p - q)c$$

   a) q b) r c) p

   d) 0 e) a + b + c

6. Hallar el t_{20} de una P.A. si la suma de los "n" primeros términos es $4n^2 + 2n$.

   a) 160 b) 158 c) 152

   d) 150 e) 156

7. Si los números a_1, a_2, a_3, … a_n, forman una P.A.

   Calcular el valor de:

$$E = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} + \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

   a) $\sqrt{a_1}$ b) $\sqrt{a_n}$ c) n

   d) 1 e) 0

8. Entre dos números cuya suma es 2 1/6 se interpola un número par de medios aritméticos, la suma de éstos excede a su número en una unidad. ¿Cuántos medios se han interpolado?

   a) 10 b)6 c) 13 d) 12 e) 11

9. Un rollo de papel cuyo diámetro es de 300 cms consta de 50 vueltas de papel fuertemente enrollado en un cilindro macizo de 10 cm. de diámetro. ¿Qué longitud tiene el papel?

   a) 31,416 m b) 3,1416 m

   c) 314,16 m d) 3141,6 m

   e) 0,31416 m

10. La suma de "n" términos de una P.A. está en la razón $\frac{5n + 7}{7n + 1}$

Encontrar la razón de los términos que ocupan el décimo tercer lugar.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{2}{3}$

11. Si la media aritmética entre (a - 4) y (10 - b) es igual a su media geométrica, evaluar a + b.

a) 11 b) 6 c) 4 d) 14 e) 40

12. Hallar la suma límite de:

$$\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots$$

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{10}{81}$

d) $\frac{7}{81}$ e) $\frac{5}{81}$

13. Si los términos de lugares m, n, p, k de una P.G. son, a, b, c y $\sqrt{abc}$, respectivamente. Calcular:

$$E = \sqrt[n+p-2m]{\frac{bc}{a^2}} + \sqrt[m+p-2n]{\frac{ac}{b^2}} + \sqrt[m+n-2p]{\frac{ab}{c^2}}$$

si la razón es t.

a) t b) 2t c) 3t

d) $\frac{t}{3}$ e) $\frac{2t}{3}$

14. La suma de tres números en P.G. es 70, se multiplican los extremos por 4 y el intermedio por 5, los productos están en P.A., hallar el término central.

a) 10 b) 20 c) 40 d) 60 e) 5

15. Si S_1, S_2, S_3, … S_p, son la suma de las series geométricas infinitas cuyos primeros términos son 1, 2, 3, … p cuyas razones son:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{p+1}$$

Calcular el valor de:

$$E = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_p$$

a) $\frac{p}{2}(p + 1)$ b) $\frac{p}{3}(p + 2)$ c) $\frac{p}{2}(p + 3)$

d) $\frac{p}{3}(p + 3)$ e) p (p + 2)

16. Dos cuerpos que se encuentran a la distancia de 153 m uno del otro, se mueven al encuentro mútuo. El primero recorre 100 m por segundo, y el segundo recorrió 3 m en el primer segundo, en cada segundo siguiente recorre 5 m más que en el anterior. ¿Después de cuántos segundos los cuerpos se encuentran?

a) 4 b) 5 c) 8 d) 10 e) 6

17. La suma de los tres números positivos, que forman una P.A. es igual a 21. Si a estos números les sumamos respectivamente 2, 3 y 9 los nuevos números forman una P.G., hallar el producto de ellos.

a) 3 b) 7 c) 11 d) 231 e) 77

18. El por ciento (por el peso) de alcohol de tres soluciones forman una P.G. Si se mezclan la primera, segunda y tercera solución en proporción de peso de 2:3:4 se obtendrá una solución de un 32% de alcohol. Si éstas se mezclan en proporción de 3:2:1, se obtendrá una solución de 22% de alcohol. ¿Qué por ciento de alcohol contiene la segunda solución?

a) 12% b) 24% c) 48%

d)16% e) 20%

19. Sobre el radio de una semicircunferencia describimos otra circunferencia, sobre el radio de esta nueva circunferencia describimos otra nueva circunferencia y así sucesivamente. Hallar la suma de las longitudes de todas las semicircunferencias, siendo el radio de la primera "r".

a) r b) $\frac{r}{2}$ C) 2r

d) $\frac{r}{4}$ e) $\frac{r}{8}$

20. Tres números están en P.G., si al segundo se le suma 2, se convierte en aritmética. Si a continuación se le suma 9 al tercero vuelve a ser geométrica. Hallar el tercer número de la progresión inicial

a) 8 b) 10 c) 15 d) 16 e) 18

CLAVE DE RESPUESTAS

1) C	2) D	3) B	4) E	5) D
6) B	7) D	8) D	9) A	10) C
11) D	12) C	13) C	14) B	15) C
16) E	17) D	18) B	19) C	20) D

LOGARITMOS

PRINCIPALES CONCEPTOS

DEFINICIÓN

Se llama logaritmo de un número, en una base dada, positiva y distinta de la unidad, al **exponente** a que debe elevarse la base para obtener dicho número.

NOTACIÓN

Sea el número "N" y la base "b":

$$\log_b N$$

es el "logaritmo en base b de N"

NOTACIÓN IMPORTANTE:

Sí: $\log_b N = x \Rightarrow b^x = N$ (1)

también: $b^{\log_b N} = N$ (2)

Ejemplos:

i) Si: $5^4 = 625$, se tiene:

$$\log_5 625 = 4$$

ii) Si: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$, se tiene:

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el logaritmo de $8\sqrt[3]{4}$ en base $\sqrt[5]{2}$.

Solución:

Sea "x" el logaritmo buscado:

$$\therefore \quad \log_{\sqrt[5]{2}} 8\sqrt[3]{4} = x$$

Por definición:

$$\left(\sqrt[5]{2}\right)^x = 8\sqrt[3]{4}$$

$$2^{\frac{x}{5}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad 2^{\frac{x}{5}} = 2^{\frac{11}{3}}$$

igualando los exponentes:

$$\frac{x}{5} = \frac{11}{3}$$

de donde: $x = \dfrac{55}{3}$

$$\therefore \quad \log_{\sqrt[5]{2}} 8\sqrt[3]{4} = \frac{55}{3}$$

2.- Calcular "x" en:

$$\log_{\sqrt[15]{27}} 3\sqrt[5]{9} = \sqrt{47 + \sqrt[4]{14 + \sqrt[5]{29 + \sqrt[3]{x}}}}$$

Solución:

Igualando a "y" el logaritmo y calculando este valor:

$$\log_{\sqrt[15]{27}} 3\sqrt[5]{9} = y$$

Por definición:

$$\left(\sqrt[15]{27}\right) = 3\sqrt[5]{9}$$

$$\left(3^{\frac{3}{15}}\right)^{y} = 3 \,.\, 3^{\frac{2}{5}}$$

$$3^{\frac{y}{5}} = 3^{\frac{7}{5}}$$

igualando exponentes:

$$\frac{y}{5} = \frac{7}{5}$$

$$y = 7$$

Sustituyendo en la igualdad propuesta:

$$7 = \sqrt{47 + \sqrt[4]{14 + \sqrt[5]{29 + \sqrt[3]{x}}}}$$

Elevando al cuadrado y transponiendo:

$$2 = \sqrt[4]{14 + \sqrt[5]{29 + \sqrt[3]{x}}}$$

Elevando a la cuarta potencia y transponiendo:

$$2 = \sqrt[5]{29 + \sqrt[3]{x}}$$

Elevando a la quinta potencia y transponiendo:

$$3 = \sqrt[3]{x}$$

Elevando al cubo:

$$x = 27$$

3.- ¿Cuál es la base del logaritmo de:

$$\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$$

si éste es igual a 3?

Solución:

Sea x la base buscada, luego:

$$\log_x \sqrt{3}^{\sqrt{3}} = 3$$

Por definición: $x^3 = \sqrt{3}^{\sqrt{3}}$

Extrayendo la raíz cúbica:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{3}^{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt[\sqrt{3}]{\sqrt{3}}$$

$$x = \sqrt[\sqrt{3}]{\sqrt{3}}$$

4.- Calcular "x" en la igualdad:

$$x^{\log_x x^3} + 27x^{\log_x x} = 9x^{\log_x x^2} + 27$$

Solución:

Aplicando la relación:

$$\log_b b^N = N$$

$$x^3 + 27x = 9x^2 + 27$$

$$(x^3 - 27) + (27x - 9x^2) = 0$$

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 9x(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$(x - 3)(x - 3)^2 = 0$$

$$(x - 3)^3 = 0$$

extrayendo raíz cúbica y despejando x:

$$x = 3$$

SISTEMA DE LOGARITMOS

Se denomina sistema de logaritmos al conjunto de valores formados por los números positivos de la expresión.

$$x = \log_b N$$

Cada expresión de la forma $x = \log_b N$ constituye un sistema de logaritmos; de donde se deduce que existen infinitos sistemas de logaritmos según cual sea la base "b" que se elija. Los más utilizados son dos:

1.- El sistema de logaritmos naturales, hiperbólicos o neperianos, cuya base "b" es el número trascendente:

$$e = 2{,}718281\ldots$$

2.- El sistema de logaritmos decimales, vulgares o de Briggs, cuya base "b" es el número 10.

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

Estas propiedades se cumplen para los infinitos sistemas de logaritmos.

1º Solamente existen sistemas de logaritmos cuyas base es una cantidad positiva diferente de 1.

2º En el campo de los números reales no existen logaritmos de cantidades negativas.

3º Si la base es mayor que la unidad, entonces:

$$\log_b \infty = +\infty \quad y \quad \log_b 0 = -\infty$$

Si la base es menor que la unidad, entonces:

$$\log_b \infty = -\infty \quad y \quad \log_b 0 = \infty$$

4º En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es igual a la unidad.

$$\log_b b = 1$$

5º En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la unidad es cero.

$$\log_b 1 = 0$$

6º En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b M \,.\, N = \log_b M + \log_b N$$

7º En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

8º En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_b M^n = n \log_b M$$

9º En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de una raíz de un número positivo es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{\log_b M}{n}$$

10º En todo sistema de logaritmos, si se eleva a la base y al número a una potencia "n" o a una raíz "n", el resultado es igual al logaritmo dado, no varía.

$$\log_b N = \log_{b^n} N^n = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{M}$$

COLOGARITMO.- De un número en una base "b" es el logaritmo de la inversa del número en la misma base. También es equivalente al logaritmo del número en la base, precedido del signo menos.

$$\text{colog}_b N = \log_b \left(\frac{1}{2}\right) = -\log_b N$$

ANTILOGARITMO.- Se denomina antilogaritmo en una base "b" al número que dio origen al logaritmo.

$$\text{Antilog}_b\ x = b^x$$

y por definición, también se obtiene:

$$\text{Antilog}_b\ \log_b N = N$$

CAMBIO DE UN SISTEMA DE LOGARITMOS A OTRO

El problema consiste en calcular el logaritmo de un número "N" en una base "b" si se conoce el logaritmo de "N" en base "a".

Por definición:

$$N = b^{\log_b N}$$

también:

$$N = a^{\log_a N}$$

igualando los segundos miembros:

$$b^{\log_b N} = a^{\log_a N}$$

tomando logaritmos en base "a":

$$\log_b N .\ \log_a b = \log_a N .\ \log_a a$$

pero, $\log_a a = 1$

luego:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

que es la regla de transformación para cambiar la base de un logaritmo.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el valor de "x", sabiendo que:

$$\log x = \frac{1}{c}\left[\log\left(\log \log a^{b^{2^{2c}}} - \log \log a\right) - \log \log b\right]$$

Solución:

Transformando el segundo miembro; aplicando propiedades de logaritmos:

$$\log x = \frac{1}{c}\left[\log \log\left(\frac{\log a^{b^{2^{2c}}}}{\log a}\right) - \log \log b\right]$$

$$\log x = \frac{1}{c}\left(\log \log\left(\frac{b^{2^{2c}} \log a}{\log a}\right) - \log \log b\right)$$

$$\log x = \frac{1}{c}\left(\log \log b^{2^{2c}} - \log \log b\right)$$

$$\log x = \frac{1}{c}\log\left(\frac{\log b^{2^{2c}}}{\log b}\right) = \frac{1}{c}\log\left(\frac{2^{2c}\log b}{\log b}\right)$$

$$\log x = \frac{1}{c}\log 2^{2c} = \log (2^{2c})^{\frac{1}{c}} = \log 2^2 = \log 4$$

$$\log x = \log 4$$

Levantando logaritmos:

$$x = 4$$

> NOTA.- Cuando no se coloca la base de los logaritmos se sobreentiende que la base "b" es 10.

2.- Calcular el valor de:

$$E = \text{colog}_4 \text{ antilog}_2 \log_2 \log_2 \text{ antilog}_{0,5} \log_{0,2} 625$$

Solución:

Reduciendo los valores desde la parte final hacia el principio, resulta:

a) $\log_{0,2} 625 = \log_{\frac{1}{5}} 625 = \log_{\frac{1}{5}} 5^4$

$$= \log_{\frac{1}{5}} (5^{-1})^{-4} = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = -4$$

b) Por definición:

$$\text{antilog}_{0,5} (-4) = (0,5)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$$

c) $\log_2 16 = \log_2 (2)^4 = 4 \,.\, \log_2 2 = 4$

d) $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \,.\, \log_2 2 = 2$

e) Por definición:

$$\text{antilog}_2 2 = 2^2 = 4$$

f) $\text{colog}_4 4 = -\log_4 4 = -1$

$\therefore$ $E = -1$

3.- Dado:

$$\log_a \sqrt[3]{\left[a\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2\right]} = \frac{1}{2}$$

calcular:

$$\log_a \sqrt[4]{\left[a\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right]^3}$$

Solución:

Sea "x" el logaritmo pedido, se tendrá:

$$\log_a \sqrt[4]{\left[a\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right]^3} = x$$

$$\log_a \sqrt[3]{\left[a\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right]^2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[4]{\left[a\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right]^3} = a^x$$

$$\sqrt[3]{\left[a\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right]^2} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[a\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right]^3 = a^{4x}$$

$$\left[a\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]^2 = a^{\frac{3}{2}}$$

$$a\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = a^{\frac{4x}{3}}$$

$$a\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = a^{\frac{3}{4}}$$

Multiplicando miembro a miembro las dos últimas igualdades, se tiene:

$$a^2(3-2) = a^{\frac{4x}{3}+\frac{3}{4}}$$

$$a^2 = a^{\frac{16x+9}{12}}$$

igualando exponentes:

$$2 = \frac{16x+9}{12}$$

de donde:

$$x = \frac{15}{16}$$

4.- Hallar el valor de "x" en:

$$\frac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)} = 1$$

Solución:

Transponiendo términos:

$$1+\log_2(x-4) = \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)$$

Escribiendo: $1 = \log_2 2$

$$\log_2 2+\log_2(x-4) = \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)$$

$$\log_2 (2)(x-4) = \log_{(\sqrt{2})^2} \cdot \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)^2$$

(prop.10)

$$\log_2(2x-8) = \log_2\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)^2$$

tomando antilogaritmos en la misma base o lo que se llama "levantando logaritmos":

$$2x-8 = \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)^2$$

$$2x-8 = x+3-2\sqrt{x^2-9}+x-3$$

$$-8 = -2\sqrt{x^2-9}$$

$$4 = \sqrt{x^2-9}$$

elevando al cuadrado:

$$16 = x^2-9$$

$$x = \pm 5$$

$$x = -5 \text{ (NO)}$$

Rpta.: $x = 5$

5.- Hallar el valor de "x" en:

$$-\frac{\log\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\log\sqrt[3]{x-40}} = 3$$

Solución:

Pasando el denominador al segundo miembro y transformando:

$$\log\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 3\log\sqrt[3]{x-40}$$

$$\log\left(\sqrt{x+1}+1\right) = \log\left(\sqrt[3]{x-40}\right)^3$$

tomando antilogaritmo o levantando logaritmos:

$$\sqrt{x+1}+1 = x-40 \quad ; \quad \sqrt{x+1} = x-41$$

elevando al cuadrado:

$$x+1 = x^2-82x+1\,681$$

$$x^2-83x+1\,680 = 0 \quad ; \quad (x-35)(x-48) = 0$$

$$\therefore\ x = 35 \text{ (NO)} \ ; \ x = 48 \text{ (SI)}$$

6.- Resolver:

$$2^{\log_7(x^2-7x+21)} = 3^{\log_7 4}$$

Solución:

tomando logaritmos en base 7:

$$\log_7 (x^2 - 7x + 21)\log_7 2 = \log_7 4 \,.\, \log_7 3$$

$$\log_7 (x^2 - 7x + 21)\log_7 2 = \log_7 2^2 \,.\, \log_7 3$$

$$\log_7 (x^2 - 7x + 21)\log_7 2 = 2\log_7 2 \,.\, \log_7 3$$

simplificando:

$$\log_7 (x^2 - 7x + 21) = 2\log_7 3$$

$$\log_7 (x^2 - 7x + 21) = \log_7 3^2$$

Tomando antilogaritmos, o levantando logaritmos:

$$x^2 - 7x + 21 = 9$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x - 4)(x - 3) = 0$$

$\therefore\ x = 4\ ,\ \ x = 3$

7.- Calcular el valor de:

$$E = \log_2 x \,.\, \log_{4x} 8 \,.\, \log_x 4 \,.\, \log_{2x} 8 \,.\, \log_4 2x \,.\, \log_2 4x$$

Solución:

Aplicando la fórmula del cambio de base:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

para escribir todos los logaritmos en base "2". Se tendrá:

$$E = (\log_2 x)\left(\frac{\log_2 8}{\log_2 4x}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 x}\right)\left(\frac{\log_2 8}{\log_2 2x}\right) \,.\, \left(\frac{\log_2 2x}{\log_2 4}\right)(\log_2 4x)$$

simplificando:

$$E = (\log_2 8) \,.\, (\log_2 8) = (\log_2 2^3) \,.\, (\log_2 2^3)$$

$$E = 3\log_2 2 \,.\, 3\log_2 2 = 3 \,.\, 3$$

Rpta.: $E = 9$

8.- Resolver:

$$(\log_x 2) \,.\, (\log_{\frac{x}{16}} 2) = \log_{\frac{x}{64}} 2$$

Solución:

Escribiendo cada uno de los logaritmos en base 2, aplicando la fórmula de cambio de base:

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 x} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2\left(\frac{x}{16}\right)} = \frac{\log_2 2}{\log_2\left(\frac{x}{64}\right)}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 x - \log_2 16} = \frac{1}{\log_2 x - \log_2 64}$$

$$\frac{1}{(\log_2 x)(\log_2 x - \log_2 2^4)} = \frac{1}{(\log_2 x - \log_2 2^6)}$$

$$\frac{1}{\log_2 x(\log_2 x - 4)} = \frac{1}{(\log_2 x - 6)}$$

invirtiendo y efectuando:

$$(\log_2 x) \,.\, (\log_2 x) - 5(\log_2 x) + 6 = 0$$

factorizando:

$$(\log_2 x - 3)\,(\log_2 x - 2) = 0$$

Igualando cada factor a cero:

$$\log_2 x - 3 = 0$$

$$\log_2 x = 3$$

$$\therefore\ \ x_1 = 2^3 = 8$$

$$\log_2 x - 2 = 0$$

$$\log_2 x = 2$$

$$\therefore\ \ x^2 = 2^2 = 4$$

Rpta.: $x_1 = 8\ ;\ x_2 = 4$

9.- Sabiendo que:

$$\log_a \log_a b - \log_a \log_a c = 1$$

Calcular:

$$E = \log_a \log_b a - \log_a \log_c a$$

Solución:

Por propiedad, la condición se escribe así:

$$\log_a \left\{ \frac{\log_a b}{\log_a c} \right\} = 1$$

Por la 4ta. propiedad:

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = a$$

$$\log_a b = a \log_a c \quad \rightarrow \quad \log_a b = \log_a c^a$$

tomando antilogaritmos en base "a":

$$b = c^a \qquad (1)$$

En la expresión pedida, transformando:

$$E = \log_a \left\{ \frac{\log_b a}{\log_c a} \right\}$$

Cambiando la base de los logaritmos, a base "a":

$$E - \log_a \left\{ \frac{\dfrac{\log_a a}{\log_a b}}{\dfrac{\log_a a}{\log_a c}} \right\}$$

simplificando:

$$E = \log_a \left(\frac{\log_a c}{\log_a b} \right) \qquad (2)$$

En (1) tomando logaritmos en base "a":

$$\log_a b = a \log_a c \qquad (3)$$

sustituyendo (3) en (2):

$$E = \log_a \left(\frac{\log_a c}{a \log_a c} \right)$$

simplificando:

$$E = \log_a \left(\frac{1}{a} \right) = \log_a 1 - \log_a a = 0 - 1$$

Rpta.: $E = -1$

10.- Resolver:

$$\log_x \left(\frac{8 - \log_5 x}{\log_5 x} \right)^{\log_3 x} - 1 = 0$$

Solución:

Efectuando el logaritmo de la potencia y pasando "-1" al segundo miembro:

$$\log_3 x \,.\, \log_x \left(\frac{8 - \log_5 x}{\log_5 x} \right) = 1$$

$$\log_x \left(\frac{8 - \log_5 x}{\log_5 x} \right) = \frac{1}{\log_3 x}$$

En el segundo término cambiando la base "x":

$$\log_x \left(\frac{8 - \log_5 x}{\log_5 x} \right) = \frac{1}{\dfrac{\log_x x}{\log_x 3}}$$

$$\log_x \left(\frac{8 - \log_5 x}{\log_5 x} \right) = \log_x 3$$

Tomando antilogaritmos en base "x":

$$\frac{8 - \log_5 x}{\log_5 x} = 3 \quad \rightarrow \quad 8 - \log_5 x = 3 \log_5 x$$

$$8 = 4 \log_5 x \quad \rightarrow \quad 2 = \log_5 x$$

Por definición:

$$x = 5^2 \quad \rightarrow \quad x = 25$$

11.- Resolver el sistema:

$$\log^2 xy - \log^2 \frac{x}{y} = 8 \qquad (1)$$

$$2^{\log x} = 4^{\log y} \qquad (2)$$

Solución:

De la ecuación (2):

$$2^{\log x} = (2^2)^{\log y} = 2^{2 \log y} = 2^{\log y^2}$$

de donde:

$$\log x = \log y^2$$

levantando logaritmos:

$$x = y^2 \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$\log^2 y^3 - \log^2 y = 8$$

$$9 \log^2 y - \log^2 y = 8$$

$$8 \log^2 y = 8 \quad \rightarrow \quad \log^2 y = 1$$

$$\log y = \pm 1$$

$$y = 10$$

o:

$$y = 10^{-1}$$

Sustituyendo los valores de "y" en (3):

$$y = 10^2$$

o:

$$y = 10^{-2}$$

12.- Resolver el sistema:

$$\log \sqrt[\log x]{z} = x \qquad (1)$$

$$x^{x^{x^{x+1}}} \cdot \log_z x = x^{\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[]{2}} - 1} \qquad (2)$$

Solución:

De la ecuación (1):

$$\log z^{\frac{1}{\log x}} = x$$

o:

$$\frac{1}{\log x} \log z = x$$

$$\log z = x \log x$$

$$\log z = \log x^x$$

$$\therefore \qquad z = x^x \qquad (3)$$

En (3) tomando logaritmos en base "z":

$$\log_z z = \log_z x^x = x \log_z x$$

$$\therefore\ 1 = x \log_z x$$

$$\log_z x = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad (4)$$

sustituyendo (4) en (2):

$$x^{x^{x^{x+1}}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[]{2}}} \cdot x^{-1}$$

simplificando:

$$x^{x^{x^{x+1}}} = x^{\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[]{2}}}$$

transformando:

$$x^{x^{x^{x}\cdot x}} = x^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

igualando exponentes:

$$x^{x^{x}\cdot x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$(x^x)^{x^x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

por comparación:

$$x^x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{1}}$$

otra vez por comparación:

$$x = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en (3):

$$z = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Rpta.: $x = \dfrac{1}{2}$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

13.- Resolver el sistema:

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \qquad (1)$$

$$\log_3 x + \log_9 z + \log_9 x = 2 \qquad (2)$$

$$\log_4 z + \log_{16} y + \log_{16} x = 2 \qquad (3)$$

Solución:

Las ecuaciones se pueden escribir:

$$\log_4 x^2 + \log_4 y + \log_4 z = 2 \qquad (1)$$

$$\log_9 y^2 + \log_9 z + \log_9 x = 2 \qquad (2)$$

$$\log_{16} z^2 + \log_{16} y + \log_{16} x = 2 \qquad (3)$$

o también:

$$\log_4 x^2yz = 2 \rightarrow x^2yz = 16 \qquad (\alpha)$$

$$\log_9 xy^2z = 2 \rightarrow xy^2z = 81 \qquad (\beta)$$

$$\log_{16} xyz^2 = 2 \rightarrow xyz_2 = 256 \qquad (\gamma)$$

Multiplicando miembro a miembro (α), (β) y (γ):

$$x^4 y^4 z^4 - (2^4) . (3^4) . (4^4)$$

Extrtayendo la raíz cuarta:

$$xyz = (2).(3).(4) \dots \qquad (\phi)$$

Dividiendo $(\alpha) \div (\phi)$:

$$x = \frac{2}{3}$$

Dividiendo $(\beta) \div (\phi)$:

$$y = \frac{27}{8}$$

Dividiendo $(\gamma) \div (\phi)$:

$$z = \frac{32}{3}$$

LOGARITMOS COMO PROGRESIONES

DEFINICIÓN

Dadas dos progresiones indefinidas, una geométrica de razón "q" ($q > 0$ y $q \neq 1$) que tiene como uno de sus términos "1" y otra aritmética de razón "r" que tiene como uno de sus términos a "0", ordenadas de tal modo que el "1" de la P.G. y el "O" de la P.A. se correspondan. Logaritmo de un término de la P.G. es el término que le corresponde en la P.A.

Así, las progresiones siguientes definen un sistema de logaritmos:

decreciente $\longleftarrow$ $\qquad$ $\longrightarrow$ creciente

$$:: \dots q^{-n} \dots q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \dots q^n$$

$$: \dots -rn \dots -3r . -3r . r . 0 . r . 2r . 3r \dots nr \dots$$

decreciente $\longleftarrow$ $\qquad$ $\longrightarrow$ creciente

donde: $\quad$ (1) $\quad \log_b q^n = nr$

(2) $\quad \log_b q^2 = 2r$; etc.

Si se desea hallar el logaritmo de un número "N" que no se encuentra en la P.G., por ejemplo que está comprendido entre q^4 y q^5 ($q^4 > q^5$) bastará interpolar el número necesario de tal manera que aparezca en la P.G. el número "N" y en la P.A. el correspondiente logaritmo.

BASE DEL SISTEMA DE LOGARITMOS DEFINIDO POR UNA P.G. Y UNA P.A.

Sea: $\qquad \log_b q^n = nr \rightarrow q^n = b^{nr}$

$\therefore \qquad b = \sqrt[r]{q}$

La base de todo sistema de logaritmos, en este caso, es igual a la raíz de la "razón de la P.G.", cuyo índice es la "razón de la P.A."

Ejemplo:

Hallar la base del sistema de logaritmos definido por las progresiones:

$$:: \dots : \frac{1}{81} : \frac{1}{9} : 1 : 9 : \dots$$

$$: \dots : -8 . -4 . 0 . 4 \dots$$

Solución:

Se sabe que:

$$b = \sqrt[r]{q} \qquad (1)$$

Para la P.G. :

$$q = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{81}} = 9$$

Para la P.A.:

$$r = -4 - (-8) = 4$$

sustituyendo en (1):

$$b = \sqrt[4]{9}$$

$$\therefore \qquad b = \sqrt{3}$$

PROPIEDADES

1º Hay infinitos sistemas de logaritmos.

2º En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de "1" es cero y el logaritmo de la base es la unidad.

3º Los números negativos no tienen logaritmos en el campo de los números reales.

4º Si las dos progresiones son crecientes en el mismo sentido, los números mayores que "1", tienen logaritmos positivos, y los menores que "1", logaritmos negativos.

SISTEMA DE LOGARITMOS NEPERIANOS

Se denomina sistema de logaritmos neperianos, naturales o hiperbólicos, al sistema que tiene como base el número trascendente "e" definido así:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281\ldots$$

o:

$$e = \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2{,}718281\ldots$$

Este sistema viene definido por las expresiones siguientes:

decreciente

$$\xleftarrow{\hspace{6cm}}$$

$$:: \ \ldots (1+\alpha)^{-n} : \ldots :(1+\alpha)^{-1}$$

creciente

$$\xrightarrow{\hspace{6cm}}$$

$$: 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : \ldots : (1+\alpha)^n$$

$$: \ldots \ . \ -n\alpha \ldots -2\alpha \ . \ -\alpha \ . \ 0 \ . \ \alpha \ . \ 2\alpha \ . \ 3\alpha \ldots n\alpha \ldots$$

$$\xleftarrow[\text{decreciente}]{\hspace{4cm}} \qquad \xrightarrow[\text{creciente}]{\hspace{4cm}}$$

donde al ser infinitamente pequeño, real y positivo; la primera progresión contiene todos los números y en la segunda están sus logaritmos.

CÁLCULO DE "e".- Por definición:

$$e = \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

desarrollando por Binomio de Newton:

$$e = \lim \left[(1)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)(1)^{\frac{1}{\alpha}-1}(\alpha) + \ldots \right.$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}{\lfloor 2} (1)^{\frac{1}{\alpha}-2} (\alpha)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\alpha}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{\alpha}-k+1\right)}{\lfloor k}$$

$$\left. (1)^{\frac{1}{\alpha}-2} (\alpha)^k + \ldots \right]$$

estableciendo el límite:

$$e + (1) + (1) + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \ldots$$

$$e = 2 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \ldots$$

$$e = 2{,}718281 \ldots$$

El logaritmo de un número "N" en base "e" se representa por:

$$\ln N$$

SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES, VULGARES O DE BRIGGS

Son logaritmos de base 10 definidos por las progresiones:

$$:: \ldots 10^{-n} \ldots : 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 1 : 10 :$$

$$: 10^{2} : 10^{3} : \ldots 10^{n} : \ldots$$

$$: \ldots -n : \ldots -3 .- 2 . -1 . -0 . 1 . 2 . 3 \ldots n \ldots$$

Este sistema de logaritmos es el que generalmente se emplea en el cálculo numérico por coincidir su base con la del sistema de numeración decimal.

PROPIEDADES DEL SISTEMA DE LOGARITMOS

VULGARES

1º Los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos y los logaritmos de los números menores que 1 son negativos.

2º Los logaritmos de potencias de 10, son iguales al exponente de dicha potencia.

3º El logaritmo de un número comprendido entre dos potencias consecutivas de 10 son decimales; por ejemplo el logaritmo de un número comprendido entre 102 y 103 está comprendido entre 2 y 3, la parte entera se llama CARACTERISTICA y la parte decimal se llama MANTISA.

Ejemplos:

En las Tablas de Logaritmos:

$$\log 545 = 2{,}736397$$

(este es un número comprendido entre 10^2 y 10^3), donde la característica es 2 y la mantisa es igual a : 0,736397

4º La característica del logaritmo vulgar de un número mayor o igual que uno, es positiva e igual al número de cifras que hay en la parte entera, menos una unidad.

Ejemplos:

i) 5 es un número de una cifra entera, luego:

log 5 tiene como característica 0.

ii) 27,95 es un número que tiene 2 cifras enteras, luego:

log 27,95 tiene como característica 1.

iii) 457,383 es un número que tiene 3 cifras enteras, luego:

log 457,383 tiene como característica 2.

5º La característica del logaritmo decimal de un número menor que la unidad es negativa, o igual al número de ceros que preceden a la primera cifra significativa, considerando incluso el cero de los enteros.

Ejemplos:

i) log 0,7 tiene como característica -1.

ii) log 0,0041 tiene como característica -3.

6º Si se multiplica o divide un número por la unidad seguida de ceros, no altera la mantisa de su logaritmo; pero la característica aumenta o disminuye respectivamente de tantas unidades como ceros acompañan a la unidad.

Ejemplo:

los logaritmos de los números:

0,000453 ; 0,00453 ; 0,0453 ; 0,453 ; 4,53

tienen diferentes características pero la misma mantisa.

CÁLCULO DE LA MANTISA.- El cálculo de la mantisa del logaritmo de un número se lleva a cabo mediante el uso de la Tabla de Logaritmos.

TRANSFORMAR UN LOGARITMO TOTALMENTE NEGATIVO EN OTRO PARCIALMENTE NEGATIVO Y VICEVERSA

1) Para transformar un logaritmo totalmente negativo en otro parcialmente negativo, se suma "-1" a la característica, "+1" a la mantisa.

Ejemplo: Se procede así:

$$\text{colog } 75 = -\log 75 = -2{,}875061$$

$$= -(2 + 0{,}8755061)$$

$= -2- 0{,}875061 + 1 - 1$

$= (-2 - 1) + (1 - 0{,}875061)$

ordenando: $= -3 + 0{,}124939$

$\text{colog } 75 = \overline{3}{,}124939$

2) Para transformar un logaritmo parcialmente negativo en otro totalmente negativo, se suma y resta “1”.

Ejemplo: Se procede así:

$\log 0.071 = \overline{2}{,}851258$

$= -2 + 0{,}851258 + 1 - 1$

$= (-2 + 1) - (1- 0{,}851258)$

$= -1- 0{,}148742$

$= -1{,}148742$

CÁLCULO LOGARITMICO

SUMA DE LOGARITMOS

Para sumar logaritmos de característica positiva, se suma como si fueran números decimales cualquiera; los logaritmos con característica negativa se suma teniendo en cuenta el signo de la característica y las mantisas se suma como cualquier número decimal.

Ejemplos:

i)
$$\begin{array}{r} 0{,}17096\ + \\ 1{,}23047 \\ 3{,}73919 \\ \hline 5{,}14062 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{r} \overline{2}{,}43128\ + \\ \overline{4}{,}26081 \\ \overline{2}{,}43128 \\ \hline \overline{7}{,}12337 \end{array}$$

RESTA DE LOGARITMOS

Para restar logaritmos se efectúa la mantisa como si se tratara de decimales cualesquiera, pero teniendo en cuenta el signo de la característica cuando se restan éstas.

Ejemplos:

i)
$$\begin{array}{r} 4{,}17096\ - \\ 1{,}23047 \\ \hline 2{,}94049 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{r} 2{,}56937\ - \\ \overline{3}{,}33646 \\ \hline 5{,}23291 \end{array}$$

PRODUCTO DE LOGARITMOS

Para hallar el producto de un logaritmo por un número entero, se efectúa como el producto de un número decimal por otro, pero teniendo en cuenta el signo de la característica.

Ejemplos:

i)
$$\begin{array}{r} 2{,}45234\ \text{x} \\ 2 \\ \hline 4{,}90468 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{r} \overline{16}{,}34783\ \text{x} \\ 3 \\ \hline 47{,}04349 \end{array}$$

Si el número es negativo todo el producto es negativo, luego el resultado se transforma en característica negativa y mantisa positiva.

Ejemplos:

i)
$$\begin{array}{r} 2{,}56937\ \text{x} \\ -2 \\ \hline -5{,}13874 \end{array}$$

ii) $\overline{2}{,}33646 \, . \, (-3)$

Por partes:

$(-2)(-3) = 6 \qquad (1)$

$(0{,}33646)(-3) = -1{,}00938$

$(0{,}33646)(-3) = \overline{2}{,}99062 \qquad (2)$

Sumando (1) con (2) se obtiene:

$\overline{2}{,}33646 \, . \, (-3) = 4{,}99062$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE LOGARITMOS ENTRE SI

Si los logaritmos que han de multiplicarse o dividirse son positivos, se procede lo mismo que en Aritmética.

Si uno de los dos logaritmos es parcialmente negativo; ésto es, si tienen característica negativa y mantisa positiva, se transforma en su equivalente totalmente negativo antes de efectuar la operación.

Ejemplos:

i) Efectuar: $(\overline{3}{,}33646)(\overline{2}{,}56937)$

Solución:

Transformando a negativo:

$= (-2{,}66354)(-1{,}43063) = + 3{,}81054$

$ii)$ Dividir: $\dfrac{\overline{16},34783}{2,64048}$

Solución:

Transformando a negativo:

$$\frac{-15,65217}{2,64048} = -5,92777$$

CONVERSIÓN DE LOGARITMOS DECIMALES A LOGARITMOS NEPERIANOS

Utilizando la fórmula del cambio de base:

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_e N} = 2,3026 \log_{10} N$$

Luego:

$$\log_e N = 2,3026 \log_{10} N$$

Ejemplo:

Hallar el logaritmo neperiano de 1 000.

$$\log 1\,000 = 2,3026 \log 1\,000$$

$$= 2,3026 \cdot 3$$

$$= 6,9078$$

CONVERSIÓN DE LOGARITMOS NEPERIANOS A LOGARITMOS DECIMALES

Por fórmula:

$$\log N = \frac{\log_e N}{\log_e 10} = \frac{1n\ M}{2,3026} = 0,343\ 1n\ N$$

$$\therefore \quad \log N = 0,4343\ 1n\ N$$

Ejemplo:

Hallar el logaritmo decimal de 16 si:

$$1n\ 4 = 1,36863$$

$$\log 16 = 0,4343\ 1n\ 16 = 0,4343\ 1n\ 4^2$$

$$= 2(0,4343)\ 1n\ 4 = 2(0,4343)(1,36863)$$

$$\log 16 = 1,20412$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Calcular:

$$E = \log \sqrt[4]{781,25} \text{ si } \log 2 = 0,301030$$

Solución:

Transformando la expresión E :

$$E = \log \sqrt[4]{\frac{781,25 \cdot 100}{100}}$$

$$E = \log \sqrt[4]{\frac{78\,125}{100}} = \frac{1}{4} \log \left(\frac{78\,125}{100}\right)$$

$$E = \frac{1}{4} (\log 78\,125 - \log 100) = \frac{1}{4} (\log 5^7 - 2)$$

$$E = \frac{1}{4} (7 \log 5 - 2) = \frac{1}{4} \left(7 \log \frac{10}{2} - 2\right)$$

$$E = \frac{1}{4} [7(\log 10 - \log 2) - 2] = \frac{1}{4} [7(1 - \log 2) - 2]$$

$$E = \frac{1}{4} (7 - 7 \log 2 - 2) = \frac{1}{4} (5 - 7 \log 2)$$

$$E = \frac{1}{2} [5 - 7(0,301030)] = \frac{1}{2} (5 - 2,10721)$$

$$E = 0,7231975$$

2.- Hallar el número de cifras que tiene el siguiente producto:

$$E = 5^{40} \cdot 2^{80}$$

si $\log 2 = 0,30103$

Solución:

Tomando logaritmos vulgares a ambos miembros, resulta:

$$\log E = 40 \log 5 + 80 \log 2$$

$$= 40\left(\log \frac{10}{2}\right) + 80 \log 2$$

$$= 40 (\log 10 - \log 2) + 80 \log 2$$

$$= 40(1 - \log 2) + 80 \log 2$$

$$= 40 - 40 \log 2 + 80 \log 2$$

$$= 40 + 40 \log 2$$

$$= 40(1 + \log 2) = 40(1 + 0{,}301030)$$

$\log E = 52{,}04120$

Como la característica es 52, el producto es un número que tiene 53 cifras enteras.

3.- Calcular el valor de:

$$E = \frac{e^{\ln(z-y)} + e^{\ln(z-x)} + e^{\ln(x+y)}}{(e^x + e^y + e^z)(x + y + z)}$$

si se cumple que $x = \ln 2$, $y = \ln 3$, $z = \ln 6$.

Solución:

Como por propiedad $a^{\log_a N} = N$, el numerador se transforma:

$$E = \frac{(z - y) + (z - x) + (x + y)}{(e^{\ln 2} + e^{\ln 3} + e^{\ln 6})(x + y + z)}$$

simplificando y reemplazando por sus equivalentes:

$$E = \frac{2z}{(2 + 3 + 6)\ (\ln 2 + \ln 6 + \ln 3)}$$

$$E = \frac{2(\log 6)}{(11)(\ln 2 \,.\, 3 \,.\, 6)} = \frac{\ln 6^2}{(11)\ln 36}$$

$$E = \frac{1}{11}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar el valor de:

$$E = \left(\sqrt[\log_2 3]{\log_3 13_5 - \log_9 25}\right) \log_{\sqrt[3]{0{,}125}} \sqrt{0{,}04}$$

a) 1 b) 3 c) 0 d) 4 e) 5

2. Sabiendo que:

$$(a - b)^{-1} + (b - c)^{-1} = (a - c)^{-1}$$

encontrar el valor de:

$$E = \frac{\log(a - b) + \log(b - c)}{\log(a - c)}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 10 e) 9

3. Resolver:

$$(\log b)^{\log x} \,.\, (\log b)^{\log x^2}$$

$$.\, (\log b)^{\log x^3} \ldots (\log b)^{\log x^x} = (\log b)^{x^2+x}$$

a) 200 b) 100 c) 400

d) 20 e) 150

4. ¿Qué valor de "x" verifica la igualdad:

$$\text{antilog}_4\, x = \text{antilog}_2 \left[\text{colog}_{\sqrt{6}} (3 \log_{\sqrt{3}} 3)\right]$$

a) -1 b) 1 c) 3 d) 4 e) -2

5. Hallar el valor de 'a" en la siguiente expresión:

$$\log_{\sqrt{a}^{\,a}} a^{\sqrt{a}} \,.\, \log_a \left(\sqrt[a]{a}\right)^{\sqrt{a}} \,.\, \log_{a_{\sqrt{a}}} \sqrt[\sqrt{a}]{a} = \sqrt{2}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{2}$

6. Calcular E, si $x = \sqrt[10]{3}$

$$E = \log_x\left(3^{\log_{\sqrt{3}} x} + 4^{\log_2 x} + 6^{\log_{\sqrt{6}} x}\right)$$

a) 11 b) 3 c) 10 d) 9 e) 12

7. Resolver el sistema. Hallar "x":

$$\log^2 xy - \log^2 \frac{x}{y} = 8 \qquad (1)$$

$$2^{\log x} = 4^{\log y} \qquad (2)$$

a) 100 b) $\frac{1}{100}$ c) $\frac{2}{50}$

d) 1 e) 300

8. Si se verifican las ecuaciones, hallar xy:

$$(2x)^{\log 2} = (5y)^{\log 5}$$

$$5^{\log x} = 2^{\log y}$$

a) 1 b) 10 c) 0,1 d) 2 e) - 0,1

9. Proporcionar el valor de z del sistema tema:

$$\log \frac{xy}{a^z} = m \quad ; \quad \log \frac{xz}{a^y} = n$$

$$\log \frac{yz}{a^x} = p$$

a) a b) n + p c) $\frac{1}{2}a^{(n+p)}$

d) $a^{\frac{1}{2}(n+p)}$ e) p

10. Del sistema adjunto proporcionar: $\log_x y$.

$$a^{\log a} x = b^{\log b} y \ldots \qquad (1)$$

$$b^{\log a} x = a^{\log b} y \ldots \qquad (2)$$

a) 1 b) 2 c) 4 d) 3 e) 5

11. Resolver: $\left(\dfrac{1}{\log_x a}\right)^{\log_a x} = b^{2b}$

a) a^b b) b^a c) a d) b e) $-a^b$

12. Si "e" representa la base de logaritmos neperianos, resolver: (L = 1n)

$$\log_x\left(\frac{Lx - e}{Lx + e}\right)^{\log x} = L\left(\frac{1}{e}\right)$$

a) $x = e^{11e/9}$ b) $x = e^{4e/9}$

c) $x = e^{0e/9}$ d) $x = e^{9e/10}$

e) $x = e^e$

13. Si: $x = \log_b \,.\, \text{antilog}_b \,.\, \text{colog}_b \,.\, \text{antilog}_b(-b^{-1})$

Calcular:

$$E = \log_b[x^b - \text{colog}_x b^x]^2 + \text{colog}_{\frac{1}{x}} b^{x^2} + b^2$$

a) 1 b) -1 c) -2 d) 2 e) 0

14. Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(\log x)^{\frac{3\log(\log x)}{\log[\log(\log x)]}} = 27$$

a) 10^2 b) 10^3 c) 10^4

d) 10^1 e) 10^5

15. Si: $b^{b^{1-b}} = 5$ Simplificar:

$$(b^b \log_b x)^{b \log_b x} = b^{b^{2-b}}$$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

16. Hallar el valor de "x" en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^y = y^x \quad ; \quad 8^x = 5^y$$

a) $\left(\dfrac{\log 8}{\log 5}\right)^{\frac{\log 5}{\log 8 - \log 5}}$ b) $\left(\dfrac{\log 5}{\log 8}\right)^{\frac{\log 8}{\log 8 + \log 5}}$

c) $\left(\dfrac{\log 8}{\log 5}\right)^{\frac{\log 8}{\log 8 + \log 5}}$ d) $\left(\dfrac{\log 8}{\log 5}\right)^{\frac{\log 8}{\log 8 - \log 5}}$

d) $\left(\dfrac{\log 8}{\log 5}\right)^{\frac{\log 8}{\log 8 - \log 5}}$

17. Resolver el sistema y dar:

$$x\ \log_y x + y \log_x y = \frac{a + (a+b)^2\, a^{a+b}}{a+b} \qquad (1)$$

$$xy\ \log_{xy} a = \frac{a^{a+b+1}}{a+b+1} \qquad (2)$$

a) a b) ab c) -a

d) 1 e) 0

18. Resolver la ecuación:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} = \frac{2\log_a x}{\log_{\frac{1}{2}} a} = \log_{\sqrt{a}} x - \log_a x$$

a) $\sqrt[3]{2b^2}$ b) $\sqrt{2b^2}$ c) $-\sqrt[3]{2b^2}$

d) $\sqrt{3b^3}$ e) $2b^2$

19. Resolver la ecuación:

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\log \log n - 1)$$

¿Cuántas raíces tiene esta ecuación para un valor determinado de "n"?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

20. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a$$

a) a b) a^a c) a^2

d) $\sqrt{a}$ e) $a^{\sqrt{a}}$

CLAVE DE RESPUESTAS

1) E	2) B	3) B	4) A	5) B
6) E	7) A	8) C	9) D	10) A
11) A	12) C	13) D	14) B	15) D
16) A	17) A	18) A	19) B	20) C

INTERÉS COMPUESTO

PRINCIPALES CONCEPTOS

El interés compuesto, es un mecanismo mediante el cual las ganancias se van sumando al capital, generalmente cada año, para formar parte del mismo, produciendo nuevos intereses.

Simbología:

Monto = M = C + I = Capital + Intereses

Capital = C = Capital Impuesto

Tanto por Ciento = R (Interés producido por 100 soles en un año).

Tanto por uno = r = $\frac{R}{100}$ (Interés producido por un sol en un año).

Tiempo = t = (tiempo al que se impone el capital generalmente en años).

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA

Dado un capital "C" que se impone a interés compuesto al "r" por uno anual, durante un tiempo de "t" años. Calcular el monto que se obtiene al final de ese tiempo.

	Capital	Interés	Monto
1er. año	C	Cr	C + Cr = C(1+ r)
2do. año	C(1 + r)	Cr(1 + r)	$C(1 + r) + C(1 + r)r = C(1 + r)^2$
3er. año	$C(1 + r)^2$	$Cr(1 + r)^2$	$C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2r = C(1 + r)^3$
...	...	...	...
"t" años	—	—	$= C(1 + r)^t$

Por lo tanto el monto después de t años es:

$$M = C(1 + r)^t$$

OBSERVACION IMPORTANTE.- En la fómula $M = C(1 + r)^t$, el exponente t y el tanto por uno "r" siempre van expresados en la misma unidad, según sea el período, al fin del cual se capitalizan los intereses de acuerdo con esto:

	exponente (tiempo)	tanto por uno
capitalización anual	t (en años)	r (anual)
capitalización semenstral	2t	r/2
capitalización trimestral	4t	r/4
capitalización bimestral	6t	r/6
capitalización mensual	12t	r/12
capitalización diaria	360t	r/360

CASO EN QUE EL TIEMPO ES MULTIPLO DEL PERIODO DE CAPITALIZACIÓN

En este caso: $t = n + f$

donde:

n = # entero de años

f = fracción de año

en este caso se utiliza la fórmula:

$$M = C(1 + r)^n(1 + fr)$$

INTERÉS

Para determinar el interés se observa que:

$$M = C + I$$

$$I = M - C = C(1 + r)^t - C$$

$$\therefore \quad I = C\left[(1 + r)^t - 1\right]$$

ANUALIDADES

DEFINICIÓN.- Se denomina anualidad a la cantidad fija que se entrega o impone todos los años para formar un capital (anualidad de capitalización) o para amortizar una deuda (anualidad de amortización).

ANUALIDAD DE CAPITALIZACIÓN (A_c)

Es la cantidad fija que se impone al principio de cada año al "r" por uno de interés compuesto para formar un capital "C", en un tiempo "t".

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA

La 1ra. anualidad en t años se convierte en:

$$A_c(1 + r)^t$$

La 2da. anualidad en (t - 1) años se convierte en:

$$A_c(1 + r)^{t-1}$$

La 3ra. anualidad en (t - 2) años se convierte en:

$$A_c(1 + r)^{t-2}$$

y así sucesivamente.

La última anualidad en un año se convierte en

$$A_c(1 + r)$$

La suma producidos por las anualidades, debe ser igual al capital por "c" por formar entonces:

$$C = A_c(1 + r)^t + A_c(1 + r)^{t-1} + A_c(1 + r)^{t-2} + \dots + A_c(1 + r)$$

Sacando factor común $A_c(1 + r)$:

$$C = A_c(1 + r)\left[(1 + r)^{t-1} + (1 + r)^{t-2} + (1 + r)^{t-3} + \dots + 1\right]$$

transformando a cociente notables:

$$C = A_c(1 + r)\left[\frac{(1 + r)^t - 1}{1 + r - 1}\right]$$

$$C = \frac{A_c(1 + r)\,[(1 + r)^t - 1]}{r}$$

de donde:

$$A_c = \frac{Cr}{(1 + r)[(1 + r)^t - 1]}$$

ANUALIDAD DE AMORTIZACIÓN (A_a)

Es la cantidad fija que se impone al final de cada año al "r" por uno de interés compuesto para amortizar una deuda "C" y los intereses que produce, a interés compuesto, en un tiempo "t".

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA.- La 1ra. anualidad impuesta durante "t - 1" años, se convierte en:

$$A_a(1 + r)^{t-1}$$

La 2da. anualidad impuesta durante "t - 2" años se convierte en:

$$A_a(1 + r)^{t-2}$$

La 3ra. anualidad en "t - 3" años se convierte en:

$$A_a(1 + r)^{t-3}$$

y asi sucesivamente.

La última anualidad A_a, se deposita al final del año t.

La suma de los montos producidos por las anualidades, debe ser igual al capital prestado más sus intereses, es decir:

$$C(1 + r)^t = A_a(1 + r)^{t-1} + A_a(1 + r)^{t-2} + A_a(1 + r)^{t-3} + \dots + A_a$$

Extrayendo factor común A_a:

$$C(1 + r)^t = A_a[(1 + r)^{t-1} + (1 + r)^{t-2} + (1 + r)^{t-3} + \dots + 1]$$

también:

$$C(1 + r)^t = A_a\left[\frac{(1 + r)^t - 1}{1 + r - 1}\right]$$

$$C(1 + r)^t = \frac{A_a\,[(1 + r)^t - 1]}{r}$$

de donde:

$$A_a = \frac{Cr\,(1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.-¿Qué monto formará en 4 años, un capital de 1 000 dólares, imponiéndose al final de cada año a interés compuesto del 10%?

Solución:

Datos: $C = 1\,000$

$t = 4$

$r = \frac{10}{100} = 0{,}1$

De la fórmula:

$$M = C(1 + r)^t$$

$$M = 1\,000(1 + 0{,}1)^4 + 1\,000(1\,.\,1)^4$$

$$= 1\,000(1{,}4641)$$

$M = 1\,464{,}1$ dólares

2.- ¿Cuántos años estuvo impuesto a interés compuesto al 5%, un capital de S/. 3 200 000 que se convirtió en S/. 4 084 101 ?

Solución:

Datos: $M = 4\,084\,101$

$C = 3\,200\,000$

$r = \frac{R}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{10}$

$t = ?$

Por la fórmula:

$$M = (1 + r)^t$$

sustituyendo datos :

$$4'084{,}101 = 3'200{,}00\left(1 + \frac{1}{20}\right)^t$$

$$\frac{4'084{,}101}{3'200{,}000} = \left(\frac{21}{20}\right)^t$$

pero: $4'084,101 = 3^5 \cdot 7^5$

$3'200,000 = 2^5 \cdot 10^5$

luego:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^t = \frac{3^5 \cdot 7^5}{2^5 \cdot 10^5} = \left(\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10}\right)^5$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^t = \left(\frac{21}{20}\right)^5$$

igualando los exponentes:

$$t = 5 \text{ años}$$

3.- ¿En cuántos años, lo más aproximadamente posible, al 15% de interés compuesto se duplica un capital?

Datos: log 2 = 0,301030

log 1,15 = 0,06070

Solución:

Datos: C = x

M = 2x

t = ?

r = 0,15

Por fórmula:

$$M = C(1 + r)^t$$

sustituyendo datos:

$$2x = x(1 + 0,15)^t$$

$$2 = (1,15)^t$$

tomando logaritmos:

$$\log 2 = t \log 1,15$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1,15} = \frac{0,301030}{0,060070} = 5$$

Rpta.: En 5 años

4.- Una máquina al comienzo de un año fue valorizada en S/. 10 000 y se sabe que al final de cada año pierde 30% de su valor por desperfectos. ¿Dentro de cuántos años el valor de la máquina será de S/. 2 401?

Solución:

Datos: C = 10 000

M = 2 401

r = 0,3

t = ?

En este caso, el tanto por uno actúa negativamente, porque la máquina se desvaloriza:

$$M = C(1 + r)^t$$

$$2\,401 = 10\,000\,[1 + (-0,3)]^t$$

$$\frac{2\,401}{10\,000} = (0,7)^t$$

$$\frac{7^4}{10^4} = \left(\frac{7}{10}\right)^4$$

$$\frac{7^4}{10^4} = \left(\frac{7}{10}\right)^t$$

$$t = 4$$

Rpta.: Dentro de 4 años.

5.- ¿Cuánto tiempo tiene que estar impuesto un capital “C” al r% de interés compuesto, para que el monto final sea de “M” dolares?

Datos: log C = 3q - 2p

log M = p + 6q

log(1 + 0,01r) = 1,5(p + q)

Solución:

Por fórmula:

$$M = C(1 + r)t$$

tomando logaritmos:

$$\log M = \log C + t \log(1 + r)$$

$$\log M - \log C = t \cdot \log(1 + r)$$

$$t = \frac{\log M - \log C}{\log\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)} = \frac{\log M - \log C}{\log\,(1 + 0,01r)}$$

sustituyendo valores:

$$t = \frac{p + 6q - 3q + 2p}{1,5(p + q)} = \frac{3(p + q)}{1,5(p + q)} = 2$$

Rpta.: Tiene que estar impuesto 2 años.

6.- Para que un capital colocado al 100 r% de interés compuesto aumente en un k% en "n" años, ¿qué valor debe tener "r"?

Solución:

Datos:

$$M = C + 0,01\ kC = (1 + 0,01k)C$$

$$C = C$$

$$t = n$$

$$r = ?$$

Por fórmula:

$$M = C(1 + r)^t$$

Sustituyendo valores:

$$0,01kC + C = C(1 + r)^n$$

Dividiendo entre "C" se tendrá:

$$0,01k + 1 = (1 + r)^n$$

Extrayendo raíz enésima:

$$\sqrt[n]{0,01k + 1} = 1 + r$$

Rpta.: $r = \sqrt[n]{0,01k + 1} - 1$

7.- Una cierta ciudad tenía una población de 250 000 personas en el año 1 985 y en 1 995 su población alcanzó los 490 000 habitantes. ¿Cuál sería la población estimada en 1 990 suponiendo que el aumento de la población no es constante por año sino proporcional al aumento de sus habitantes?

Solución:

usemos la fórmula:

$$M = C(1 + r)^t$$

la población entre 1 985 y 1 990 es:

$$M_1 = 250\ 000(1 + r)^5 \qquad (1)$$

La población entre 1985 y 1995 es:

$$M_2 = 250\ 000(1 + r)^{10}$$

$$490\ 000 = 250\ 000(1 + r)^{10}$$

$$\frac{49}{25} = (1 + r)^{10}$$

$$(1 + r)^5 = \frac{7}{5} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) :

$$M_1 = 250\ 000\left(\frac{7}{5}\right) = 350,000$$

Rpta.: La población en 1990 fue de:
350, 000 habitantes.

8.- Dos capitales iguales han estado impuestos al mismo tiempo a interés compuesto y han producido iguales intereses. El primero, al 6,09% capitalizando los intereses al fin de cada año. ¿A qué tanto por ciento estuvo impuesto al segundo capital, cuyos intereses se capital semestralmente?

Solución:

Condiciones:

(1) Capitalización anual

$$C_1 = C$$

$$t_1 = t \text{ años}$$

$$r_1 = 0,0609$$

(2) Capitalización semestral

$$C_2 = C$$

$$t_2 = 2t \text{ semestres}$$

$$r_2 = r \text{ anual} = \frac{1}{2} \text{ semestral}$$

Por enunciado:

$$I_1 = I_2 \qquad (A)$$

como: $I = C\left[(1 + r)^t - 1\right]$

$$I_1 = C\left[(1 + 0,0609)^t - 1\right]$$

$$I_2 = C\left[\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}-1\right]$$

Sustituyendo en (A):

$$C\,[(1{,}0609)^t - 1] = C\left[\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}-1\right]$$

$$(1{,}0609)^t - 1 = \left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}-1$$

$$(1.0609)^t = \left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}$$

$$\sqrt[2t]{(1{,}0609)^t} = \sqrt[2t]{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}}$$

$$\sqrt{1{,}0609} = 1 + \frac{r}{2}$$

$$1{,}03 = 1 + \frac{r}{2}$$

$$0{,}03 = \frac{r}{2}$$

$$r = 0{,}06$$

como: $R = 100r$

$\therefore\ R = 6\%$

9.- ¿En cuánto se convertirá, S/. 30 000 al 4% anual, durante 2 años, capitalizándose los intereses cada trimestre?

Dato: $(1{,}01)^8 = 1{,}0824$

Solución:

$C = 30\ 000$

$R = 4\%$

$$r = \frac{4}{100} = 0{,}04 \text{ anual} = \frac{0{,}04}{4}$$

$r = 0{,}01$ (trimestral)

$t = 2$ años $= 2(4) = 8$ trimestres

$M = \ ?$

$$M = C(1 + r)^{4t}$$

$$M = 30\ 000(1 + 00{,}01)^8 = 30\ 000(1{,}01)^8$$

$$M = 30\ 000(1{,}0824) = 32'472{,}0000$$

$$M = 32\ 472$$

10.- Calcular el monto que produce un capital de S/.40 000 impuesto al 6% de interés compuesto durante un tiempo de 3 años y 4 meses. Dato: $(1{,}06)^3 = 1{,}19016$

Solución:

Datos: $M = 40\ 000$

$r = 0{,}06$

$t = 3$ años y 4 meses

$$f = \frac{4}{12}$$

Por fórmula:

$$M = C(1 + r)^t\,(1 + ft)$$

sustituyendo datos:

$$M = 40\ 000(1 + 0{,}06)^3\left(1 + \frac{4}{12}\cdot 0{,}06\right)$$

$$M = 40\ 000(1{,}06)^3\,(1 + 0{,}02)$$

$$M = 4\ .\ 10^4(1{,}19016)(1{,}02) = 48\ 593{,}45$$

$$M = 48\ 593{,}45$$

11.- Un grupo de microbios se reproduce tan rápidamente que en una hora aumenta su volumen en un 50%. ¿Cuántas horas serán necesarias para que su volumen sea 40 veces su volumen inicial? Datos: $\log 2 = 0{,}301030$, $\log 3 = 0{,}47712$

Solución:

El volumen de los microbios crece como si fuese un capital depositado a interés compuesto.

$$V_i = V \ ;\ V_f = 40V$$

De la fórmula:

$$M = C(1 + r)^t$$

sustituyendo datos:

$$40V = V(1 + 0{,}5)^t$$

simplificando y tomando logaritmos:

$$\log 40 = t \log(1{,}05)$$

$$t = \frac{\log 40}{\log 1{,}5}$$

$$t = \frac{\log 2^2 \,.\, 10}{\log\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2 \log 2 + 1}{\log 3 - \log 2}$$

$$t = \frac{2(0{,}30103) + 1}{0{,}47712 - 0{,}30103} = \frac{1{,}60206}{0{,}17609} = 9$$

$t = 9$ horas

12.- $\frac{841}{400}$ es la relación que existe entre los intereses producidos por dos capitales iguales, impuestos durante 4 años y 2 años respectivamente, a interés compuesto y al mismo tiempo tanto por ciento.¿Cuál es éste?

Solución:

Condiciones:

(1)	(2)
$C_1 = c$	$C_2 = c$
$t_1 = 4$	$t_2 = 2$
$r_1 = r$	$r_2 = r$

$R = ?$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{841}{400} \qquad (A)$$

$$I_1 = c\,[(1 + r)^4 - 1] \qquad (1)$$

$$I_2 = c\,[(1 + r)^2 - 1] \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (A):

$$\frac{c\,[(1 + r)^4 - 1]}{c\,[(1 + r)^2 - 1]} = \frac{841}{400}$$

factorizando:

$$\frac{[(1 + r)^2 + 1]\,[(1 + r)^2 - 1]}{[(1 + r)^2 - 1]} = \frac{841}{400}$$

$$(1 + r)^2 + 1 = \frac{841}{400} \quad ; \quad (1 + r)^2 = \frac{841}{400} - 1$$

$$(1 + r)^2 = \frac{441}{400}$$

tomando raíz cuadrada:

$$1 + r = \frac{21}{20}$$

$$r = \frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$$

$$R = 100r = 100\left(\frac{1}{20}\right) = 5$$

$R = 5\%$

13.- Hallar el monto que proporciona un capital, sabiendo que este monto se triplica, cuando el tiempo se duplica y el capital se multiplica a sí mismo.

Solución:

La fórmula del interés compuesto es:

$$M = C(1 + r)^t \qquad (1)$$

Por condiciones del problema:

$$3M = C^2(1 + r)^{2t} \qquad (2)$$

Elevando (1) al cuadrado:

$$M^2 = C^2(1 + r)^{2t} \qquad (3)$$

Dividiendo (3) entre (2):

$$\frac{M}{3} = 1 \quad ; \quad M = 3$$

Rpta.: El monto es de S/. 3

14.- Una persona impone un capital al 4% de interés compuesto durante 4 años, y otra impone el mismo capital, al mismo porcentaje, pero durante un año más, percibiendo: $250(1{,}04)^4$ más de interés. ¿Cuánto es el capital inicial?

Solución:

Se sabe que:

$$M = C + I$$

y que: $\quad M = C(1 + r)^t \qquad \therefore$

Para la primera persona:

$$M_1 = C + I_1 = C(1 + r)^4 \qquad \text{(I)}$$

Para la segunda persona:

$$M_2 = C + I_2 = C(1 + r)^5 \qquad \text{(II)}$$

Restando (II) - (I):

$$I_2 - I_1 = C(1 + r)^4 [(1 + r) - 1]$$

$$I_2 - I_1 = C(r)(1 + r)^4$$

$$C = \frac{I_2 - I_1}{r(1 + r)^4}$$

sustituyendo datos:

$$C = \frac{250(1{,}04)^4}{(1 + 0{,}04)^4 (0{,}04)} = \frac{250 \cdot 100}{4} = 6\,250$$

C = S/. 6 250

15.- La asamblea de pobladores de un pueblo acordó la construcción del local para una escuela presupuestada en S/. 4 millones, cuya cantidad la tomó a préstamo al 5% amortizable en 20 años. Calcular la cantidad fija que debe amortizarse al final de cada año para cancelar el préstamo más sus intereses.

Dato: $(1{,}05)^{20} = 2{,}65347$

Solución:

Datos: C = 4 000 000

R = 5%

r = 0,05

t = 20

Por fórmula:

$$A_a = \frac{C \cdot r(1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}$$

sustituyendo datos:

$$A_a = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 0.05\,(1 + 0{,}05)^{20}}{(1 + 0{,}05)^{20} - 1}$$

$$A_a = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 0{,}05\,(1{,}05)^{20}}{(1{,}05)^{20} - 1}$$

$$A_a = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 2{,}65347}{2{,}65347 - 1} = \frac{5{,}30694 \cdot 10^5}{1{,}65347}$$

A_a = 320 957,74 soles cada año.

16.- Una persona coloca a interés compuesto una cierta cantidad durante 3 años con la finalidad de tener un capital de S/. 7 282 . ¿Qué anualidad debe imponer al 10% de interés compuesto?

Solución:

Datos: C = 7 282

r = 0,1

t = 3

Por fórmula:

$$A_c = \frac{Cr}{(1 + r)[(1 + r)^t - 1]}$$

sustituyendo datos:

$$A_c = \frac{7\,282 \cdot 0{,}1}{(1{,}1)[(1{,}1)^3 - 1]} = \frac{7\,282 \cdot 0{,}1}{(1{,}1)(1{,}331 - 1)}$$

$$= \frac{7\,282 \cdot 0{,}1}{(1{,}1)(0{,}331)} = 2\,000$$

A_c = S/. 2 000

17.- Se presta un capital que aumentado con sus intereses acumulados al 5% durante 3 años resulta de 10 000. ¿Cuál es el valor de la anualidad mediante la cual se ha de extinguir dicha deuda en los 3 años?

Solución:

Datos: C = 10 000

r = 0,05

t = 3

Por fórmula:

$$A_a = \frac{C \cdot r(1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}$$

sustituyendo datos:

$$A_a = \frac{10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}(1{,}05)^3}{(1{,}05)^3 - 1} = \frac{10^2 \cdot 5 \cdot 1{,}157625}{1{,}157625 - 1}$$

$$A_a = \frac{500 \cdot 1{,}157625}{0{,}157625} = 5\,000$$

$$A_a = 5\,000$$

18.- ¿Qué tiempo necesita una suma colocada a interés compuesto y a 100r % para llegar a ser “m” veces mayor?

Solución:

Datos: $C = C_1$

$M = mC_1$

$r = r$

$t = ?$

En la fórmula:

$$M = C(1 + r)^t$$

sustituyendo M y C:

$$mC_1 = C_1(1 + r)^t$$

simplificando y tomando logaritmos:

$$\log m = t \log(1 + r)$$

$$t = \frac{\log m}{\log(1 + r)}$$

19.- Una persona ha pedido prestado el 1 / 1 / 92 la suma de S/. 100 000 y las pagó en dos anualidades (de dos años cada una) de S/. 60 000 . El primer pago lo hizo el 1 / 1 / 94 y el segundo el 1 / 1 / 96. Hallar el porcentaje.

Solución:

La deuda, más sus intereses acumulados, desde 1992 hasta 1996 asciende a:

$$100\,000(1 + r)^4 \qquad (1)$$

Como el primer pago de 60 000 lo realizó en 1994 estará produciendo intereses a favor durante 2 años y conjuntamente con el segundo harán un monto de:

$$60\,000(1 + r)^2 + 60\,000 \qquad (2)$$

de (1) y (2):

$$100\,000(1 + r)^4 = 60\,000(1 + r)^2 + 60\,000$$

haciendo $(1 + r)^2 = x$,y simplificando:

$$5x^2 - 3x - 3 = 0$$

cuya única raíz aceptable es:

$$x = 1{,}13$$

$$\therefore \ (1 + r)^2 = 1{,}13$$

$$r + 1 = 1{,}06 \quad ; \quad r = 0{,}06$$

El porcentaje es 6%.

20.- Una suma de S/. 30 000 ha sido colocada a interés compuesto. Si se le hubiera dejado dos años menos, el capital definitivo hubiera sido inferior en S/.4 000. Si, por el contrario, se le hubiera dejado dos años más, el capital hubiera aumentado en 4 326,4. Hallar el porcentaje.

Solución:

Según los datos del problema:

$$C(1 + r)^n - C(1 + r)^{n-2} = 4\,000 \qquad (1)$$

$$C(1 + r)^{n+2} - C(1 + r)^n = 4\,326{,}4 \qquad (2)$$

Dividiendo (2) : (1):

$$\frac{C(1 + r)^n\left[(1 + r)^2 - 1\right]}{C(1 + r)^{n-2}\left[(1 + r)^2 - 1\right]} = \frac{4\,326{,}4}{4\,000}$$

simplificando: $(1 + r)^2 = 1.0816$

$$(1 + r)^2 = 1{,}0816$$

$$1 + r = 1{,}04$$

$$r = 0{,}04$$

El porcentaje es 4%

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para amortizar un préstamo de S/. 1640, con sus intereses, se han abonado dos anualidades de S/. 882 . ¿Cuál fue el tanto por ciento convenido?

   a) 2% b) 3% c) 4% d) 5% e) 6%

2. Hallar la cantidad "x" que debe añadirse a un capital "C" para que colocado el total a interés simple del 100r % sumen los intereses, durante 3 años, lo mismo que habría aumentado el capital "C", si se hubiera colocado a interés compuesto del mismo tanto por ciento y durante igual tiempo.

   a) $\frac{C(3+r)}{3}$ b) $\frac{Cr(3+r)}{3}$ c) $\frac{Cr(2+r)}{2}$

   d) $\frac{Cr(2+r)}{3}$ e) $\frac{C(r+2)}{2}$

3. Dos capitales iguales han estado impuestos el mismo tiempo a interés compuesto y han producido iguales intereses. El primero al 4,04% capitalizando los intereses al fin de cada año. ¿A qué tanto por ciento estuvo impuesto el segundo capital, cuyos intereses se capitalizaron semestralmente?

   a) 5% b) 2% c) 6% d) 3% e) 4%

4. Hallar el tipo de interés efectivo equivalente a un tipo nominal de 4% capitalizándose semestralmente.

   a) 4% b) 5% c) 5,04%

   d) 4,04% e) 6,04%

5. Hallar el tipo de interés nominal capitalizable semestralmente, equivalente a un tipo de interés efectivo de 8,16%.

   a) 8% b) 4% c) 4,08%

   d) 4,02% e) 1,2%

6. Se ha colocado S/. 400 000 a interés compuesto. Si el tiempo de imposición hubiera sido un año menos, el capital definitivo disminuiría en S/. 22 050 soles y si hubiera sido un año más el capital definitivo aumentaría en 23 152,50. Hallar el tanto por ciento a que estuvo impuesto el capital.

   a) 4% b) 5% c) 6% d) 3% e) 4,2%

7. Una máquina al comienzo de un año fue valorizado en cierta cantidad y se sabe que al fin de cada año pierde el 10% de su valor por desperfectos; al cabo de cuatro años el valor de la máquina será de 131 220. ¿Cuál es el valor de la máquina?

   a) 100 000 b) 205 000 c) 250 000

   d) 200 000 e) 150 000

8. Hallar el interés compuesto que ha producido un capital de 50 000 colocado al 6% durante 4 años, 3 meses y 10 días.

   a) 15 170.8 b) 16 182,90

   c) 14 109,6 d) 13 242,70

   e) 18 000

9. Un capital está colocado a interés compuesto del 5% desde el 1° de enero de 1930. ¿Cuál será el año en que el aumento de capital durante dicho año valga tanto como el capital primitivo?

   a) 1976 b) 1 992 c) 1 984

   d) 1 980 e) 1 978

10. ¿Cuál es el capital que colocado a interés compuesto, al 5% durante 10 años, se ha convertido en S/. 12 460 ?

    a) S/. 10 520 b) S/. 3 280,55 c) S/. 7 750,50

    d) S/. 7 760 e) S/. 7 376,00

11. Un colegio que puede disponer durante 24 años de una cantidad de S/. 8 000. ¿Qué capital debe tomar prestado al 5% para que dicho capital quede amortizado al cabo de 24 años?

a) S/. 100 000.00 b) S/. 200 500

c) S/. 110 387 d) S/. 150 000,50

e) S/. 127 285,75

12. Señalar la fórmula de amortización descomponiendo las anualidades en dos partes, una empleada en el pago de los intereses del capital y la otra en extinguir el capital.

a) $a = \dfrac{Ar\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

b) $a = \dfrac{(1+r)^n\,(1 - rn)}{n}$

c) $a = \dfrac{1}{2}\,(1+r)(r^{n-1} - A)$

d) $a = A(1+r)^n$

e) $a = \dfrac{A\,(r+1)^n}{n+1}$

13. Para formar un capital "C" dentro de "n" años. ¿Qué cantidad "x" se debe depositar al principio de cada año al 100r%, de interés compuesto?

a) $\dfrac{C}{(1+r)^n}$

b) $\dfrac{Cr}{(1+r)^n - 1}$

c) $\dfrac{r}{(1+r)\,[(1+r)^n - 1]}$

d) $\dfrac{C\,(1-r)}{r}\,[(1+r)^n - 1]$

e) $\dfrac{Cr\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

14. Para formar un capital "C" dentro de "n" años. ¿Qué cantidad se debe depositar al final de cada año al 100 r% de interés compuesto?

a) $\dfrac{Cr}{(1+r)^{n-1}}$

b) $\left[\dfrac{Cr}{1+r}\,(1-r)^n - 1\right]$

c) $\dfrac{C(1+r)\,[(1+r)^n - 1]}{r}$

d) $\dfrac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

e) $\dfrac{C}{(1+r)^n}$

15. Una persona recibe un préstamo reembolsable por medio de dos anualidades de "a" soles, pero le resulta más ventajoso pagar cuatro anualidades de S/. 441/841 "a". Hallar el tanto por ciento en que se efectuó la operación.

a) 5% b) 2% c) 6% d) 3% e) 4%

16. Se coloca un capital "C" al 100r% a interés compuesto durante "n": años pero al final de cada uno de los "n - 1" primeros años, se retira la quinta parte de los intereses que van produciendo. Hallar el capital que se tendrá al final del año "n".

a) $C(1+r)^n$

b) $C(1+r)^{n-1}$

c) $C\left(1 + \dfrac{r}{2}\right)^{n-1}(1+r)$

c) $C\left(1 + \dfrac{4}{5}r\right)^{n-1}(1+r)$

e) $(1+r)^{-n+1}$

17. Entregando una anualidad "x" al inicio de cada año, Pedro forma un capital "M"; al cabo de "n" años. Pablo amortiza una deuda "N" en el mismo numero de años, entregando una anualidad "y", si el interés fue compuesto del 100r%. Calcular x/y si M = N.

a) $(1 + r)^{n}$ b) $(1 + r)^{-n}$ c) $(1 + r)^{-n-1}$

d) $(1 + r)^{-n-1}$ e) $(1 + r)^{n+1}$

18. En el problema anterior, determinar M/N si x = y.

a) $(1 + r)^{n}$ b) $(1 + r)^{-n}$ c) $(1 + r)^{-n+1}$

d) $(1 + r)^{-n-1}$ e) $(1 + r)^{n+1}$

19. ¿Cuánto tiempo tiene que estar impuesto un capital a iterés compuesto al 100r% para que aumente en 5 veces su valor?

a) $\dfrac{\log 5}{\log (1 + r)}$ b) $\dfrac{\log 6}{\log (1 + r)}$ c) $\dfrac{\log 3}{\log (1 + r)}$

d) $\dfrac{\log 6}{\log (1 + 0{,}1r)}$ e) $\dfrac{\log 6}{\log (1 + 0{,}01r)}$

20. ¿Por cúanto tiempo debe entregarse una anualidad de S/. 53 792 a interés compuesto al 6%, para amortizar una deuda de 500 000?

a) 20 años b) 12 años c) 14 años

d) 18 años e) 16 años

CLAVE DE RESPUESTAS

1) D	2) B	3) E	4) D	5) A
6) B	7) D	8) D	9) B	10) D
11) C	12) A	13) E	14) A	15) C
16) D	17) C	18) E	19) B	20) C